Capítulo 7
CAMPO ELÉCTRICO Y CORRIENTE ELÉCTRICA

7.1 Interacción entre cargas. Ley de Coulomb

7.2 Campo eléctrico

7.3 Dipolo eléctrico y otras distribuciones de carga

7.4 Potencial eléctrico y energía potencial eléctrica

7.5 Condensadores y capacidad de un condensador

7.6 Intensidad de corriente, resistencia y ley de Ohm

7.7 Propiedades eléctricas de las membranas biológicas.

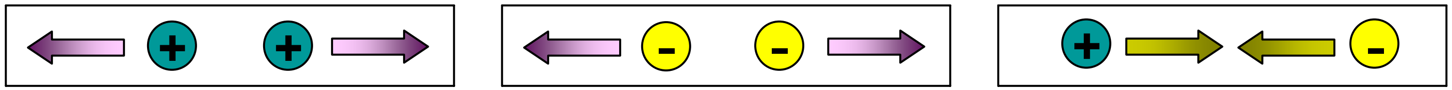
7.1 Interacción entre cargas. Ley de Coulomb

Fenómenos eléctricos

Se conocen desde la Antigüedad: frotando una varilla de ámbar (*elektrum*) con un trozo de piel, ésta se eriza y la varilla puede atraer otros objetos (cabellos, trocitos de papel o de corcho, ...).

La *carga* es una propiedad de la materia, al igual que la masa.

Ya en el s. XVIII se sabía que hay cargas de dos tipos (*positivas* y *negativas*, según las denominó B. Franklin) y que cargas de distinto signo se atraen mientras que las de igual signo se repelen.



La carga no puede derivarse de otras magnitudes fundamentales: masa (M), longitud (L) y tiempo (T), introducidas en la Mecánica. Su *unidad* es el *culombio* (C) en el *sistema internacional*.

Nota: en el sistema internacional se adopta la intensidad de corriente, cuya unidad es el amperio, como magnitud fundamental, en lugar de la carga, aunque estrictamente la intensidad es una magnitud derivada de la carga y el tiempo: $I = q/t$.

Conservación de la carga

Los cuerpos normalmente son neutros (igual carga + y –). Al frotar dos cuerpos se transfiere algo de carga de uno al otro: quedan cargados, pero la carga total del sistema aislado se conserva.

Cuantización de la carga

La carga de un cuerpo siempre es múltiplo de la carga del electrón, que en valor absoluto es $e = 1.602\times10^{-19}$ C (*unidad elemental de carga*). Así, la carga de N electrones es $q = -Ne$ (negativa), la de N protones $q = Ne$ (positiva) y un átomo es neutro (carga nula).

Conductores, aislantes y semiconductores

Según la movilidad de las cargas en los materiales (su capacidad para conducir la carga) los materiales se clasifican en:

Conductores: las cargas se mueven con libertad (metales, disoluciones iónicas, cuerpo humano). Los electrones externos de los átomos se desplazan con facilidad.

Aislantes o *dieléctricos*: las cargas no son libres (vidrio, plásticos, membranas biológicas). Los electrones de los átomos están más ligados que en los conductores. En realidad no existen aislantes perfectos.

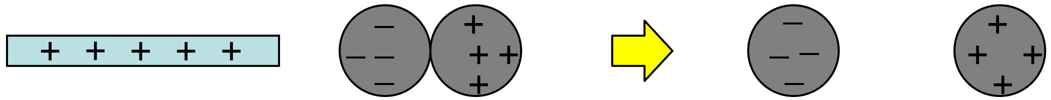
Semiconductores: sus propiedades eléctricas cambian agregando pequeñas cantidades de otros elementos (*dopaje*).

Carga por inducción

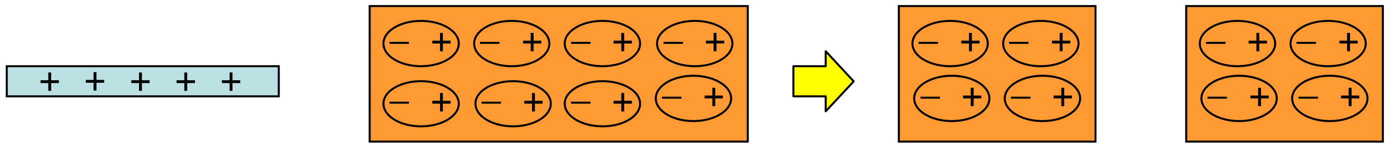
Al *frotar* una varilla con un trozo de piel, la varilla queda cargada positivamente porque la piel le arranca electrones: *carga por conducción*.

Al *acercar* la varilla cargada a un material neutro, las cargas negativas de éste serán atraídas hacia el lado próximo a la varilla y el lado contrario queda cargado positivamente. Así en ambos lados hay *carga por inducción*, aunque globalmente el material sigue neutro.

