UNIVERSIDAD DE GRANADA
Ecuaciones Diferenciales
Segundo parcial. 22 de junio de 2005

[] **EJERCICIO 1.**

Sea $x(t;x_0)$ la solución del PVI

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = f(t,x) \\ x(0) = x_0 \end{array} \right. ,$$

donde $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es de clase C^2.

(a) Verifica que $\frac{\partial^2 x(t;x_0)}{\partial x_0^2}$ resuelve la ecuación lineal completa

$$z' = \frac{\partial f(t,x(t;x_0))}{\partial x} z + \frac{\partial^2 f(t,x(t;x_0))}{\partial x^2} \cdot \left(\frac{\partial x(t;x_0)}{\partial x_0} \right)^2$$

con la condición inicial $z(0) = 0$.

(b) Calcula $\frac{\partial^2 x(t;0)}{\partial x_0^2}$ si $x(t;x_0)$ es la solución de

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = x + x^2 + tx^3 \\ x(0) = x_0 \end{array} \right. .$$

[] **EJERCICIO 2.** Estudia la estabilidad de los puntos de equilibrio de la ecuación

$$x' = x(4-x) - \alpha$$

según los valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ y representa gráficamente las soluciones. Haz asimismo un esbozo del diagrama de fases.

[] **EJERCICIO 3.** Con un alambre de longitud 2π se forma una circunferencia. La difusión del calor $u(t,x)$ en el alambre satisface la ecuación

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,, \quad t > 0\,, \quad 0 < x < 2\pi\,,$$

junto con las condiciones de contorno

$$u(t,0) = u(t,2\pi)\,, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(t,0) = \frac{\partial u}{\partial x}(t,2\pi)\,, \quad t \geq 0$$

y la condición inicial

$$u(0,x) = 1 + 2\cos(3x) - \mathrm{sen}(7x)\,, \quad 0 \leq x \leq 2\pi\,.$$

(a) Calcula la dimensión del subespacio propio asociado a cada uno de los valores propios del problema de contorno que se obtiene al aplicar el método de separación de variables al problema anterior.

(b) Halla la solución $u(t, x)$.

[] **EJERCICIO 4.** Dada $F : (t, y, p) \in [a, b] \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de clase C^2, se define $\mathcal{F} : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ por

$$\mathcal{F}[y] := \int_a^b F(x, y(x), y'(x))\, dx\,,$$

donde $\mathcal{D} = \{y \in C^1([a, b]) : y(a) = 0\}$.

(a) Demuestra que si $y \in \mathcal{D} \cap C^2([a, b])$ es un extremo local de $\mathcal{F}$ en $\mathcal{D}$, entonces

$$\left\{ \begin{array}{l} F_y(x, y(x), y'(x)) - \frac{dF_p}{dx}(x, y(x), y'(x)) = 0\,, \quad x \in [a, b] \\ F_p(b, y(b), y'(b)) = 0 \end{array} \right. .$$

(b) Encuentra los posibles extremos locales de

$$\mathcal{F}[y] := \frac{1}{2} \int_0^\pi \Big((y')^2 + \lambda y^2 \Big)\, dx$$

en $\mathcal{D} = \{y \in C^1([0, \pi]) : y(0) = 0\}$ según los valores de $\lambda \in \mathbb{R}$.