Ejemplo 1

Rendimiento de un proceso productivo en función de la temperatura

En una planta química se sintetiza un producto que es utilizado posteriormente como conservante de productos enlatados. El rendimiento del proceso depende de la temperatura.

Se dispone de los siguientes datos

$T\ (°C)$	150	160	170	180	190	200	210
$R\,(\%)$	35.5	37.8	43.6	45.7	47.3	50.1	51.2

Se considera un rendimiento óptimo el que va de 38.5 a 45, por lo que la planta trabaja a 175 $°C$. Si la temperatura de trabajo cae a 162 $°C$ por una avería, ¿será el proceso satisfactorio hasta que sea reparada?

Ejemplo 2

En una planta se bombea esencia de trementina, 60 $°C$, desde la base de una columna de fraccionamiento hasta un gran tanque de almacenamiento descubierto. La columna opera a 1,29 atmósferas . En la siguiente tabla se representan los datos relativos los litros por hora que puede bombear la bomba en función de la potencia en watios a la que es necesario que trabaje:

$Q\ (l/h)$	500	700	900	1100	1300	1500	1700	1900
$N\ \ (w)$	365	361.6	370.64	379.68	384.46	395.5	395.95	397

Se desea saber si la bomba será capaz de impulsar un caudal de 1000 l/h de trementina hasta el tanque de almacenamiento trabajando a un máximo de 373 w.

Ejemplo 3

El pentóxido de dinitrógeno gaseoso puro reacciona en un reactor intermitente según la reacción estequiométrica

$$N_2O_5 \rightleftharpoons 2N_2O_4 + O_2$$

Calculamos la concentraciónde pentóxido de dinitrógeno existente en ciertos instantes, obteniendo los siguientes datos:

$T\ (s)$	0	200	400	650	1100	1900	2300
C	5.5	5.04	4.36	3.45	2.37	1.32	0.71

Si lo tenemos en el reactor un tiempo máximo de 35 minutos (2100 segundos), ¿cuál es la concentración de pentóxido de dinitrógeno que queda sin reaccionar?

Interpolación

Concepto de interpolación

Supongamos que hay dos magnitudes x e y de los que se conocen $n+1$ valores relacionados $\{(x_0, y_0), (x_1, y_1), \cdots, (x_n, y_n)\}$, por ejemplo, datos obtenidos en una experimentación. Con la condición $x_i \neq x_j$ si $i \neq j$.

Nos planteamos si existe una función p tal que

$$p(x_k) = y_k \qquad k = 0, \cdots, n \qquad (1)$$

es decir, queremos una función cuya gráfica "pase"por los puntos del plano dados. Si p verifica (1) diremos que p **interpola** los datos dados p es una función de interpolación para los datos (x_k, y_k) , $k = 0, \cdots, n$.

Este tipo de problemas suele darse cuando tenemos datos obtenidos por experimentación y sabemos que hay una función f que rige el proceso pero que desconocemos y queremos trabajar con una función alternativa p que represente bien a esos datos de la muestra. Si f rige el proceso entonces $f(x_k) = y_k$ luego exigiremos a la función p ese mismo requisito, esto nos proporciona condiciones que imponer a p con las que trataremos de obtenerla y una vez conseguido nos permitiría conocer o predecir qué habría pasado en otros x en los que no se ha experimentado.

Supongamos que existe la función f tal que $f(x_k) = y_k$, $k = 0, \cdots, m$. Caben varias preguntas:

i) La función p que interpola los datos dados ¿ de qué tipo ha de ser? ¿polinómica, trigonométrica, racional,...? La respuesta vendrá dada por los datos y_k.

- •) Si se observa que los datos presentan periodicidad entonces buscaremos a p dentro de la funciones trigonométricas.
- •) Si los datos presentan asíntotas entonces p debería ser una función racional.
- •) Si los y_k presentan un comportamiento polinomial, entonces p se escogería de tipo polinómico. Nos centraremos en cómo resolver este caso.

ii) Una vez escogido el tipo de función habrá que responder dos cuestiones ,¿existe p del tipo escogido que interpole los datos dados? Y si existe , ¿es única?

iii) ¿Es la función polinómica escogida una buena aproximación de la función original f en los puntos x que no son de la muestra?