En el caso de un *conductor* los electrones se mueven con facilidad. Así si ponemos en contacto dos esferas metálicas neutras y acercamos una varilla cargada positivamente a una de ellas podemos conseguir que queden cargadas al separarlas:

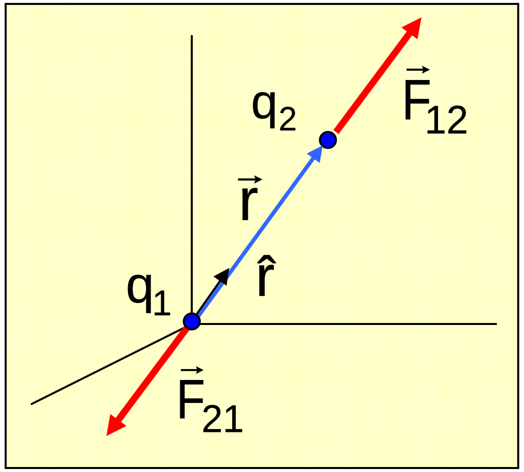


En el caso de un *aislante* (como el corcho) no es posible separarlo en dos mitades cargadas con cargas opuestas:



Ley de Coulomb

En 1785 Coulomb encuentra experimentalmente la ley que cuantifica la fuerza entre dos cargas q_1 y q_2 separadas una distancia r:



$$\boxed{\vec{F}_{12} = K \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{r}}$$

K es la constante de Coulomb.
En el vacío, $K \approx 9\times10^9$ N m^2 C^{-2}

Nótese que: $\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$

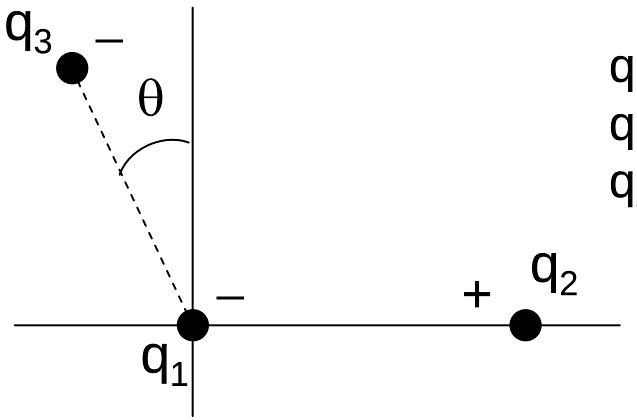
Si existe un medio entre las cargas, el factor global se hace más pequeño. Se suele introducir la *permitividad eléctrica del medio* ε a partir de:

$$\boxed{\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{r}}$$

En el vacío, $K = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} \Rightarrow \varepsilon_0 = 8.854\times10^{-12}$ C^2 N^{-1} m^{-2}

La fuerza es de repulsión/atracción si las cargas son de igual/distinto signo.

Ejemplo: Dadas las cargas, q_1, q_2 y q_3 de la figura, calcular la fuerza ejercida sobre q_1.



Datos:

$q_1 = -10^{-6}$ C
$q_2 = 3\times10^{-6}$ C
$q_3 = -2\times10^{-6}$ C

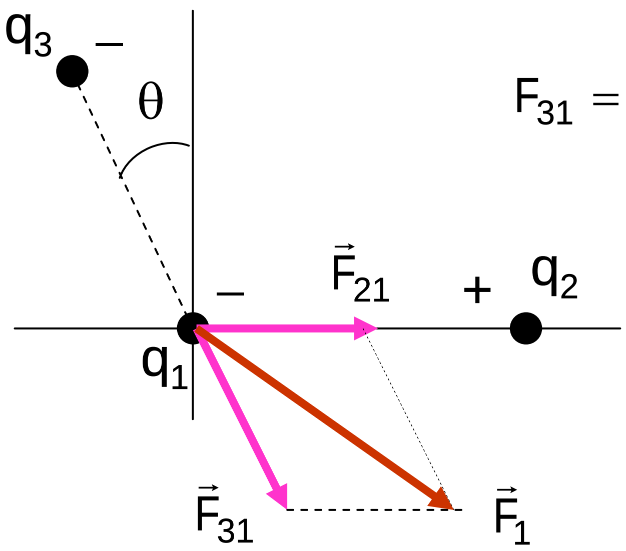
$r_{12} = 15$ cm
$r_{13} = 10$ cm

$\theta = 30°$

Solución: $\vec{F}_1 = \vec{F}_{21} + \vec{F}_{31}$

$$F_{21} = \left|\vec{F}_{21}\right| = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|q_1 q_2|}{r_{12}^2} = 9\times10^9\,\frac{(10^{-6})(3\times10^{-6})}{(15\times10^{-2})^2} = 1.2\,\text{N}$$

$$F_{31} = \left|\vec{F}_{31}\right| = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|q_1 q_3|}{r_{13}^2} = 9\times10^9\,\frac{(10^{-6})(2\times10^{-6})}{(10^{-1})^2} = 1.8\,\text{N}$$



