UNIVERSIDAD DE GRANADA
Ecuaciones Diferenciales
Segundo examen parcial. 13 de junio de 2007

[30] **EJERCICIO 1.** (a) Demuestra que el problema de valores iniciales

$$x'' + f(x') + x = 0\,, \quad x(0) = x_0\,, \quad x'(0) = v_0\,,$$

con $f \in C^1(\mathbb{R})$ tal que $f(u)u > 0$, $u \neq 0$, tiene una única solución maximal que está definida hasta $+\infty$, $\forall\, x_0, v_0 \in \mathbb{R}$.

(b) Estudia las propiedades de estabilidad de los puntos de equilibrio de la ecuación anterior, supuesto que $f'(0) \neq 0$.

[30] **EJERCICIO 2.** Se considera el problema mixto

$$u_{tt} + u_t - u_{xx} = 0\,, \quad t \geq 0\,, \quad x \in [0, \pi]\,, \tag{1}$$

$$u(t, 0) = u(t, \pi) = 0\,, \quad t \geq 0\,, \tag{2}$$

$$u(0, x) = f(x)\,, \quad u_t(0, x) = g(x)\,, \quad x \in [0, \pi]\,. \tag{3}$$

1. Demuestra que, si existe $u \in C^2([0, +\infty) \times [0, \pi])$ cumpliendo (1), (2) y (3), esta es única.

   Sugerencia: Utiliza la función energía total

   $$E(t) := \frac{1}{2} \int_0^\pi \left(u_t(t, x)^2 + u_x(t, x)^2 \right) dx\,.$$

2. Obtén la solución de (1)–(2)–(3) cuando $f(x) = 7\sin(x)$ y $g(x) = 2\sin(x)\cos(x)$.

[40] **EJERCICIO 3.** Determina, de forma razonada, si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

1. Sea $x(t; \varepsilon)$ la solución maximal del problema de valores iniciales

   $$x'' + \varepsilon \sin(x') + x = 0\,, \quad x(0) = \varepsilon\,, \quad x'(0) = 0\,.$$

   Entonces $\frac{\partial x}{\partial \varepsilon}(t; 0) = \cos(t)$.

2. El problema de Sturm–Liouville singular

   $$(tx')' + \frac{\lambda}{t} x = 0\,, \quad x(0), x'(0) \text{ acotadas}\,, \quad x(1) = 0\,,$$

   no tiene valores propios.

3. La serie
$$S(x) := \frac{e^\pi - 1}{\pi} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^\pi(-1)^n - 1}{n^2+1}\cos(nx)$$
converge absoluta y uniformemente a e^x en $[0,\pi]$.

4. La ecuación de Euler–Lagrange asociada al funcional
$$\mathcal{F} : \mathcal{D} \to \mathbb{R}\,, \quad \mathcal{F}[u] := \int_D \left(uu_x - u_y^2\right) dx\, dy$$
siendo
$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 < 1\}\,, \quad \mathcal{D} = \{u \in C^1(\bar{D}), u(x,y) = 0 \text{ si } x^2+y^2 = 1\}\,,$$
es
$$u_x + 2u_{yy} = 0 \quad \text{en } D.$$