UNIVERSIDAD DE GRANADA
Ecuaciones Diferenciales
Examen final. 5 de julio de 2004

EJERCICIO 1.

(a) [] Decide, de forma razonada, si es verdadero o falso que cada una de las siguientes ecuaciones tiene una única solución π–periódica:

$$x'' + 4x = \text{sen}(4t)\,, \quad x'' + 4x = \text{sen}(2t)\,, \quad x'' + 4x = \text{sen}(t)\,.$$

(b) [] Se considera el PVI

$$x^2(t + t^2) + 3 + t^2 x x' = 0\,, \quad x(1) = 1\,.$$

(i) Obtener la solución (*sugerencia:* se puede hacer un cambio de variable o buscar un factor integrante $\mu = \mu(t)$).

(ii) Hallar el intervalo de definición de la solución maximal obtenmida en el apartado anterior.

(c) [] Decide razonadamente si es verdadera o falsa la siguiente afirmación: el problema

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0\,, & t \geq 0\,, x \in (0,\pi)\,, \\ u(t,0) = u(t,\pi) = 0\,, & t \geq 0\,, \\ u(0,x) = \text{sen}(x)\,, & x \in [0,\pi]\,, \end{cases}$$

tiene una única solución $u(t,x)$ y $-1 \leq u(t,x) \leq 1$ para todo $t \geq 0$ y $x \in [0,\pi]$.

(d) [] Decide razonadamente si es verdadera o falsa la siguiente afirmación: dada $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $f(0) = 0$ y

$$f(x) \cdot x > 0 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^2\,,$$

se tiene que la solución trivial de $x' = f(x)$ es asintóticamente estable.

EJERCICIO 2.

Sea $\varphi \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ solución del sistema $x' = Ax$, con $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Demostrar que $t\varphi(t)$ es solución de $x' = Ax + \varphi(t)$ y aplicar este resultado para resolver

$$x' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \\ e^t \end{pmatrix}.$$

EJERCICIO 3.

Determina, según los valores de $\lambda \in \mathbb{R}$, los candidatos a extremos relativos del funcional

$$\mathcal{F}[y] = \int_1^{e^2} \left(\frac{x^2}{2} y'^2 - \frac{\lambda}{2} y^2 \right) dx \quad \text{en } \mathcal{D} = C_0^1[1, e^2] \, .$$

¿Se puede afirmar que el funcional tiene un único extremo relativo, que es un mínimo, para $\lambda = -2$?. En caso afirmativo, calcúlalo. ¿Y para $\lambda = 2$?.