Nota: entendermos como **función original** la que rige el experimento y de la cual sólo sabemos qué pasa en los n+1 puntos de la muestra.

Vamos a hacer el estudio contestando a estas cuestiones suponiendo que la función p es una función polinómica.

Interpolación polinómica

Planteamiento del problema

Dada una tabla de $n+1$ puntos (x_k, y_k) con $k = 0, \cdots, n$ tales que $x_i \neq x_j$ si $i \neq j$.

Llamaremos **interpolación polinómica** a la determinación de un polinomio p de grado menor o igual que n tal que

$$p(x_k) = y_k \quad , k = 0, \cdots, n$$

Si p es de grado menor o igual que n entonces se podrá expresar

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

donde los a_i se obtendrán a partir de las condiciones de interpolación, esto es,

$$\begin{array}{lcr}
p(x_0) = & a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \cdots + a_n x_0^n = & y_0 \\
p(x_1) = & a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \cdots + a_n x_1^n = & y_1 \\
p(x_2) = & a_0 + a_1 x_2 + a_2 x_2^2 + \cdots + a_n x_2^n = & y_2 \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
p(x_m) = & a_0 + a_1 x_m + a_2 x_m^2 + \cdots + a_n x_m^n = & y_m
\end{array}$$

Aparece un sistema para las variables $a_0, a_1, ..., a_n$ que podemos escribir matricialmente

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_0^2 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_m & x_m^2 & \cdots & x_m^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$$

La matriz del sistema es cuadrada $(n+1) \times (n+1)$ y habrá una única solución del problema si, y sólo si,

$$\det \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_0^2 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{pmatrix} = \prod_{i<j} (x_j - x_i) \neq 0 \Longleftrightarrow x_i \neq x_j$$

es decir, *la solución es única si y sólo si todos los puntos de la muestra son distintos.*

Construcción de la solución
Método directo

Planteamos el problema tal como se ha descrito en el párrafo anterior y pasamos a resolver el sistema. Cuando hayamos obtenido la solución $(a_0, a_1, ..., a_n)$ pasamos a escribir la función polinómica solución de nuestro problema

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

Ventaja del método: la resolución del problema de interpolación pasa por resolver un sistema que es un procedimiento ya conocido .

Inconvenientes: Si aparecen nuevos datos de la experimentación, la solución p de grado n que tengamos para los datos previos no es aprovechable. Hay que rehacer todos los cálculos para la nueva muestra (los datos anteriores y los nuevos juntos).

Polinomio de interpolación : método de Lagrange

Los polinomios de Lagrange

Para cada i, $i = 0, 1. \cdots, n$ construiremos un polinomio de grado menor o igual que n, al que llamaremos p_i de manera que

$$\begin{aligned} &p_i(x_i) = 1 \\ &p_i(x_j) = 0 \quad \text{si } j \neq i \end{aligned}$$

Puesto que el polinomio p_i se anula en $x_0, x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_n$ dicho polinomio debe ser

$$p_i(x) = \alpha (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \cdots (x - x_n) = \alpha \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} (x - x_j)$$

Además, como $p_i(x_i) = 1 \implies 1 = p_i(x_i) = \alpha \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} (x_i - x_j) \implies \alpha = \dfrac{1}{\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} (x_i - x_j)}$,

luego cada $p_i(x)$ es

$$p_i(x) = \frac{\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} (x - x_j)}{\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} (x_i - x_j)} = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}$$

Cada $p_i(x)$ es el i-ésimo polionomio de Lagrange para los puntos $x_0, x_1, ..., x_n$.

Un ejemplo

Para el caso $n = 2$,tenemos x_0, x_1, x_2, los polinomios de Lagrange son

$$p_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)}$$

$$p_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)}$$

$$p_2(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

Teorema Dados $n + 1$ puntos (x_i, y_i), $i = 0, 1, ..., n$ tales que $x_i \neq x_j \quad \forall i \neq j$ existe un único polinomio de grado menor o igual que n, $p(x)$, tal que $p(x_i) = y_i$ con $i = 0, 1, ..., n$.

