UNIDAD TEMÁTICA I

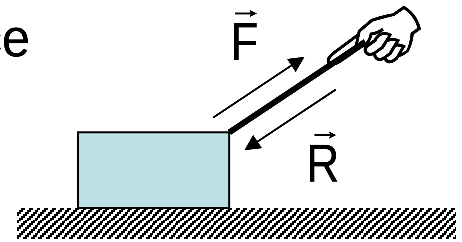
BIOMECÁNICA

Mecánica: estudio de las condiciones que hacen que los objetos permanezcan en equilibrio (*estática*) y de las leyes que rigen su movimiento (*dinámica*). La *cinemática* describe el movimiento sin atender a las causas que lo originan.

Capítulo 2
FUERZAS Y ESTABILIDAD

2.1 Fuerzas fundamentales y fuerzas derivadas

Fuerza: influencia que al actuar sobre un objeto hace que éste cambie su estado de movimiento.



Propiedades de las fuerzas:

1. La fuerza es aplicada por un objeto material a otro: causa y efecto.
2. La fuerza es un vector: se caracteriza por su módulo, dirección y sentido.
3. Las fuerzas actúan por parejas: si un objeto A ejerce una fuerza sobre un objeto B, entonces el objeto B ejerce a su vez otra fuerza sobre A de igual módulo y dirección pero sentido opuesto.

   Ésta es la 3ª ley de Newton (principio de acción y reacción).
   Importante: acción y reacción actúan sobre objetos diferentes.
4. Superposición de fuerzas: si dos o más fuerzas actúan simultáneamente sobre el mismo objeto, su efecto es el mismo que el de una única fuerza (resultante) igual a la suma vectorial de las fuerzas individuales.

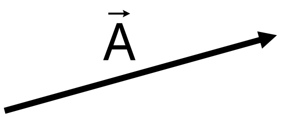
   Para que un objeto permanezca en equilibrio es necesario que la resultante sea nula (1ª ley de Newton).

Vectores

Magnitudes escalares: definidas por un *número* (masa, presión, volumen, temperatura, ...) A

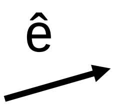
Magnitudes vectoriales: definidas por *número*, *dirección* y *sentido* (desplazamiento, velocidad, fuerza, ...) $\vec{A}$

Vector: *segmento orientado*, caracterizado por módulo, dirección y sentido:

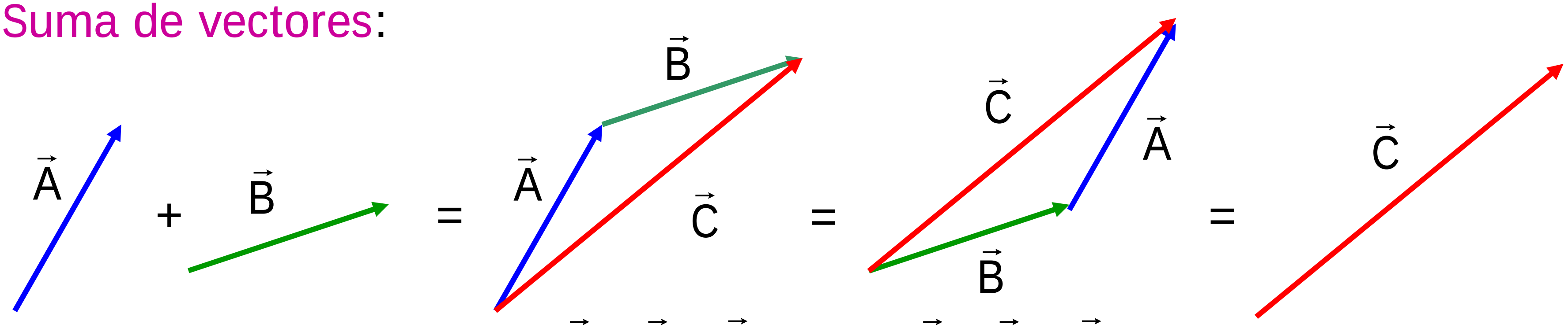


Módulo $A = \left|\vec{A}\right|$: longitud del vector

Vector *unitario* (*versor*): Tiene *módulo unidad*. Ejemplo: $\hat{e} = \dfrac{\vec{A}}{\left|\vec{A}\right|}$



