UNIVERSIDAD DE GRANADA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA
ECUACIONES DIFERENCIALES, 13 de junio de 2008

Entrega los ejercicios en hojas separadas. El número entre corchetes es la puntuación máxima de cada ejercicio.

Ejercicio 1.- Responde razonadamente a las siguientes cuestiones:

[10] a) En el p.v.i.

$$x' = f(t, x), \quad x(0) = 0, \tag{1}$$

siendo

$$f(t, x) = \begin{cases} x, & t \geq 0 \\ 2x/t, & t < 0, \end{cases}$$

¿se pueden aplicar los teoremas de existencia o existencia y unicidad de solución vistos en clase? ¿Tiene solición? En caso afirmativo, ¿cuántas tiene?

[10] b) Sea $x(t, \epsilon)$ la solución del p.v.i.

$$x'' + x = \epsilon(2\cos t + x^2), \quad x(0) = x'(0) = 0.$$

Calcula, si existe, $\frac{\partial x(t,0)}{\partial \epsilon}$.

[10] c) Determina las propiedades de estabilidad del origen para el sistema

$$\begin{cases} x' = 2xy^2 + 4x^2y^3, \\ y' = -x^3 + y^3. \end{cases}$$

(Sugerencia: utiliza $V(x.y) = ax^2 + by^4$, con apropiados a y b.)

[10] d) Calcula, si existe, la derivada débil de la función

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in (0, 1) \\ x^2, & x \in (-1, 0]. \end{cases}$$

¿Es $f \in C^1(-1, 1)$?

Ejercicio 2.-

[10] Demuestra que
"Si $F : (a, b) \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ es tal que

$$|F(t, x)| \leq \alpha(t)|x| + \beta(t), \quad \forall (t, x) \in (a, b) \times \mathbb{R}^N,$$

con $\alpha, \beta : (a, b) \to \mathbb{R}^+$ continuas, entonces toda solución de la ecuación $x' = F(t, x)$ está definida en (a, b)."

[10] Estudia el intervalo maximal de definición de las soluciones de la ecuación

$$x' = \frac{1}{1 + t^2 + x^2} + \sqrt{1 - t}.$$

Ejercicio 3.- Sea $\mathcal{D} := \{y \in C^1[0,1] : \ y(0) = 0\}$. Consideremos el funcional $\mathcal{F} : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ definido por

$$\mathcal{F}[y] := \int_0^1 \frac{1}{2}\{(y')^2 - \lambda(y)^2\}\, dx.$$

[10] i) Estudia para qué valores de λ el funcional $\mathcal{F}$ es estrictamente convexo y, por tanto, admite un único mínimo global.

[10] ii) Demuestra que si $y \in \mathcal{D} \bigcap C^2$ es un candidato a extremo local de $\mathcal{F}$, entonces y es solución del problema de contorno

$$(1) \qquad \begin{cases} y'' + \lambda y = 0, \\ y(0) = y'(1) = 0. \end{cases}$$

[5] iii) Como consecuencia del primer apartado, determina el signo de los posibles valores propios de (1).

[15] iv) Obtén los valores propios y las funciones propias del problema de contorno anterior.