UNIVERSIDAD DE GRANADA
Ecuaciones Diferenciales
Examen final. 27 de junio de 2007

[40] **EJERCICIO 1.** Responde razonadamente a las siguientes cuestiones:

(a) Esboza el diagrama de fases del sistema

$$x' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} x \, .$$

(b) Demuestra que la solución del problema de valores iniciales

$$x'' + x' + tx = 0 \, , \quad x(0) = 0 \, , \quad x'(0) = 1 \, ,$$

verifica

$$x'(t)^2 \leq 1 + \int_0^t x(s)^2 \, ds \quad \forall \, t > 0 \, .$$

(c) Encuentra todos los pares $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^2$ para los que el problema

$$x' + \frac{e^t}{1 + |x|^2} x + \log(t) = 0 \, , \quad x(t_0) = x_0 \, ,$$

admite una única solución y encuentra el intervalo maximal de definición de la misma.

(d) Calcula la ecuación de Euler–Lagrange asociada al funcional

$$\mathcal{F} : \mathcal{D} \to \mathbb{R} \, , \quad \mathcal{F}[u] := \int_D \left\{ 2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 3 \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 - xyu^2 \right\} dx \, dy \, ,$$

siendo

$$D = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1 \} \, , \quad \mathcal{D} = \{ u \in C^1(\bar{D}), u(x, y) = 0 \text{ si } x^2 + y^2 = 1 \} \, .$$

[30] **EJERCICIO 2.** Se considera la ecuación en derivadas parciales de Schrödinger

$$i \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{2} \Delta_x u + u \, ,$$

donde i es la unidad imaginaria y la solución $u = u(t, x) : (0, \infty) \times \mathbb{R}^N \mapsto \mathbb{C}$ es una función compleja.

(a) Encuentra la ecuación diferencial que debe satisfacer $v(x)$, siendo

$$u(t, x) = v(x) e^{-it} \, , \quad v : \mathbb{R}^N \mapsto \mathbb{R} \, .$$

(b) Resuelve la ecuación de Laplace obtenida en (a) en la bola unidad de $\mathbb{R}^2$, sujeta a la condición de contorno

$$v(1,\theta) = \sin(2\theta) \quad \text{en la esfera unidad de } \mathbb{R}^2\,.$$

[30] **EJERCICIO 3.** Se considera la ecuación diferencial de segundo orden

$$x'' + (a + bx^2)x' + x + x^3 = 0$$

con $a, b \in \mathbb{R}$. Demuestra que:

(a) Si $b = 0$ y $a > 0$, entonces $x \equiv 0$ es un punto de equilibrio asintóticamente estable.

(b) Si $a = 0$ y $b > 0$, entonces $x \equiv 0$ es un punto de equilibrio estable.

Nota: El laplaciano bidimensional se expresa de la siguiente forma en coordenadas polares:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \rho}\,,$$

donde ρ es la coordenada radial y θ la angular.