UNIVERSIDAD DE GRANADA
Ecuaciones Diferenciales
Convocatoria extraordinaria de Septiembre.
21 de septiembre de 2007.

La puntuación máxima de cada ejercicio aparece entre corchetes. Entrega los ejercicios en hojas separadas.

[30] Ejercicio 1.- Se considera la ecuación diferencial lineal

$$x'' + x + q(t)x = 0,$$

siendo $q \in C^1(0,\infty)$ tal que existen $a > 0$ y $T > 0$, con $|q(t)| \leq a/t$, $|q'(t)| \leq a/t^2$, para todo $t \geq T$.

Se pide:

a) Justificar que toda solución de la ecuación está definida en $(0,\infty)$.

b) Probar que, dado $t_0 > 0$,

$$x^2(t) + x'^2(t) = C(t_0) - q(t)x^2(t) + \int_{t_0}^{t} q'(s)x^2(s)\,ds,\ \forall\, t \geq t_0,$$

donde $C(t_0)$ es una constante que sólo depende de t_0. (Sug.: Multiplica la ecuación por $x'(t)$ e integra).

c) Demostrar que, si elegimos $t_0 \geq T$ y denotamos por $M := \max\{|x(s)| : s \in [t_0,t]\}$, entonces

$$M^2(1 - \frac{a}{t_0}) \leq C(t_0).$$

d) Como consecuencia del apartado anterior, obtener que toda solución de la ecuación de partida está acotada en $[t_0,+\infty)$, para t_0 es suficientemente grande.

e) Aplicación: Estudia la acotación en infinito de la ecuación

$$x'' + x + (e^{-t^2} - \frac{1}{t+2})x = 0.$$

[30] Ejercicio 2.- Sea $D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < y - x < 1, 0 < y + x < 1\}$. Se trata de resolver el problema

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & \text{en } D, \\ u(x,x) = f(x), \quad u(x,1-x) = 0, & 0 \leq x \leq 1/2, \\ u(x,-x) = 0, \quad u(x,1+x) = 0, & -1/2 \leq x \leq 0. \end{cases}$$

a) Comprueba que el cambio de variables $s = y - x,\ t = y + x$ transforma el problema anterior en

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & \text{en } D_1, \\ u(0,t) = f(t/2), \quad u(1,t) = 0, & 0 \le t \le 1, \\ u(s,0) = 0, \quad u(s,1) = 0, & 0 \le s \le 1, \end{cases}$$

siendo $D_1 := \{(s,t) \in \mathbb{R}^2 : 0 < s < 1, 0 < t < 1\}$.

b) Utiliza el cambio anterior para resolver el problema de partida cuando $f(x) := \sin(2\pi x)$.

[40] Ejercicio 3.- Resuelve las siguientes cuestiones:

1. Resuelve el p.v.i.

$$x(t^2x^2 - 1) + t(t^2x^2 + 1)x' = 0,\ x(1) = 1.$$

(Sug.: Busca un factor integrante $\mu(t,x) = f(tx)$.)

2. Se considera el sistema lineal

$$x' = \begin{pmatrix} a(t) & 0 \\ b(t) & a(t) \end{pmatrix} x \tag{1}$$

con $a, b \in C_T(\mathbf{R})$. Prueba que (1) admite soluciones T-periódicas no triviales si y solamente si $\int_0^T a(t)\,dt = 0$. *Sugerencia:* calcula en primer lugar una matriz fundamental de (1).

3. Determina la estabilidad de la solución $x = 0$ para la ecuación

$$x'' + \mu x' + x^3 + x = 0,$$

en función del parámetro $\mu \in \mathbb{R}$.

4. Se considera el funcional

$$\mathcal{F}[y] = \int_a^b F(x, y(x), y'(x))\,dx \tag{2}$$

definido en $\mathcal{D} = \{y \in C^1[a,b],\ y(a) = A, y(b) = B\}$, con $A, B \in \mathbb{R}$. Demuestra que la ecuación de Euler-Lagrange asociada a (2) para $y \in \mathcal{D} \cap C^2(a,b)$ no varía si se añade al integrando la diferencial total de cualquier función $u(x, y(x))$: $\frac{d}{dx}[u(x, y(x))]$.