UNIVERSIDAD DE GRANADA
Ecuaciones Diferenciales
Examen final. 6 de julio de 2005

[] EJERCICIO 1.

Decide de forma razonada si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

(a) La forma canónica real de Jordan de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

tiene un único bloque de Jordan.

(b) Toda solución $x(t)$ de la ecuación

$$x'' + ax' + (b + e^{-t}\cos(t))x = 0\,, \quad a, b > 0\,,$$

cumple

$$\lim_{t\to\infty} |x'(t)| = 0\,.$$

(c) Toda solución $x(t)$ de la ecuación

$$x'' + (b + e^{-t}\cos(t))x = 0\,, \quad b > 0\,,$$

tiene infinitos ceros positivos.

(d) La función

$$f(t,x) = \begin{cases} \frac{4t^3x}{t^4+x^2}\,, & (t,x) \neq (0,0) \\ 0\,, & (t,x) = (0,0) \end{cases}$$

es continua y localmente lipschitziana respecto de x en $\mathbb{R}^2$. Por tanto, la única solución del P.V.I.

$$x' = f(t,x)\,, \quad x(0) = 0\,,$$

es la función $x(t) = t^2$.

(e) Sea $x(t;\varepsilon)$ la única solución maximal del P.V.I.

$$x' = \cos(t(x-t))\,, \quad x(a) = a + \varepsilon\,,$$

con $a \in \mathbb{R}$ fijo y $\varepsilon \in \mathbb{R}$. Entonces, $x(t;\varepsilon)$ está definida en todo $\mathbb{R}$ y

$$\lim_{\varepsilon\to 0} x(t;\varepsilon) = t\,,$$

uniformemente en todo compacto de $\mathbb{R}$.

(f) La solución $x(t) \equiv 0$ de la ecuación

$$x'' + ax' + e^x = 1$$

es estable para todo $a \in \mathbb{R}$.

[] **EJERCICIO 2.**

Discute para qué valores de α es $t = 0$ un punto singular–regular de la ecuación

$$t^\alpha x'' + 4tx' + 2x = 0\,.$$

Si $\alpha = 2$, calcula la solución que satisface

$$x(1) = 1\,, \quad x'(1) = -1$$

usando un desarrollo en serie en torno a $t = 1$.

[] **EJERCICIO 3.**

(a) Determina la matriz fundamental principal en $t = 0$ del sistema

$$y' = \begin{pmatrix} \cos(t) & 0 \\ 0 & \sin(t) \end{pmatrix} y$$

y encuentra el cambio de variable que transforma el sistema en uno de coeficientes constantes.

(b) Estudia la existencia de soluciones 2π–periódicas de

$$x' = \begin{pmatrix} -\cos(t) & 0 \\ 0 & -\sin(t) \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

[] **EJERCICIO 4.**

Se considera la ecuación

$$x' = x^2 - \frac{2}{t^2}\,.$$

(a) Estudia la existencia y unicidad de soluciones del P.V.I. para dicha ecuación.

(b) Prueba que existen soluciones de la forma $x(t) = \frac{k}{t}$, $k \in \mathbb{R}$.

(c) Determina en qué intervalo está definida al solución que satisface $x(1) = 0$.

(d) Estudia la estabilidad de la solución del apartado (c).

[] **EJERCICIO 5.**

Resuelve el siguiente problema:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + u\,, \quad 0 < x < \pi\,, t > 0\,, \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0\,, \quad t \geq 0\,, \\ u(x,0) = \sin(x) + 2\sin(3x)\,, \quad 0 \leq x \leq \pi\,. \end{cases}$$