**UNIVERSIDAD DE GRANADA**
**Ecuaciones Diferenciales**
**Examen final. 4 de julio de 2006**

*La puntuación máxima de cada ejercicio aparece entre corchetes. Entrega los ejercicios en hojas separadas.*

[50] Ejercicio 1.- Se considera la ecuación

$$x' = \begin{pmatrix} -1+\cos(t) & 0 \\ \cos(t) & -1 \end{pmatrix} x\,.$$

[15 ] (a) Calcula una matriz fundamental.

[10 ] (b) Encuentra un cambio de variables que la transforme en una ecuación homogénea con coeficientes constantes.

[10 ] (c) Estudia el comportamiento de las soluciones de la ecuación cuando $t \to \infty$.

[15 ] (d) ¿Existe una función $b(t) \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$ y $2\pi$–periódica, de forma que $x' = A(t)x + b(t)$, $t \in \mathbb{R}$, admita una solución $4\pi$–periódica que no sea $2\pi$–periódica?

**SIGUE** $\to\to\to$

[25] Ejercicio 2.- Mediante el método de separación de variables, resuelve el siguiente problema mixto:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0\,, \quad 0 < x < \pi\,, t > 0\,,\\
&u(t,0) = u(t,\pi) = 0\,, \quad t > 0\,,\\
&u(0,x) = \ \mathrm{sen}(x)\,, \quad 0 \le x \le \pi\,,\\
&\frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = 0\,, \quad 0 \le x \le \pi\,.
\end{aligned}
$$

[25]Ejercicio 3.- Resuelve las siguientes cuestiones

[15 ] I) Se considera el funcional

$$\mathcal{F}[y] = \int_a^b F(x, y(x), y'(x))\, dx \tag{1}$$

definido en $\mathcal{D} = \{y \in C^1[a,b],\, y(a) = A, y(b) = B\}$, con $A, B \in \mathbb{R}$. Demuestra que la ecuación de Euler-Lagrange asociada a (1) para $y \in \mathcal{D} \cap C^2(a,b)$ no varía si se añade al integrando la diferencial total de cualquier función $u(x, y(x))$: $\frac{d}{dx}[u(x, y(x))]$.

[15 ] II) Fijado $\alpha > 0$, estudia la estabilidad de los puntos de equilibrio de

$$x' = A(1 - \cos(\alpha x)),\ A \in \mathbb{R}.$$

¿Depende la estabilidad del signo de A?.