Haremos uso del teorema anterior para mostrar cómo se determina p haciendo uso de los polinomios de Lagrange.

Sea el polinomio $p(x) = \sum\limits_{i=0}^{n} y_i p_i(x) = \sum\limits_{i=0}^{n} y_i \prod\limits_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}$.

El polinomio p verifica

$$\begin{aligned} & p(x_j) = \sum_{i=0}^{n} y_i p_i(x_j) = \sum_{i=0}^{j-1} y_i p_i(x_j) + y_j p_j(x_j) + \sum_{i=j+1}^{n} y_i p_i(x_j) = \\ & (y_0 \cdot 0 + \cdots + y_{j-1} \cdot 0) + y_j \cdot 1 + (y_{j+1} \cdot 0 + \cdots + y_n \cdot 0) = y_j \\ & \text{con} \quad j = 0, 1, ..., n \end{aligned}$$

es decir, p, es un polinomio de grado menor o igual que n y que satisface las condiciones impuestas. La formación del polinomio p sólo precisa formar los polinomios de Lagrange y escribir una combinación lineal de ellos donde los coeficiente nos vienen dados, los y_i.

Casos particulares

n=1 Interpolación lineal Polinomio que interpola los datos (x_0, y_0), (x_1, y_1)

Formamos los polinomios de Lagrange

$$p_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1}$$

$$p_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

y el polinomio $p(x) = y_0 \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + y_1 \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$

n=2 Interpolación cuadrática Polinomio que interpola los datos (x_0, y_0), (x_1, y_1),(x_2, y_2)

Formamos los polinomios de Lagrange

$$p_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)}$$

$$p_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)}$$

$$p_2(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

y el polinomio $p(x) = y_0 \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + y_1 \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + y_2 \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$

n=3 Interpolación cubica Polinomio que interpola los datos (x_0, y_0), (x_1, y_1),(x_2, y_2) y (x_3, y_3)

Formamos los polinomios de Lagrange

$$p_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)} \quad p_2(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_3)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)}$$

$$p_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} \quad p_3(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)}{(x_3 - x_0)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}$$

y el polinomio $p(x) = y_0 \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)} + y_1 \frac{(x - x_0)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} +$
$y_2 \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_3)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} + y_3 \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)}{(x_3 - x_0)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}$

Ejemplo Calcule el único polinomio de grado menor o igual que tres que interpola a los datos $(-1,1)$, $(0,2)$, $(1,-1)$ y $(2,2)$.

Solución: Formamos los polinomios de Lagrange

$$p_0(x) = \frac{(x-0)(x-1)(x-2)}{(-1-0)(-1-1)(-1-2)} \quad ; \quad p_2(x) = \frac{(x-(-1))(x-0)(x-2)}{(1-(-1))(1-0)(1-2)}$$

$$p_1(x) = \frac{(x-(-1))(x-1)(x-2)}{(0-(-1))(0-1)(0-2)} \quad ; \quad p_3(x) = \frac{(x-(-1))(x-0)(x-1)}{(2-(-1))(2-0)(2-1)}$$

el polinomio es

$$p(x) \quad = 1\frac{(x-0)(x-1)(x-2)}{(-1-0)(-1-1)(-1-2)} + 2\frac{(x-(-1))(x-1)(x-2)}{(0-(-1))(0-1)(0-2)} - 1\frac{(x-(-1))(x-0)(}{(1-(-1))(1-0)(}$$

$$+2\frac{(x-(-1))(x-0)(x-1)}{(2-(-1))(2-0)(2-1)} = -\frac{1}{6}x(x-1)(x-2) + (x+1)(x-1)(x-2) + \frac{1}{2}x(x$$

$$+\frac{1}{3}x(x-1)(x+1) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{2}{3}x^2 - 2x + 2$$

Se puede utilizar la interpolación también para trabajar con un polinomio en vez de con una función dada f.Sólo necesitamos saber qué grado queremos manejar y, una vez decidido el grado, evaluar f en $n+1$ puntos $(x_i, f(x_i))$ $\;i = 0,1,\cdots,n$, de esta manera tenemos que el polinomio que interpola a f en los puntos x_i $i = 0,1,\cdots,n$ es