$$F_{1x} = F_{21x} + F_{31x} = F_{21} + F_{31}\text{sen}\theta = 2.1\,\text{N}$$

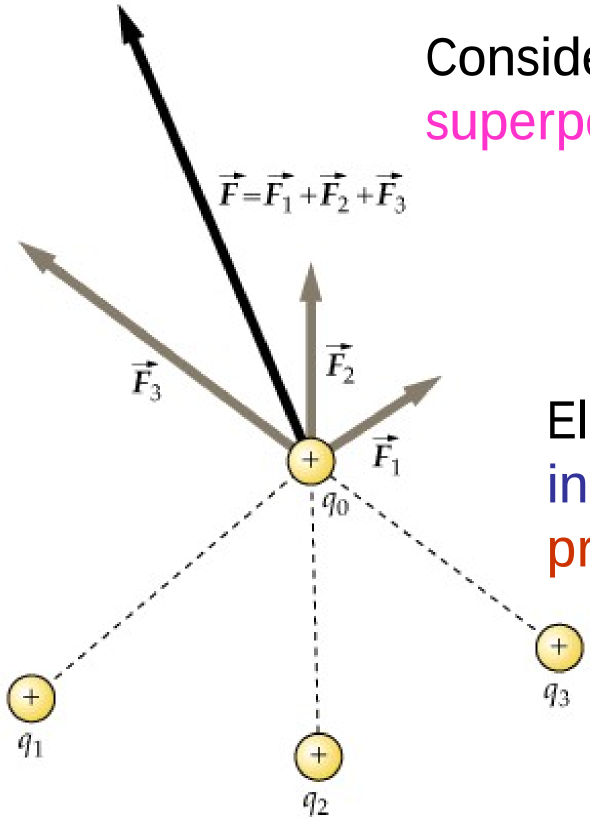
$$F_{1y} = 0 + F_{31y} = -F_{31}\cos\theta = -1.6\,\text{N}$$

$$\vec{F}_1 = (2.1, -1.6)\,\text{N} \Rightarrow F_1 = \left|\vec{F}_1\right| = \sqrt{2.1^2 + 1.6^2} = 2.64\,\text{N}$$

7.2 Campo eléctrico

Un campo es cualquier magnitud física asociada a cada posición del espacio.

El concepto de campo sustituye al de *acción a distancia*.



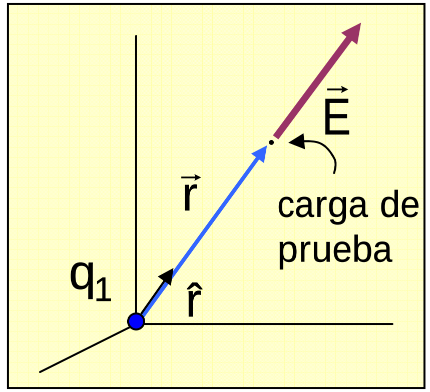
Consideremos varias cargas. Aplicando el principio de superposición, la fuerza ejercida sobre q_0 viene dada por:

$$\vec{F} \equiv q_0 \vec{E} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0}}$$

unidades N C^{-1} en el S.I.

El campo eléctrico es un campo vectorial $\vec{E}$ que indica la fuerza que experimenta una carga de prueba q_0 unidad situada en cada punto del espacio.

campo creado por una carga q_1

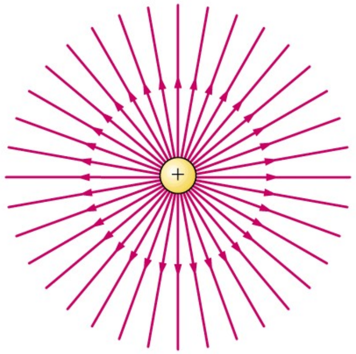


$$\vec{E} = \frac{\vec{F}_{q_1 q_0}}{q_0} \quad \Rightarrow \quad \vec{E} = K \frac{q_1}{r^2} \hat{r}$$

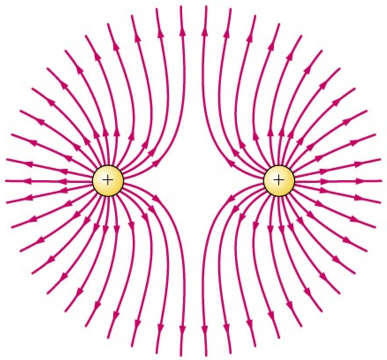
Campo creado por varias cargas: $\vec{E} = \sum_i K \frac{q_i}{r_i^2} \hat{r}_i$