Suma de vectores:



$\vec{A} + \vec{B} = \vec{C}$ $\qquad$ $\vec{B} + \vec{A} = \vec{C}$

Las cuatro fuerzas fundamentales

- Fuerza gravitatoria: (masas; atractiva; largo alcance; la más débil)

Ley de la gravitación universal de Newton:

$$\boxed{\left|\vec{F}\right| = G\frac{m_1 m_2}{r^2}} \qquad G = 6.6742\times10^{-11}\ \mathrm{Nm^2/kg^2}$$

Responsable de las mareas (Luna y Sol) y del peso de los cuerpos: fuerza con que la Tierra atrae a un cuerpo de masa m en su superficie,

$$\boxed{\vec{F} = m\,\vec{g}} \qquad \left|\vec{g}\right| = G\frac{M_T}{R_T^2} \approx 9.81\,\mathrm{m/s^2}$$

- Fuerza electromagnética: (cargas; atractiva/repulsiva; largo alcance; pp es $10^{36}\times F_g$)

Responsable de enlaces químicos, impulsos nerviosos, tormentas, ...

- Fuerza fuerte: (hadrones: protones, neutrones, ...; corto alcance $\approx 10^{-15}$ m; la más fuerte)

Responsable de la estabilidad de los núcleos atómicos.

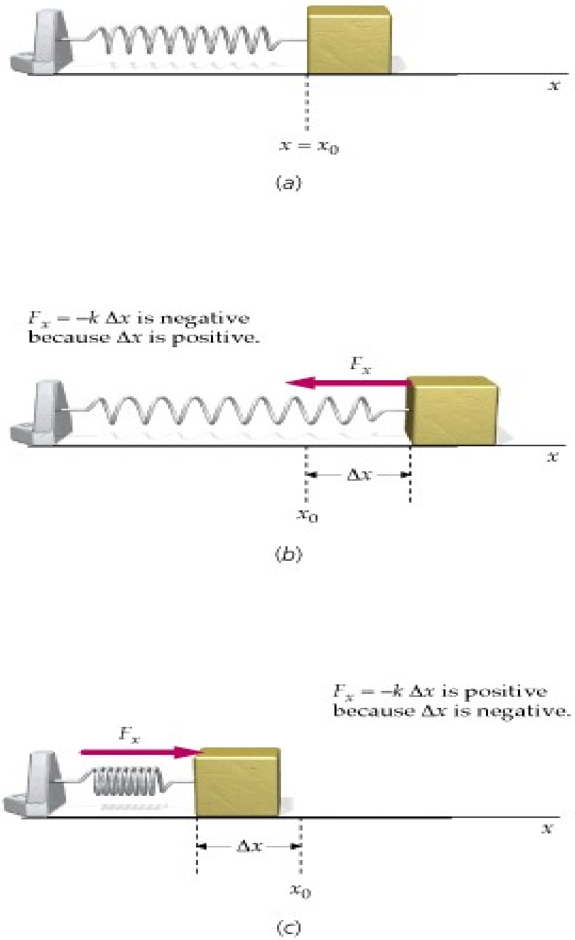
- Fuerza débil: (todas; corto alcance $\approx 10^{-18}$ m; más débil que la electromagnética)

Responsable de las desintegraciones radiactivas.

Fuerzas derivadas. Algunos ejemplos

Todas las demás fuerzas que conocemos se derivan de las fundamentales (casi siempre de la electromagnética).

