UNIVERSIDAD DE GRANADA
Segundo Parcial de Ecuaciones Diferenciales
14 de junio de 2004.

*Entrega los ejercicios en hojas separadas. Los alumnos que* ***sólo*** *tengan que examinarse de la* ***segunda parte*** *del parcial, deben realizar los ejercicios III y IV. El número entre corchetes es la puntuación máxima de cada ejercicio; todos los apartados de cada ejercicio tienen la misma puntuación. Duración 3 horas y media.*

[30] Ejercicio I.- Se considera el sistema gradiente $\mathbf{x}' = -\nabla V(\mathbf{x})$, donde $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}$ y

$$V(x_1, x_2) = x_1^2(x_1 - 2)^2 + x_2^2.$$

1. Demuestra que dado $t_0 \in \mathbb{R}$ y $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^2$, existe una única solución maximal de dicho sistema gradiente verificando $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$, y que está definida en todo $\mathbb{R}$.
2. Estudia la estabilidad de los puntos de equilibrio del sistema.

[20] Ejercicio II.- Estudia las propiedades de estabilidad del origen para el sistema

$$\begin{aligned} x' &= y + \alpha x - x^5, \\ y' &= -x - y^5, \end{aligned}$$

según los valores de $\alpha \in \mathbb{R}$.

[30] Ejercicio III.- Se considera el espacio $C^1[x_0, x_1]$ y el funcional $F : C^1[x_0, x_1] \to \mathbb{R}$ definido por

$$F[y] := \int_{x_0}^{x_1} F(x, y(x), y'(x))\, dx,$$

donde $F \in C^2([x_0, x_1] \times D)$, siendo $D$ un convexo de $\mathbb{R}^2$ y $F$ una función convexa.

1. Deduce, de forma justificada, la ecuación de Euler-Lagrange que deben de verificar los posibles extremos locales de $F$ que estén en $C^2[0, 1]$. ¿Cúales son las condiciones de contorno que tienen que cumplir los extremales?
2. Demuestra que $y \in C^2[0, 1]$ es solución del problema de minimización si y sólo si es un extremal.
3. Calcula el mínimo de
$$\int_1^2 \{2y^2 + (x^2/2)(y')^2 - 4y\}\, dx$$
en $C^1[1, 2]$. (Sug.: La ecuación de Euler-Lagrange tiene una solución que es una función afín).

[20] Ejercicio IV.- Encuentra una solución del problema

$$\begin{aligned} &u_{tt} - u_{xx} = \text{ sen } x, \\ &u(0, x) = u_t(0, x) = 0, \ \ x \in [0, \pi], \\ &u(t, 0) = u(t, \pi) = 0, \ \ t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

(Sug.: Busca la solución de la forma $u(t, x) = v(x) + w(t, x)$, con $v(0) = v(\pi) = 0$ y $w$ que verifique la ecuación de ondas homogénea). ¿Hay más soluciones?