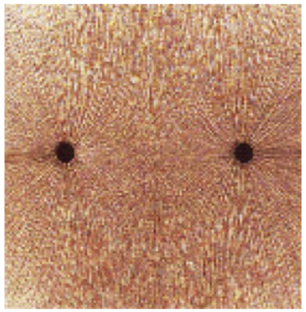
Líneas de campo: representan la dirección y el sentido del campo eléctrico en cada punto. La *densidad de líneas* indica la intensidad del campo. Se pueden visualizar con pequeños objetos que tienden a orientarse (hebras de hilo en las siguientes figuras). **Algunos ejemplos**:

a) Carga puntual positiva: líneas radiales salientes

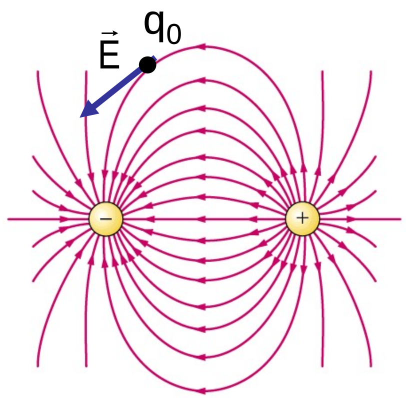


b) Dos cargas positivas





c) Una carga positiva y otra negativa: líneas de + a –. Dipolo: si son iguales con signo opuesto.

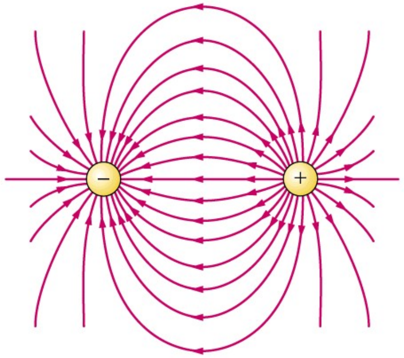


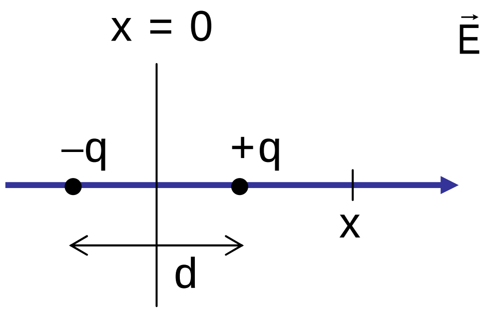
$\vec{F} = q_0\vec{E}$

7.4 Dipolo eléctrico y otras distribuciones de carga

Dipolo: dos cargas iguales de signo opuesto separadas una distancia d.

La carga total es nula pero el campo creado no es cero.





Campo creado por un dipolo a lo largo de su eje:

$$\vec{E}_+ = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{(x-\frac{d}{2})^2}\hat{i} \quad ; \quad \vec{E}_- = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{(x+\frac{d}{2})^2}\hat{i}$$

$$\vec{E} = \vec{E}_+ + \vec{E}_- = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2xqd}{\left(x^2-\left(\frac{d}{2}\right)^2\right)^2}\hat{i}$$

$$\text{Si } x >> d \text{ entonces } \quad \vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2qd}{x^3}\hat{i}$$

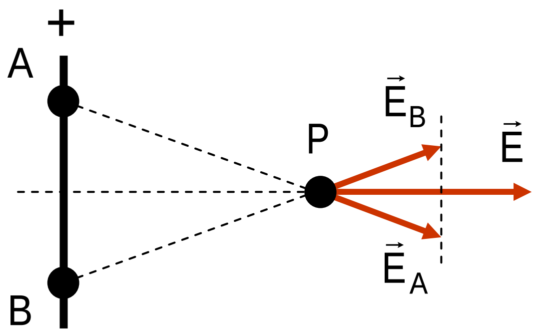
El campo eléctrico creado por un dipolo decrece como el inverso del cubo de la distancia al dipolo, más rápidamente que el creado por una carga aislada (que lo hace como el inverso de la distancia al cuadrado).

El dipolo se caracteriza por su *momento dipolar* $\vec{\mu} = q\vec{d} = qd\hat{i}$ (en la fig.)

La mayoría de las moléculas formadas por átomos distintos, aún siendo eléctricamente neutras, tienen momento dipolar.

Un plano cargado uniformemente

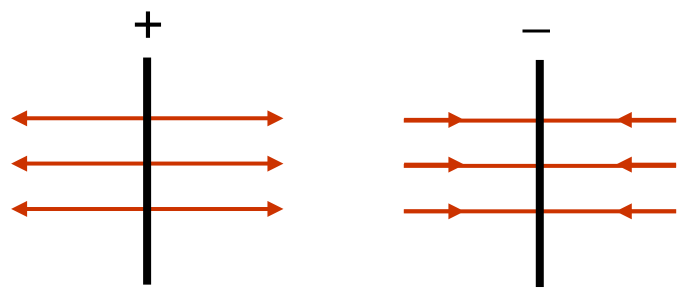
El campo es perpendicular al plano (lámina):
(las componentes paralelas se cancelan entre sí)



$\vec{E} = \vec{E}_A + \vec{E}_B$

Se demuestra (no lo haremos) que $\boxed{E = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}}$ donde $\sigma = q/S$ es la densidad superficial de carga en el plano, siendo q la carga y S la superficie del plano.

