UNIVERSIDAD DE GRANADA
Ecuaciones Diferenciales
Convocatoria extraordinaria de septiembre. 3 de septiembre de 2008.

[25] **EJERCICIO 1.** Sea $F : D \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ una función continua. Dado $(t_0, x_0) \in D$, se considera el p.v.i.

$$x' = F(t, x), \quad x(t_0) = x_0. \tag{1}$$

(a) Define la sucesión de iterantes de Picard o aproximaciones sucesivas asociada a (1) y determina bajo qué condiciones sobre F se puede asegurar que existe $\alpha > 0$ tal que ésta sucesión converge uniformemente a la solución (única) de (1) en $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$.

(b) Utiliza las iterantes de Picard del p.v.i.

$$x' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} x, \quad x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

para demostrar que las series $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} t^{2k}$ y $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} t^{2k+1}$ convergen uniformemente a las funciones $\cos t$ y sen t, respectivamente, en algún entorno de 0.

[25] **EJERCICIO 2.** Se considera la ecuación de Bernouilli

$$(1 + t^2)x' - 2tx = 2tx^2. \tag{2}$$

Se pide:

(a) Justifica que (2) tiene una única solución verificando $x(t_0) = x_0, \forall (t_0, x_0) \in \mathbb{R}^2$.

(b) Sea $x(t; x_0)$ la solución de (2) que cumple $x(0) = x_0$. Calcula $x(t; x_0)$, para cada $x_0 \in \mathbb{R}$.

(c) A partir de (b), determina $\frac{\partial x}{\partial x_0}(t; 1)$.

(d) ¿Qué p.v.i. verifica la función determinada en (c)?

[25] **EJERCICIO 3.** Sea $f \in C^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ tal que $x = 0$ es el único punto de equilibrio de la ecuación

$$x' = f(x). \tag{3}$$

Se supone, además, que toda solución de (3) está definida hasta $+\infty$. Para cada $x \in \mathbb{R}^N$, se define

$$V(x) = f^T(x) f(x),$$

donde A^T denota, como es habitual, la traspuesta de A. Se pide:

(a) Demuestra que

$$\dot{V}(x) = f^T(x) \left(J^T(x) + J(x) \right) f(x),$$

siendo $J(x)$ la matriz jacobiana de f en el punto x.

(b) Deduce de (a) que si la matriz simétrica $M(x) = J^T(x) + J(x)$ es semidefinida negativa (respectivamente, definida negativa) entonces el punto de equilibrio $x = 0$ de la ecuación (3) es estable (respectivamente, asintóticamente estable).

(c) Aplicación: estudia la estabilidad de los puntos de equilibrio de

$$\begin{cases} x' = -x + y, \\ y' = x - y - y^3. \end{cases}$$

(Se supone que toda solución del sistema está definida hasta $+\infty$).

[25] **EJERCICIO 4.** (a) Calcula los valores propios y las funciones propias del problema de contorno

$$\begin{cases} (t^2 y')' + \lambda y = 0, \\ y(1) = y(e) = 0. \end{cases}$$

(b) A partir de (a), justifica que el valor mínimo que alcanza el funcional

$$\mathfrak{F}[y] := \int_1^e \frac{1}{2} t^2 (y'(t))^2 \, dt$$

definido en $\mathfrak{D} := \{ y \in C_0^1[1, e] : \int_1^e (y(t))^2 \, dt = 1 \}$, es $\pi^2 + \frac{1}{4}$.