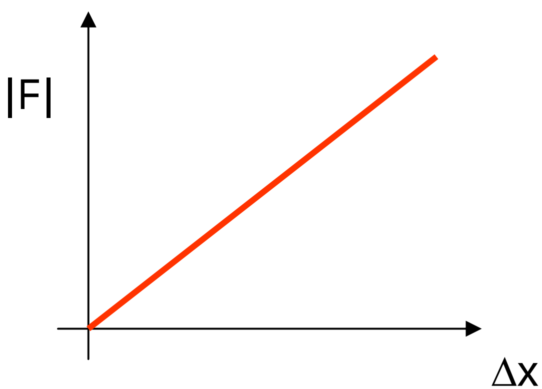
- Fuerza elástica: muelles y músculos



Cuando un muelle se estira o comprime una longitud Δx respecto a su posición de equilibrio, éste ejerce una fuerza dada por la ley de Hooke:

$$\boxed{\vec{F} = -k\, \Delta\vec{x}}$$

donde k depende del material y el signo menos indica fuerza de sentido contrario a deformación.

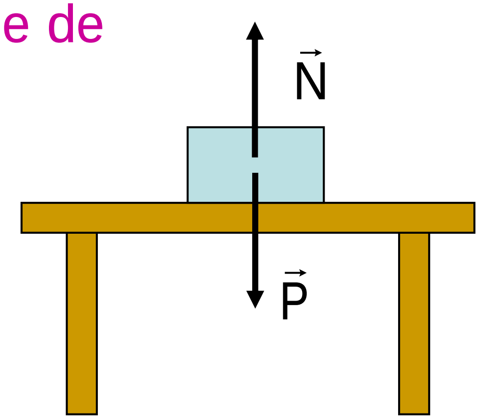


Origen de la fuerza elástica: reordenaciones moleculares.

Un músculo consta de muchas fibras. Cada una obedece la ley de Hooke para pequeños Δx.
Fuerza total proporcional a la sección del músculo.

- Fuerza normal o de contacto

Fuerza que ejerce un cuerpo sólido sobre otro con el que está en contacto, *perpendicular* a la superficie de contacto. Produce pequeñas deformaciones.



Ejemplo: bloque en equilibrio sobre una mesa

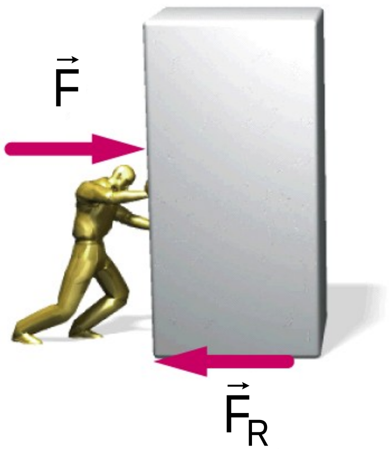
$$\vec{N} = -\vec{P}$$

Ambas fuerzas actúan sobre el bloque:
No confundir con una fuerza de reacción.

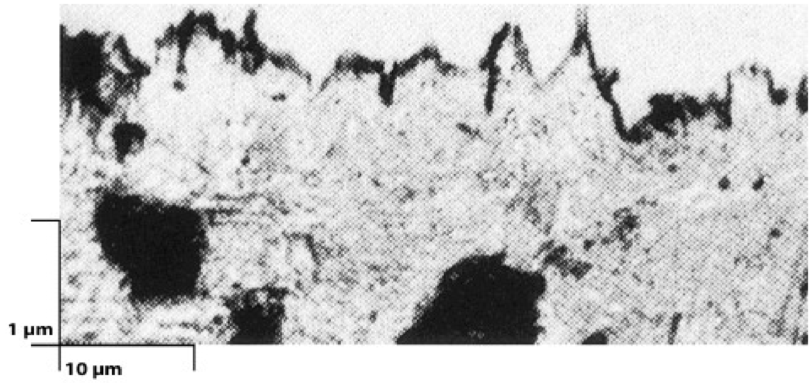
- Fuerza de rozamiento

Fuerza que ejerce un cuerpo sobre otro con el que está en contacto, *paralela* a la superficie de contacto.