El campo no depende de la distancia (uniforme), siempre que ésta sea pequeña comparada con la lámina.

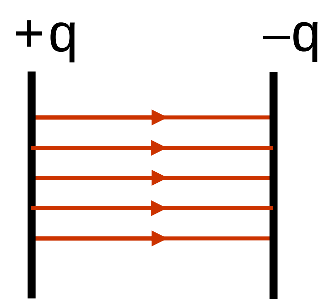


Dos planos cargados uniformemente (condensador plano)

El campo se anula en el exterior
y es uniforme en el interior: $\vec{E} = \vec{E}_+ + \vec{E}_-$

$$E = 2 \times \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}} \quad \text{(interior)}$$

$\vec{E} = 0$

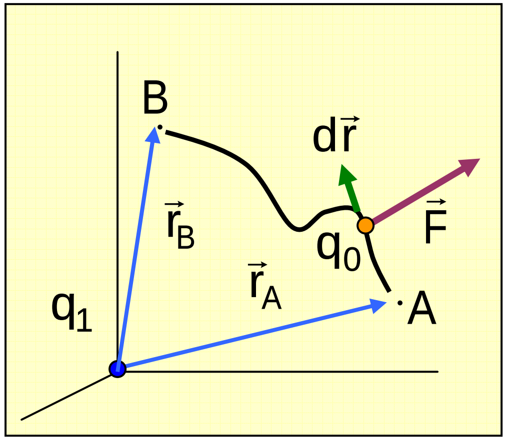


$\vec{E} = 0$

7.4 Energía potencial eléctrica y potencial eléctrico

La fuerza eléctrica, como la fuerza gravitatoria, es conservativa.

El trabajo realizado por la fuerza eléctrica para llevar una carga q_0 desde A hasta B, no dependerá del camino seguido por la carga:



$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{r} = U_A - U_B = -\Delta U$$ diferencia de energía potencial

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_0 q_1}{r^2}\hat{r} \Rightarrow W_{AB} = \frac{q_0 q_1}{4\pi\varepsilon_0}\int_A^B \frac{dr}{r^2} = \frac{q_0 q_1}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{r}\right]_A^B$$

$$\Rightarrow \boxed{U(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_0 q_1}{r}}$$

Energía potencial eléctrica

Conviene introducir otra magnitud escalar, cuya variación da el trabajo que realiza el campo para llevar la unidad de carga desde A hasta B:

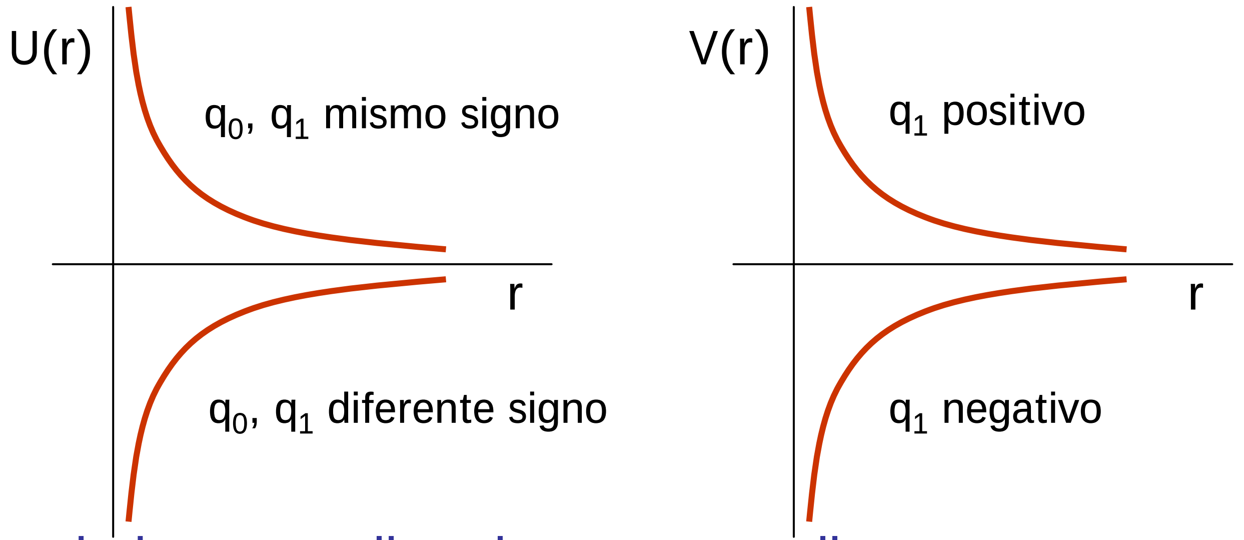
$$\frac{W_{AB}}{q_0} = \int_A^B \frac{\vec{F}}{q_0}\cdot d\vec{r} = \int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{r} = \frac{U_A - U_B}{q_0} = V_A - V_B = -\Delta V$$ diferencia de potencial

$$\Rightarrow \boxed{V(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{r}}$$

Potencial creado por una carga q_1 a una distancia r

unidades en el SI: J C^{-1} = V (voltio)

- U y V pueden ser positivos o negativos según el signo de q_0 y/o q_1.



