UNIVERSIDAD DE GRANADA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA
ECUACIONES DIFERENCIALES, 11 de febrero de 2009

Entrega los ejercicios en hojas separadas. El número entre corchetes es la puntuación máxima de cada apartado.

Ejercicio 1.- Responde razonadamente a las siguientes cuestiones:

[10] a) Resuelve el p.v.i. $y'' + 3y' - 3y = te^t$, $y(0) = y'(0) = 0$.

[10] b) Tiene la ecuación $x'' + \frac{1-t}{1+t}x = 0$ alguna solución con infinitos ceros en $[0, +\infty)$?

[10] c) Determina la acotación o convergencia del sistema

$$x' = \begin{pmatrix} 2 & a \\ -1 & -2 \end{pmatrix} x,$$

según los valores de $a \in \mathbb{R}$. Haz un esbozo del diagrama de fases del sistema anterior para $a = 0$.

[10] d) Sabiendo que

$$\Phi(t) = e^t \begin{pmatrix} \cos^2 t & \cos t \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix},$$

es la matriz fundamental principal en 0 del sistema $x' = A(t)x$, con $A \in C_{2\pi}(\mathbb{R}; M_2(\mathbb{R}))$, encuentra un cambio de variable que transforme este sistema en uno de coeficientes constantes y determina el sistema que se obtiene.

Ejercicio 2.- Consideramos la ecuación (de Bernouilli)

$$x' = x - b(t)x^2, \tag{1}$$

con $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua y $b(t) \geq b_0 > 0$, $\forall\, t \in \mathbb{R}$.

[6] i) Demuestra que el cambio $y = x^{-1}$ transforma la ecuación (1) en

$$y' = -y + b(t). \tag{2}$$

[6] ii) Calcula la solución de (1) que cumple $x(0) = x_0$ con $x_0 \in \mathbb{R}$.

[6] iii) Sea $x(t; x_0)$ la solución obtenida en el apartado anterior. Demuestra que si $x_0 \geq 0$, $x(t; x_0)$ está definida $\forall t \geq 0$. Existe $\lim_{t\to+\infty} x(t; x_0)$?

[6] iv) Supongamos además que $b(t)$ es T-periódica. Demuestra que (1) tiene una única solución T-periódica no trivial $x_p(t)$. Cúal es esa solución si $b(t) = b_0$, $\forall\, t \in \mathbb{R}$?

[6] v) Prueba que en las condiciones del apartado anterior $\lim_{t\to+\infty}\{x(t; x_0) - x_p(t)\} = 0$ cualquiera que sea $x_0 > 0$.

Ejercicio 3.- En este ejercicio se pretende calcular la exponencial de una matriz $A \in M_N(\mathbb{R})$ sin utilizar la forma canónica real de Jordan. Por simplicidad, trabajaremos con $N = 2$.

Dada $A \in M_2(\mathbb{R})$, sea

$$|A - \lambda I_2| := \lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0, \tag{3}$$

con $a_1, a_0 \in \mathbb{R}$, su ecuación característica.

[10] a) Comprueba que $\Phi(t) = e^{At}$ es solución de la ecuación matricial

$$\Phi'' + a_1\Phi' + a_0\Phi = 0_2,$$

y cumple $\Phi(0) = I_2,\ \Phi'(0) = A$. Justifica que es la única.

(Recuerda que toda matriz "verifica" su polinomio característico, es decir, $A^2 + a_1A + a_0I_2 = 0_2$ *(Caley-Hamilton)).*

[10] b) Consideramos ahora la ecuación escalar que tiene a (3) como polinomio característico, es decir,

$$y'' + a_1y' + a_0y = 0.$$

Sean $\psi_1(t)$ y $\psi_2(t)$ las soluciones de esta ecuación que cumplen $\psi_1(0) = \psi_2'(0) = 1$, $\psi_1'(0) = \psi_2(0) = 0$. Deduce del apartado anterior que $e^{At} = \psi_1(t)I_2 + \psi_2(t)A$.

[10] c) Usando el apartado anterior, calcula la matriz fundamental principal en 0 del sistema $x' = Ax$, siendo

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}.$$