Si hay movimiento relativo (rozamiento cinético), tiene sentido contrario al movimiento. Si no hay movimiento relativo (rozamiento estático), el sentido es contrario al movimiento inminente.



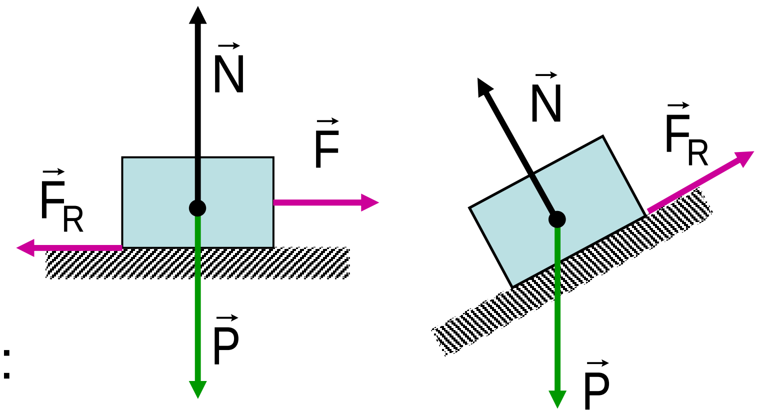
Se debe a la aspereza o rugosidad de las superficies en contacto.



Sección aumentada de una superficie de acero pulida que muestra las irregularidades superficiales

Cálculo del módulo F_R:

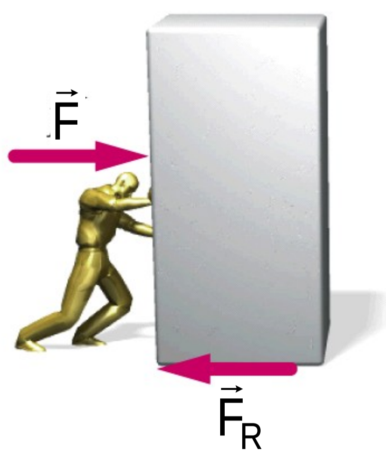
N = fuerza normal
μ = coeficiente de rozamiento
(depende de materiales en contacto)

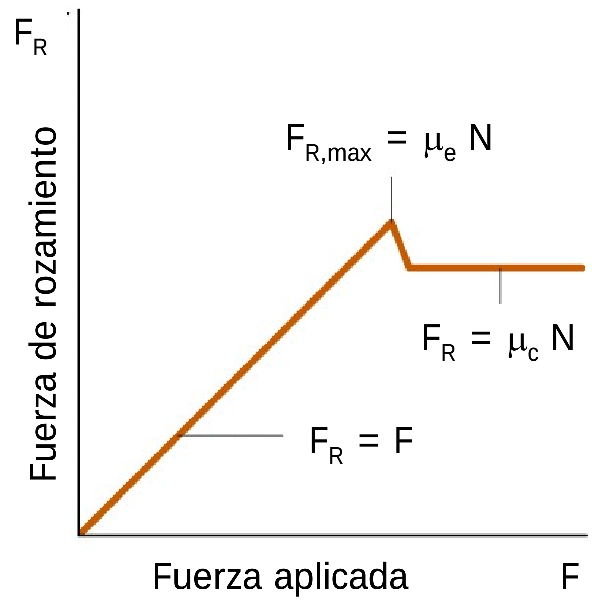


Dos tipos de coeficientes de rozamiento:

- estático μ_e:
  ⇨ $F_R = F =$ fuerza aplicada si $F < F_{R,max} \equiv \mu_e N$ (sin movto. relativo)
- cinético μ_c:
  ⇨ $F_R = \mu_c N =$ fuerza de rozamiento si hay movimiento relativo.