- V(r) es el trabajo que realiza el campo para llevar una carga positiva unidad desde r hasta el infinito. Si V(r)<0 el trabajo es contra el campo.

- La energía mecánica (E_m) = cinética (E_c) + potencial (U) se conserva.

- El potencial creado por varias cargas q_i, i=1,...,n es la suma de los creados por cada una:

$$V = \sum_{i=1}^{n} V_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_i}{r_i}$$

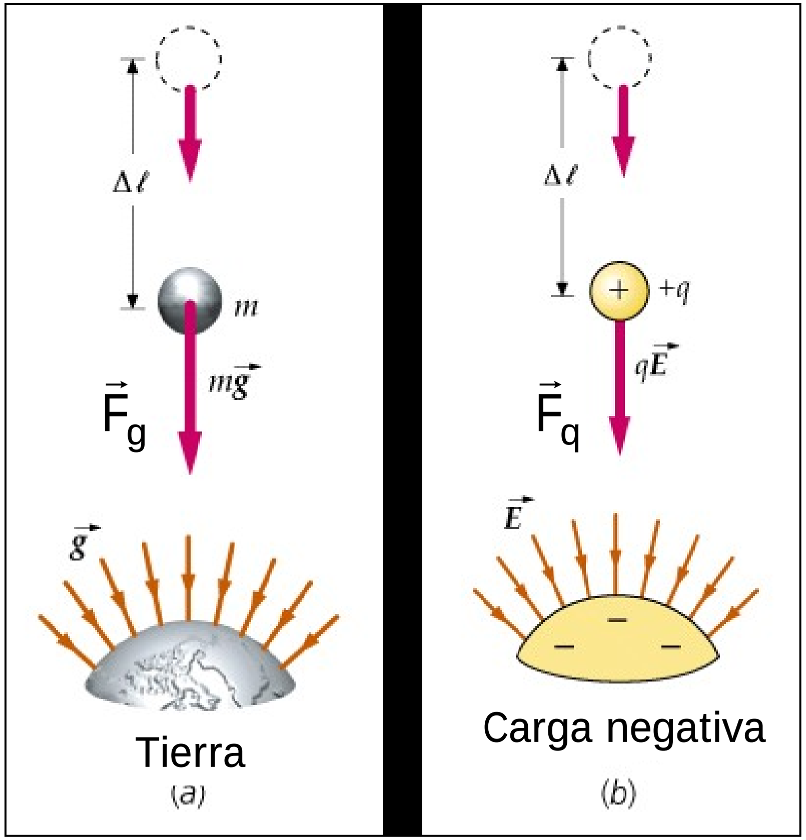
- Conocido el potencial V(r) en cualquier punto, la energía potencial U(r) que adquiere una carga q en ese punto será: U(r)=q V(r)

- Analogía entre energía potencial gravitatoria y energía potencial eléctrica

$$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = -\Delta U$$

Como la fuerza tiene la misma dirección y sentido que el desplazamiento, se tiene W > 0 y por tanto $\Delta U < 0$, es decir, U disminuye.

Así, la carga se mueve hacia una región de menor energía potencial eléctrica del mismo modo que una masa cae hacia una región de menor energía potencial gravitatoria



- Movimiento de cargas en un campo eléctrico

Una carga q_0 en un campo eléctrico se acelera en la dirección del campo

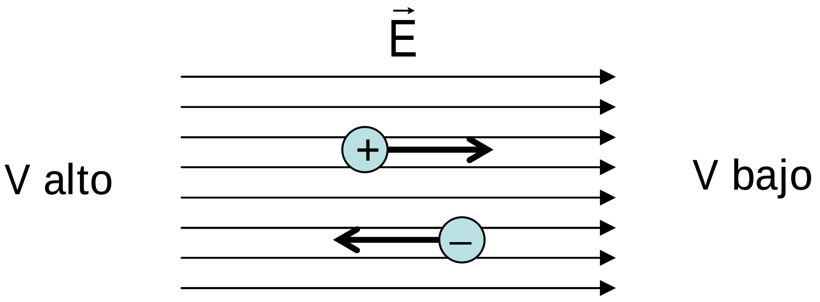
$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} = \frac{q_0\vec{E}}{m}$$

Como su energía cinética aumenta, su energía potencial disminuirá (conservación de la energía mecánica), es decir $\Delta U < 0$.