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} f_i p_i(x) \;\text{, donde } f_i = f(x_i) \text{ con } i = 0,1,\cdots,n$$

Ejemplo:

Polinomio de grado menor o igual que 2 que interpola a la función $f(x) = e^x$ en los puntos $x_0 = -1, x_1 = 0, x_2 = 1$

El polinomio es

$$\begin{aligned}
p(x) = \sum_{i=0}^{n} f_i p_i(x) \quad &= f_0\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + f_1\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + f_2\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} \\
&= e^{-1}\frac{(x-0)(x-1)}{(-1-0)(-1-1)} + e^0\frac{(x-(-1))(x-1)}{(0-(-1))(0-1)} + e^1\frac{(x-(-1))(x-0)}{(-1-1)(1-0)} \\
&= \frac{1}{2}e^{-1}x(x-1) - (x-1)(x+1) + \frac{1}{2}e\; x(x+1) = \\
&= \left(\frac{1}{2}e^{-1} + \frac{1}{2}e - 1\right)x^2 + \left(-\frac{1}{2}e^{-1} + \frac{1}{2}e\right)\; x + 1 = \\
&= (Ch1 - 1)\,x^2 + Sh1\; x + 1
\end{aligned}$$

Si ya hemos formado el polinomio de interpolación p_n para los datos (x_k, y_k) con $k = 0, \cdots, n$ y surge la necesidad de interpolar, además en un nuevo punto (x_{n+1}, y_{n+1}) todos los cálculos anteriores no serían válidos. Tendríamos que formar los correspondientes polinomios de Lagrange de grado $n+1$con lo empezaríamos de nuevo desde el principio. Para que podamos .ªprovechar"el polinomio de interpolación p_n para formar el polinomio que, además, interpola un nuevo punto (x_{n+1}, y_{n+1}) pasamos a la interpolación con el método de Newton.

Polinomio de interpolación : método de Newton

Supongamos que $p_n(x)$ es el polinomio de interpolación para los datos

x_0	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
y_0	y_1	y_2	$\cdots$	y_n

y tenemos un nuevo dato (x_{n+1}, y_{n+1}) queremos contruir un nuevo polinomio $p_{n+1}(x)$ que interpole a los datos anteriores y a (x_{n+1}, y_{n+1}) .

Idea del método de Newton

Formamos el polinomio $p_{n+1}(x)$

$$p_{n+1}(x) = \quad p_n(x) + \underbrace{A(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)}_{\text{término de grado n+1}}$$

El polinomio así construído es de grado $n+1$, interpola a los datos anteriores e imponiendo que se verifique la nueva condición de interpolación

$$p_{n+1}(x_{n+1}) = y_{n+1}$$

tendremos que

$$A = \frac{p_{n+1}(x_{n+1}) - p_n(x_{n+1})}{(x_{n+1}-x_0)(x_{n+1}-x_1)\cdots(x_{n+1}-x_n)}$$

Esta idea se puede llevar a cabo para formar también el polinomio p_n .

Diferencias divididas

Trataremos de construir el polinomio de interpolación p_n de los datos (x_k, y_k) con $k = 0, \cdots, n$ de una muestra sin tener que recurrir a resolver un sistema. Lo escribiremos siguiendo la idea antes planteada

$$p_n(x) = A_0 + A_1(x-x_0) + A_2(x-x_0)(x-x_1) + \cdots + A_n(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})$$

Definición

i) Llamaremos *diferencia dividida de orden cero* de la función f , y lo notaremos, $f[x_i]$ a y_i.

ii) Llamaremos *diferencia dividida de orden uno* de la función f , y lo notaremos $f[x_i, x_{i+1}]$, a el cociente $f[x_i, x_{i+1}] = \dfrac{f[x_{i+1}] - f[x_i]}{x_{i+1} - x_i} = \dfrac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}$

iii) Llamaremos *diferencia dividida de orden dos* de la función f ,y lo notaremos $f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$, a $f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}] = \dfrac{f[x_{i+1}, x_{i+2}] - f[x_i, x_{i+1}]}{x_{i+2} - x_i}$, y así sucesivamente, el siguiente resultado establece cómo formar las diferencias divididas de cada orden.

