UNIVERSIDAD DE GRANADA
Ecuaciones Diferenciales
Examen final. 3 de julio de 2009

La puntuación máxima de cada ejercicio aparece entre corchetes. Entrega los ejercicios en hojas separadas.

[30] EJERCICIO 1.- De una matriz $A \in M_3(\mathbb{R})$ sabemos que sus valores propios son $\lambda = 0$ y $\lambda = -1$, y que

$$\ker(A) = < \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} >, \quad \ker(A + I_3) = < \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} > .$$

Se pide:

1. Estudia la acotación y convergencia del sistema $x' = Ax$.
2. Calcula e^{tA}.
3. Resuelve el p.v.i. $x' = Ax + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

[30] EJERCICIO 2.- Se considera el funcional $\mathfrak{F} : C_0^1[1, e] \to \mathbb{R}$ definido por

$$\mathfrak{F}[y] := \int_1^e x(y'(x))^2 \, dx.$$

Se pide:

1. Determina la ecuación de Euler-Lagrange asociada al problema de minimización de éste funcional sujeto a la condición
$$\int_1^e \frac{1}{x}(y(x))^2 \, dx = 1.$$
2. ¿Cúal es el valor mínimo del problema de minimización planteado en el apartado anterior? ¿En qué función se alcanza el mínimo?

SIGUE $\to\to\to$

[40] <u>Ejercicio 3</u>.- Responde de forma razonada a las siguientes cuestiones.

1. Sabiendo que la ecuación diferencial $(t+x^2)-2txx'=0$ admite un factor integrante $\mu(t,x)=f(t)$, halla la solución de dicha ecuación que cumple $x(1)=1$.

2. ¿Para qué valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ el sistema

$$\begin{cases} x' = y + \operatorname{sen} t, \\ y' = -x + \alpha \cos t, \end{cases}$$

tiene solución 2π-periódica? En caso de existir, ¿es única?

3. Se sabe que el problema de contorno

$$\begin{cases} x'' - 2x' + 2x = b(t), \\ x(0) = x(\pi) = 0, \end{cases}$$

con $b \in C[0,\pi]$, tiene solución. ¿Es única?

4. Se considera el p.v.i.

$$x' = |x|^{1/2} + |t|^{1/2}, \; x(t_0) = x_0.$$

Determina para qué valores de (t_0, x_0) se puede asegurar que tiene solución y cuándo se puede asegurar que dicha solución es única, enunciando de forma precisa el teorema utilizado en cada caso. Cuando existe solución, ¿dónde están definidas las soluciones maximales?