Recordando que $\Delta U = q_0\, \Delta V$, tenemos que:

- Si $q_0 > 0$, se mueve en el sentido del campo, disminuyendo U, es decir hacia potenciales V más bajos ($\Delta V < 0$)

- Si $q_0 < 0$, se mueve en sentido opuesto al del campo, disminuyendo U, es decir hacia potenciales V más altos ($\Delta V > 0$)

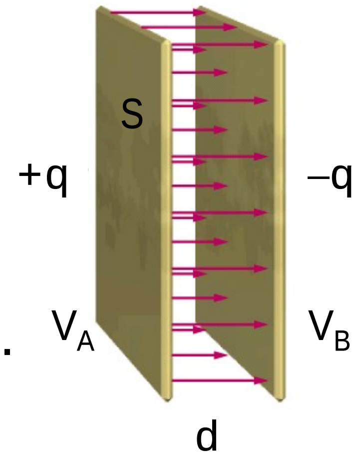


7.5 Condensadores y capacidad de un condensador

Un condensador plano consiste en dos planos cargados uniformemente con cargas iguales y de signo opuesto. Dentro el campo eléctrico es uniforme.

Diferencia de potencial entre las placas de un condensador plano:

$$\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon}\frac{q}{S}\hat{r} \quad \text{(constante)} \;\Rightarrow \int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{r} = V_A - V_B \equiv V \Rightarrow E\,d = V$$

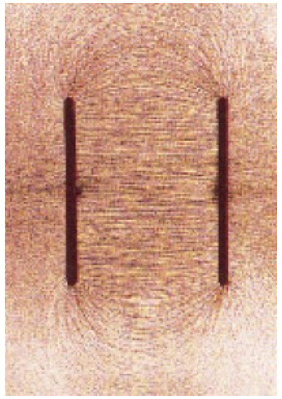


donde ε es la permitividad eléctrica del material entre las placas. El campo eléctrico E está dirigido hacia potenciales decrecientes. Llamamos V a la diferencia $V_A - V_B$.

Capacidad de un condensador se define como el cociente entre la carga de una placa q y la diferencia de potencial V:

$$\boxed{C = \frac{q}{V}}$$

Unidades en el SI: faradio (F)
$1\ \mathrm{F} = 1\ \mathrm{C\,V^{-1}}$



C depende de la geometría (área y separación entre placas) y de las propiedades dieléctricas del material entre las placas.

$$\boxed{C = \varepsilon\frac{S}{d}}$$ para un condensador plano

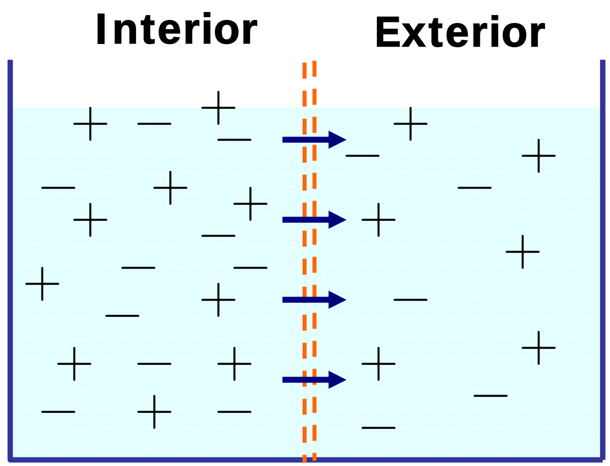
7.7 Propiedades eléctricas de las membranas biológicas

Las membranas biológicas son *semipermeables*, permitiendo el paso de *algunas* sustancias. Dos mecanismos antagónicos en el transporte de iones:

- Diferencias de concentración (gradiente) entre interior y exterior

  Ejemplo: Si la membrana deja pasar los iones + pero no los –

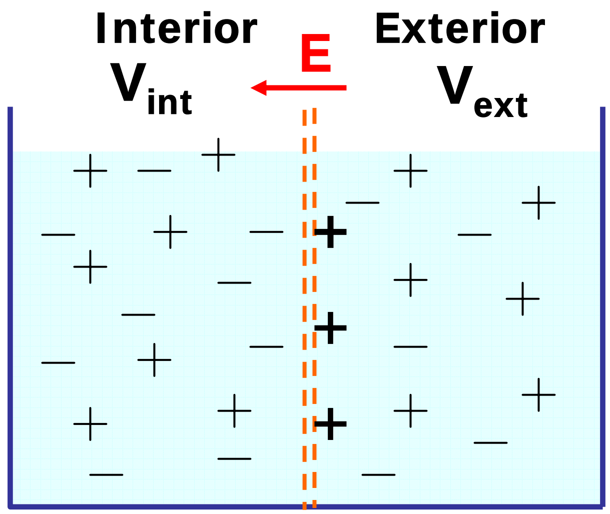
  Δc favorece el paso de iones + del interior al exterior



- Diferencias de potencial eléctrico (potencial de membrana)

