UNIVERSIDAD DE GRANADA
Ecuaciones Diferenciales
Examen final. 4 de julio de 2006

La puntuación máxima de cada ejercicio aparece entre corchetes. Entrega los ejercicios en hojas separadas.

[20] Ejercicio 1.- Se considera el sistema de Volterra de "presa-depredador"

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -ax + bxy, \\ \frac{dy}{dt} &= cy - dxy, \end{aligned}$$

con $a, b, c, d > 0$.

a) Demuestra que las ecuaciones se pueden escribir de forma más simple

$$\begin{aligned} \frac{du}{d\tau} &= \alpha u(v-1), && (1) \\ \frac{dv}{d\tau} &= v(1-u), && (2) \end{aligned}$$

introduciendo el siguiente cambio de variable

$$\begin{aligned} u(\tau) &= \tfrac{d}{c}x(t), \quad \tau = ct \\ v(\tau) &= \tfrac{b}{a}y(t), \quad \alpha = \frac{a}{c}. \end{aligned}$$

b) Para $u(\tau)$ y $v(\tau)$ soluciones positivas de (1)-(2), construye a partir del apartado a) la ecuación que verifica $\frac{du}{dv}$ y resuélvela.

c) Determina el sistema lineal que se obtiene al aplicar el primer método de Lyapunov o método de la primera aproximación al sistema (1)-(2) en el punto de equilibrio $(1, 1)$. Dibuja el diagrama de fases del sistema lineal obtenido.

[20] Ejercicio 2.- Resuelve mediante el método de separación de variables el siguiente problema mixto para la ecuación del calor

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = u, & t > 0,\ x \in [0, \pi], \\ u(0, x) = 3\text{sen }(x) + \text{sen }(3x), & x \in [0, \pi], \\ u(t, 0) = u(t, \pi) = 0, & t \geq 0. \end{cases}$$

[60] Ejercicio 3.- Resuelve las siguientes cuestiones:

a) Construye una ecuación lineal de orden superior mínimo con coeficientes constantes que tenga en su sistema fundamental de soluciones las funciones $t^2, \cos t, e^{-t}$.

b) ¿Cuántas soluciones 2π-periódicas posee la ecuación

$$x'' + \frac{1}{4}x = \text{sen } 2t, \;\; t \in [0, 2\pi]?$$

c) Prueba que $\left(e^{At}\right)^{-1} = e^{-At}$, siendo $A \in \mathcal{M}_{NxN}(\mathbb{R})$.

d) ¿Existe una única solución del P.V.I.

$$x' = \max\{t, x\}\,, \quad x(0) = 0\,,$$

definida en $(-\infty, +\infty)$?

e) Estudia la estabilidad de los puntos de equilibrio del siguiente sistema: $x' = f(x+y)$, $y' = -f(x-y)$, donde $f(z) = \begin{cases} 2z & \text{si } z \geq 0, \\ 3z^2 + 2z & \text{si } z < 0. \end{cases}$

f) Dado el funcional

$$\mathcal{F}[x] := \int_1^2 \left(t(x'(t))^2 + (x(t))^2\right)\, dt,$$

definido en $C^1[1,2]$, determina las condiciones necesarias y suficientes para que $x \in C^2[1,2]$ sea un extremo local de $\mathcal{F}$. Deduce que el problema de contorno que se obtiene sólo tiene la solución trivial.