Ley de recurrencia de las diferencias divididas

Para $k \geq 1$ tenemos

$$f[x_0, x_1, \cdots, x_k] = \frac{f[x_1, x_2, \cdots, x_k] - f[x_0, x_1, \cdots, x_{k-1}]}{x_k - x_0}$$

y $f[x_i] = y_i \ \ i = 0, 1, \cdots, n.$.

Pasamos a aplicar las anteriores definiciones al cálculo de p_n

Si $p_n(x_0) = y_0 \Rightarrow y_0 = A_0 \equiv$diferencia dividida de orden 0 en x_0

$p_n(x_1) = y_1 \Rightarrow y_1 = A_0 + A_1(x_1 - x_0) \Rightarrow A_1 = \dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = f[x_0, x_1] \equiv$diferencia dividida de orden 1 en x_0 y x_1.

En general, al imponer la condición $p_n(x_i) = y_i$ sale la condición

$$y_i = A_0 + A_1(x_i - x_0) + A_2(x_i - x_0)(x_i - x_1) + \cdots + A_i(x_i - x_0)(x_i - x_1)\cdots(x_i - x_{n-1})$$

de donde $A_i = f[x_0, x_1, \cdots, x_i] \equiv$ diferencia dividida de orden i en x_0, x_1,$\cdots$, x_i.

La ley de recurrencia me permite ir formando las diferencias divididas de orden superior a partir de las de un orden menos.

Tabla de diferencias divididas

x_i	y_i	$f[x_i]$	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$	$\cdots$	$f[x_0, x_1, \cdots, x_n]$
x_0	y_0	$f[x_0]$				
x_1	y_1	$f[x_1]$	$f[x_0, x_1]$			
x_2	y_2	$f[x_2]$	$f[x_1, x_2]$	$f[x_0, x_1, x_2]$		
x_3	y_i	$f[x_2]$	$f[x_2, x_3]$	$f[x_1, x_2, x_3]$		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		
x_n	y_n	$f[x_n]$	$f[x_{n-1}, x_n]$	$f[x_{n-2}, x_{n-1}, x_n]$	$\cdots$	$f[x_0, x_1, \cdots, x_n]$

Los elementos de la diagonal son, precisamente, los coeficientes A_i del polinomio p_n escrito en la forma de Newton.

Fórmula de Newton para el polinomio de interpolación

$$p_n(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \cdots + f[x_0, x_1, \cdots, x_n](x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1})$$

Ejemplo 1

Calcule el polinomio de interpolación de Newton para los datos

x_i	-2	-1	2	3
y_i	4	1	4	9

Solución:

El polinomio que se nos pide se puede escribir

$$p_3(x) = A_0 + A_1(x - x_0) + A_2(x - x_0)(x - x_1) + A_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$

Formamos la tabla de diferencias divididas para obtener los coeficientes

x_i	y_i	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$	$f[x_0, x_1, x_2, x_3]$
-2	4			
-1	1	$f[x_0, x_1] = \dfrac{1-4}{-1-(-2)} = -3$		
2	4	$f[x_1, x_2] = \dfrac{4-1}{2-(-1)} = 1$	$f[x_0, x_1, x_2] = \dfrac{1-(-3)}{2-(-2)} = 1$	
3	9	$f[x_2, x_3] = \dfrac{9-4}{3-2} = 5$	$f[x_1, x_2, x_3] = \dfrac{5-1}{3-(-1)} = 1$	$f[x_0, x_1, x_2, x_3] = \dfrac{1-1}{3-(-1)} = 0$

Solución $p_3(x) = 4 - 3(x+2) + (x+2)(x+1) + 0(x+2)(x+1)(x-2) = x^2$

Ejemplo 2

Calcule el polinomio de interpolación para la función $f(x) = |x|$ en los nodos $x_i = -4, -1, 2, 5$ y 7 usando la tabla de diferencias divididas.