(generalmente $\mu_e > \mu_c$)

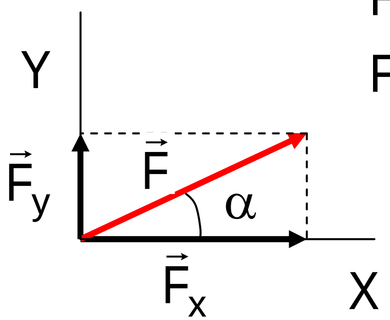




Componentes de una fuerza

Descomposición en fuerzas perpendiculares cuya suma vectorial es $\vec{F}$.

En el plano:



$$F_x = F\cos\alpha$$

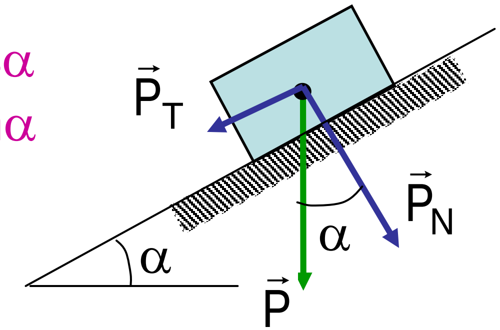
$$F_y = F\,\text{sen}\alpha$$

$$\alpha = \text{arc tan}\frac{F_y}{F_x}$$

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}$$

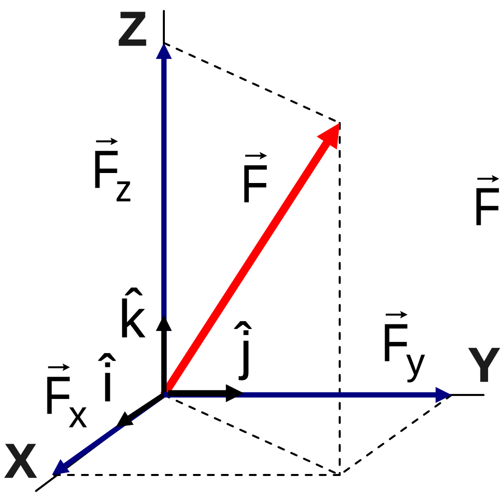
$$P_N = P\cos\alpha$$

$$P_T = P\,\text{sen}\alpha$$



P_T = componente tangencial del peso
P_N = componente normal del peso

En el espacio:



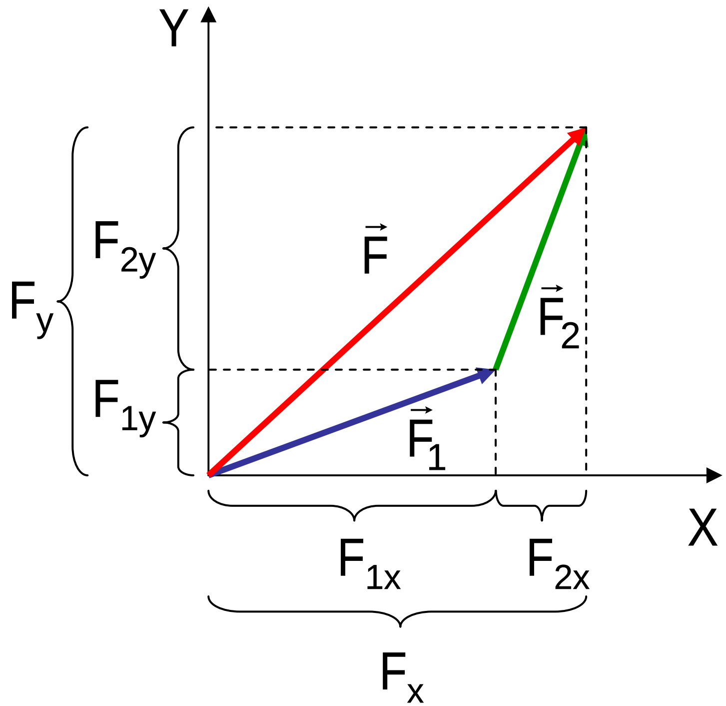
$$\vec{F} = \vec{F}_x + \vec{F}_y + \vec{F}_z = F_x\hat{i} + F_y\hat{j} + F_z\hat{k}$$

$$F = \left|\vec{F}\right| = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$$

