UNIVERSIDAD DE GRANADA
Ecuaciones Diferenciales
Convocatoria de septiembre. 21 de septiembre de 2005

EJERCICIO 1. Contesta a cada una de las siguientes cuestiones

(a) [10] Se considera la ecuación

$$tx'' + 2\cos(t)x' = 0\,.$$

¿Tiene puntos singulares? ¿Tiene puntos singulares-regulares? ¿Tiene soluciones analíticas?

(b) [10] Sea $x(t, x_0)$ la solución del p.v.i. $x' = x + x^2 + tx^3, \quad x(2) = x_0$. Calcula $\frac{\partial x}{\partial x_0}(t, 0)$.

(c) [10] Estudia la existencia y unicidad de solución del p.v.i. $x' = \ln|x| + e^t,\ x(0) = 1$. ¿Cúal es el intervalo de definición de una solución maximal de este problema?

(d) [10] Estudia la estabilidad de la solución $(0, 0)$ del sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = \alpha x^2 + y^{2n}\,, \\ y' = \alpha y^2 - x^{2n}\,, \end{array} \right.$$

con $\alpha \neq 0$ y $n \in \mathbb{N}$.

(e) [10] Sea $u(t, x)$ la solución de

$$u_t = u_{xx}, \quad u(0, x) = 2 + x - x^2, \quad u(t, 0) = u(t, 1) = 2.$$

Calcula, si existen, los valores máximo y mínimo de dicha función en $[0, +\infty) \times [0, 1]$.

(f) [10] Calcula los valores propios y las funciones propias del problema de contorno

$$\begin{array}{l} t^2y'' + ty' + (t^2 - 1/4)y + \lambda t^{1/2}y = 0, \\ y(\pi) = y(2\pi) = 0. \end{array}$$

(Sug.: Efectua el cambio de variable $w = t^{1/2}y$.)

EJERCICIO 2.[20] Dados $A \in M_{NxN}(\mathbb{R})$, $f : I \to \mathbb{R}$, una función continua en el intervalo abierto I de $\mathbb{R}$, $t_0 \in I$ y $x_0 \in \mathbb{R}^N$, se considera el p.v.i.

$$x' = f(t)Ax, \qquad x(t_0) = x_0.$$

Se pide:

1. Deducir que el p.v.i. tiene una única solución definida en I.

2. Supuesto que $f(t) \neq 0,\ t \in I$, probar que si F es una primitiva de f, el cambio de variable $s = F(t)$ transforma el sistema en otro de coeficientes constantes.

3. Utilizar el resultado anteior para resolver el sistema de Euler

$$\begin{aligned} tx' &= -2x + 2y + t, \\ ty' &= -2x - 2y + t^2, \end{aligned}$$

con la condición $x(1) = 0,\ y(1) = 1$.

EJERCICIO 3.[20]

1. Demuestra que la ecuación lineal

$$x'' + 3x' + 2x = \cos t$$

admite una única solución 2Π-periódica.

2. Sea $\varphi(t)$ la solución 2Π-periódica de la ecuación anterior. Demuestra que $\varphi(t)$ admite un desarrollo en serie de Fourier,

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nt + b_n \sin nt),$$

y que tanto la serie anterior, como las obtenidas derivando término término, convergen uniformemente en $[0, 2\Pi]$ a $\varphi(t)$ y sus derivadas. Utilizando el desarrollo anterior, calcula $\varphi(t)$.