UNIVERSIDAD DE GRANADA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA
ECUACIONES DIFERENCIALES, 10 de febrero de 2006

Entrega los ejercicios en hojas separadas. El número entre corchetes es la puntuación máxima de cada ejercicio.

[25] Ejercicio 3.- Se considera el sistema

$$(*) \qquad\qquad x' = Ax,$$

con $A \in M_N(\mathbb{R})$ antisimétrica, es decir, tal que $A^T = -A$, donde A^T denota la matriz traspuesta de A. Se trata de probar que si $x(t)$ es una solución de $(*)$, entonces

$$|x(t)| = |x(0)|, \ \forall t \in \mathbb{R}.$$

($|\cdot| \equiv$ norma euclídea en $\mathbb{R}^N$). Se pide:

a) Probar que dada $A \in M_N(\mathbb{R})$,
$$(e^{At})^T = e^{A^T t}, \ \ \forall t \in \mathbb{R}.$$

b) Probar que si $A \in M_N(\mathbb{R})$ es antisimétrica, entonces e^{At} es ortogonal $\forall t \in \mathbb{R}$. ($B \in M_N(\mathbb{R})$ se dice ortogonal si $B^{-1} = B^T$).

c) Concluir el resultado. (Recuerda que dada $B \in M_N(\mathbb{R})$, $< x, By > = < B^T x, y >, \ x, y \in \mathbb{R}^N$, siendo $<,>$ el producto escalar en $\mathbb{R}^N$).

d) ¿Puede tener una matriz antisimétrica valores propios reales? Justifica la respuesta a partir del comportamiento asintótico de las soluciones de $(*)$.

[25] Ejercicio 4.- Se considera la ecuación diferencial de segundo orden

$$(E) \qquad\qquad t^4 x'' + 2(t^2+1)tx' + 2\alpha x = 0.$$

a) Prueba que el cambio de variable $s = 1/t$ trasforma (E) en la ecuación de Hermite

$$(H) \qquad\qquad \frac{d^2x}{ds^2} - 2s\frac{dx}{ds} + 2\alpha x = 0.$$

b) Prueba que si $\alpha \in \mathbb{N}$ existe una solución de (H) que es un polinomio de grado α. (Este polinomio, después de una apropiada normalización, es el denominado polinomio de Hermite de grado α).

c) Halla la solución general de (H).

d) Encuentra la solución de (E) para $\alpha = 4$ que cumple

$$\lim_{t\to+\infty} x(t) = 1, \ \ \lim_{t\to+\infty} t^2 x'(t) = 0.$$