UNIVERSIDAD DE GRANADA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA
ECUACIONES DIFERENCIALES, 20 de junio de 2006

Entrega los ejercicios en hojas separadas. El número entre corchetes es la puntuación máxima de cada ejercicio.

[30] Ejercicio 3.- Sean $D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2 + y^2 < 1\}$ y $\mathcal{D} := \{u \in C^1(\bar{D}) :\ u(x,y) = xy,\ x^2 + y^2 = 1\}$. Consideremos el funcional $\mathcal{F} : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ definido por

$$\mathcal{F}[u] := \int\int_D \{(u_x)^2 + (u_y)^2\}\, dxdy. \quad \text{(Integral de Dirichlet).}$$

Se pide que:

1. Pruebes que $\mathcal{F}$ es estrictamente convexo y, por tanto, admite un único mínimo global, $\varphi \in \mathcal{D}$.
2. Demuestres que si $\varphi \in \mathcal{D} \bigcap C^2$, entonces φ es solución del problema de contorno
$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta u = 0, & \text{en } D, \\ u(x,y) = xy, & \text{en } \partial D. \end{array} \right.$$
3. Calcules φ.

[20] Ejercicio 4.- Responde razonadamente a las siguientes cuestiones:

1. El origen es un punto de equilibrio inestable para el sistema
$$\left\{ \begin{array}{l} x' = -y, \\ y = -x. \end{array} \right.$$
Sin embargo, si definimos $V(x,y) := (x+y)^2$, la derivada de V respecto del sistema, $\dot{V}$, cumple $\dot{V}(x,y) \leq 0$. ¿ Hay contradicción con el primer teorema de Lyapunov?
2. Calcula los valores propios y las funciones propias del problema de Sturm-Liouville regular
$$\left\{ \begin{array}{l} (tx')' + \frac{\lambda}{t}x = 0, \\ x(1) = x'(e^\pi) = 0. \end{array} \right.$$