Solución: formamos la tabla de diferencias divididas

x_i	$y_i = \|x_i\|$	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$
-4	4		
-1	1	$f[x_0, x_1] = \dfrac{1-4}{-1-(-4)} = -1$	
2	2	$f[x_1, x_2] = \dfrac{2-1}{2-(-1)} = \dfrac{1}{3}$	$f[x_0, x_1, x_2] = \dfrac{\frac{1}{3}-(-1)}{2-(-4)} = \dfrac{2}{9}$
5	5	$f[x_2, x_3] = \dfrac{5-2}{5-2} = 1$	$f[x_1, x_2, x_3] = \dfrac{1-\frac{1}{3}}{5-(-1)} = \dfrac{1}{9}$
7	7	$f[x_3, x_4] = \dfrac{7-5}{7-5} = 1$	$f[x_1, x_2, x_3] = \dfrac{1-1}{7-2} = 0$

$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}]$	$f[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4]$
$f[x_0, x_1, x_2, x_4] = \dfrac{\frac{1}{9}-\frac{2}{9}}{5-(-4)} = -\dfrac{1}{81}$	
$f[x_1, x_2, x_3, x_4] = \dfrac{0-\frac{1}{9}}{7-(-1)} = -\dfrac{1}{72}$	$f[x_0, \cdots, x_4] = \dfrac{-\frac{1}{72}+\frac{1}{81}}{7+4} = -\dfrac{1}{1728}$

Luego el polinomio de interpolación en la forma de Newton que nos piden es

$$p(x) = 4-(x+4)+\frac{2}{9}(x+4)(x+1)-\frac{1}{81}(x+4)(x+1)(x-2)-\frac{1}{1728}(x+4)(x+1)(x-2)(x-5)$$

Problemas de la relación propuesta

1. (c) Calcule el polinomio de interpolación para la tabla dada usando el sistema y la fórmula de Newton

x_i	0	2	4	6
y_i	0.25	0.6	0.9	1

Compruebe que ambas formas dan lugar al mismo polinomio.

Solución:

i) Por medio del sistema

$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$

Imponemos las condiciones de interpolación

$$\begin{aligned} p(0) &= 0{,}25 \\ p(2) &= a_0 + 2a_1 + 4a_2 + 8a_3 = 0{,}6 \\ p(4) &= a_0 + 4a_1 + 16a_2 + 64a_3 = 0{,}9 \\ p(6) &= a_0 + 6a_1 + 36a_2 + 216a_3 = 1 \end{aligned}$$

Matricialmente

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \\ 1 & 6 & 36 & 216 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}25 \\ 0{,}6 \\ 0{,}9 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Solución}: \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}25 \\ 0{,}162\,5 \\ 0{,}012\,5 \\ -3.\,125 \times 10^{-3} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$p(x) = 0{,}25 + 0{,}162\,5x + 0{,}012\,5x^2 - 3.\,125 \times 10^{-3} x^3$

ii) Por el método de Newton

$p(x) = A_0 + A_1 x + A_2 x(x-2) + A_3 x(x-2)(x-4)$

x_i	y_i	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$	$f[x_0, x_1, x_2, x_3]$
0	0,25			
2	0,6	$\frac{0{,}6-0{,}25}{2-0} = 0{,}175$		
4	0,9	$\frac{0{,}9-0{,}6}{4-2} = 0{,}15$	$\frac{0{,}15-0{,}175}{4-0} = -0{,}006\,25$	
6	1	$\frac{1-0{,}9}{6-4} = 0{,}05$	$\frac{0{,}05-0{,}15}{6-2} = -0{,}025$	$\frac{-0{,}025-(-0{,}006\,25)}{6-0} = -3.\,125 \times 10^{-3}$

Solución:

$p(x) = 0{,}25 + 0{,}175\,x - 0{,}006\,25x\,(x-2) - 3.\,125 \times 10^{-3}x\,(x-2)\,(x-4) =$
$0{,}162\,5x + 0{,}012\,5x^2 - 3.\,125 \times 10^{-3}x^3 + 0{,}25$