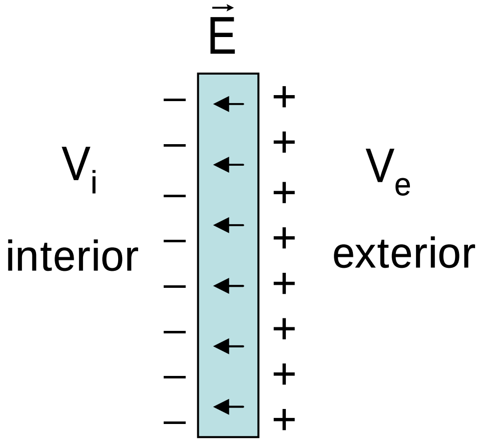
  Se acumula un exceso de carga + en el exterior, creando un campo eléctrico. Por tanto:

  ΔV favorece el paso de iones + del exterior al interior



La concentración de iones K^+ es mayor dentro que fuera de la célula y la de Na^+ y Cl^- es mayor fuera que dentro. La electroneutralidad del citoplasma y del fluido extracelular se mantiene gracias a otros iones.

Si la pared celular fuera permeable *sólo* a los iones K^+, éstos saldrían a través de ella para equilibrar las concentraciones, produciendo un exceso de carga positiva fuera y negativa dentro.



En el equilibrio el potencial de la membrana V_m viene dado por la ecuación de Nernst:

$$\boxed{V_m \equiv V_i - V_e = \frac{k_B T}{q_e} \ln \frac{c_e}{c_i}}$$

nótese que: $\ln \frac{c_e}{c_i} = -\ln \frac{c_i}{c_e}$

donde T es la temperatura absoluta, q_e la carga de los iones ($\pm$) a los que la membrana es permeable y c_i, c_e sus concentraciones interior, exterior.

La pared celular actúa como un condensador plano (espesor mucho menor que el perímetro) cuya capacidad viene dada por su superficie S, su espesor d y su permitividad eléctrica ε.

Ejemplo: Dadas las concentraciones de K^+ dentro y fuera de una neurona,

$$c_i = [K]_i = 0.155 \text{ mol/l}$$

$$c_e = [K]_e = 0.004 \text{ mol/l}$$

$$\left.\begin{aligned} T &= 273 + 37 = 310 \text{ K} \\ q_e &= e = +1.6 \times 10^{-19} \text{ C} \\ k_B &= 1.38 \times 10^{-23} \text{ J K}^{-1} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{k_B T}{q_e} = 26.7 \text{ mV} \Rightarrow \boxed{V_m = V_i - V_e = \frac{k_B T}{e} \ln \frac{[K]_e}{[K]_i} = -98 \text{ mV}}$$

Sabiendo que la membrana tiene $\varepsilon = 3\varepsilon_0$, S = 5×10^{-6} cm^2 y d = 10^{-8} m,

$$\boxed{C = 3\varepsilon_0 \frac{S}{d} = 1.3 \times 10^{-12} \text{ F}}$$

De donde la carga acumulada a ambos lados de la pared es

$$\boxed{q = C\,V = 1.3 \times 10^{-13} \text{ C}} \quad \Rightarrow \quad \frac{q}{q_e} = \frac{1.3 \times 10^{-13} \text{ C}}{1.6 \times 10^{-19} \text{ C}} = \boxed{8.1 \times 10^5 \text{ iones } K^+}$$

El número de iones K^+ acumulados en la pared es una millonésima del total del interior de la neurona ($V \approx 10^{-12}$ l $\Rightarrow V \times N_A \times 0.155$ mol/l $\approx 10^{11}$ K^+).
Por tanto, la salida de este pequeño número de K^+ no altera la concentración.

En realidad la membrana es permeable tanto a K^+ como a Cl^- y Na^+. Podríamos repetir el procedimiento anterior para calcular el potencial de la membrana si *sólo* Cl^- o *sólo* Na^+ pudieran pasar a través de ella. PERO:

Cuando se consideran *conjuntamente* todos los iones, el potencial de la membrana debe calcularse teniendo en cuenta las permeabilidades de cada ión (p_K, p_{Cl}, p_{Na}). La ecuación de Goldman-Hodgkin-Katz (GHK):

$$V_m = V_i - V_e = \frac{k_B T}{e} \ln \frac{p_K [K]_e + p_{Cl} [Cl]_i + p_{Na} [Na]_e}{p_K [K]_i + p_{Cl} [Cl]_e + p_{Na} [Na]_i}$$

se recupera la Ec. Nernst cuando p = 1 para un ión y p = 0 para los otros

Ión	c_e [mol/l]	c_i [mol/l]
K^+	0.004	0.155
Na^+	0.145	0.012
Cl^-	0.123	0.004

En las neuronas la permeabilidad del Cl es despreciable frente a las de K y Na $\Rightarrow$ $p_{Cl} = 0$.

Potencial de la membrana en función de las permeabilidades relativas de K y Na