UNIVERSIDAD DE GRANADA
Ecuaciones Diferenciales
Segundo examen parcial. 19 de junio de 2009

[40] **EJERCICIO 1.**

Responde de forma razonada a las siguientes cuestiones:

(a) Se considera el siguiente problema de valores iniciales:

$$x' = x^2 \cos(x)\,, \quad x(0) = x_0 \in \mathbb{R}\,.$$

Discute la existencia y unicidad de solución y el intervalo maximal en que esta (caso de existir y de ser única) está definida.

(b) Calcula los valores propios y las funciones propias del problema de contorno

$$\begin{cases} x^2 y'' + 2xy' + \lambda y = 0\,, \quad 1 \le x \le e\,, \\ y(1) = 0, \quad y(e) = 0 \end{cases}$$

(c) Se considera el siguiente problema de valores iniciales para $x(t;\varepsilon)$:

$$x' = \varepsilon x^2\,, \quad x(\varepsilon) = -1\,.$$

Calcula, si existe, $\frac{\partial x(t;1)}{\partial \varepsilon}$.

(d) Sea $F : [1,\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua tal que

$$|F(t,x)| \le \frac{1}{t} \quad \forall t \ge 1,\, x \in \mathbb{R}\,.$$

Sea también $x : (1,T) \to \mathbb{R}$, $T > 1$, la solución de una determinada ecuación diferencial que satisface

$$x(t) = 1 + \int_2^t F(s, x(s))\, x(s)\, ds\,.$$

Discute si dicha solución es o no prolongable hasta $+\infty$.

[20] **EJERCICIO 2.**

(a) Se considera la ecuación diferencial de Lienard

$$x'' + f(x)x' + x = 0\,,$$

siendo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de clase C^1 y tal que $f(0) > 0$. Estudia la estabilidad del origen.

(b) Demuestra el teorema de inestabilidad de Cetaev: *Sea* $x' = f(x)$ *con* $f : \Omega \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ *continua y localmente lipschitziana tal que* $f(0) = 0$. *Sea también* $V : \Omega \to \mathbb{R}$ *de clase* c^1 *tal que*

- $V(0) = 0$.
- *Existe* $\{x_n\} \to 0$ *tal que* $V(x_n) > 0$, $n \in \mathbb{N}$.
- $\dot{V}(x)$ *es definido positivo en un entorno de* 0.

Entonces $x = 0$ es un punto de equilibrio inestable.

[40] **EJERCICIO 3.**

Sea $\mathcal{D} = \{y \in C^1([0,1]) : y(0) = 0, y(1) = 1\}$. Se considera el funcional $\mathcal{F} : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ definido por

$$\mathcal{F}[y] := \int_0^1 (y')^3 \, dx \, .$$

(i) Calcula los extremales de $\mathcal{F}$ en $\mathcal{D}$.

(ii) Se definen las siguientes sucesiones de funciones:

$$g_n(x) = \begin{cases} -\sqrt{n}\,, & x \in [0, 1/n] \\ 0\,, & x \in (1/n, 1/2) \\ 2/\sqrt{n}\,, & x \in [1/2, 1] \end{cases} \quad , \qquad n \geq 2\,,$$

y $h_n(x) = \int_0^x g_n(x)\, dx$. ¿Es C^1? ¿Tiene derivada débil? En caso afirmativo, calcúlala. Comprueba que $\{y(x) + h_n(x)\} \to y(x)$ en $C([0,1])$ con la norma uniforme para toda $y \in C([0,1])$.

(iii) En consonancia con el apartado anterior, consideramos ahora funciones del tipo $y(x) + h_n(x)$. ¿En qué espacio están? Consideramos también el funcional $\mathcal{F}$ extendido al espacio de Sobolev $H^1(0,1)$. Sea $y(x) = x$. Calcula $\mathcal{F}[x + h_n(x)]$ y $\lim_{n\to\infty}\{\mathcal{F}[x + h_n(x)]\}$.

(iv) Sabiendo que $y(x) = x$ es un extremal de $\mathcal{F}$, calcula finalmente $\mathcal{F}[y(x)]$. ¿Son contradictorios los resultados de (ii), (iii) y (iv)? ¿Por qué?