$\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ vectores unitarios en la dirección de los ejes X, Y, Z

F_x, F_y, F_z = componentes cartesianas

Suma de vectores usando componentes



$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

$$F_x = F_{1x} + F_{2x}$$

$$F_y = F_{1y} + F_{2y}$$

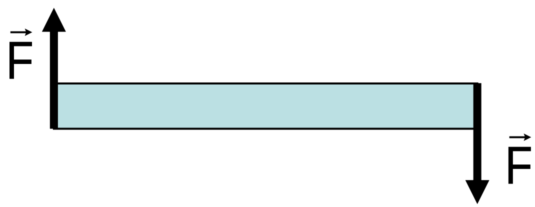
$$\vec{F}_1 = F_{1x}\,\hat{i} + F_{1y}\,\hat{j}$$

$$\vec{F}_2 = F_{2x}\,\hat{i} + F_{2y}\,\hat{j}$$

$$\vec{F} = F_x\,\hat{i} + F_y\,\hat{j} = (F_{1x} + F_{2x})\,\hat{i} + (F_{1y} + F_{2y})\,\hat{j}$$

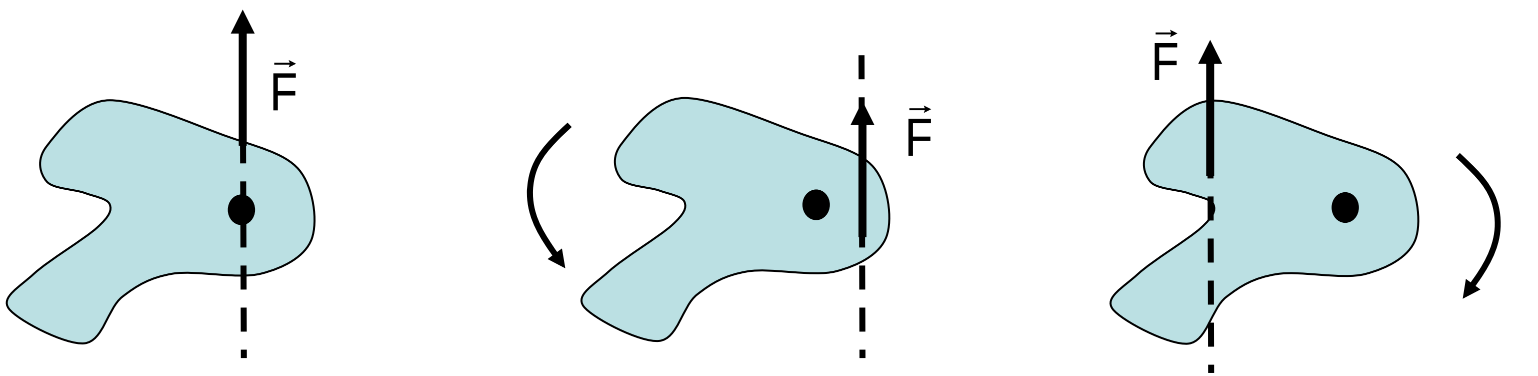
2.2 Momento de una fuerza

- A veces la fuerza resultante se anula (equilibrio traslacional) pero el cuerpo podría girar (no habría equilibrio rotacional):



(ambas fuerzas no aplicadas en mismo punto)

- Si hay un punto (eje) fijo •, el punto de aplicación de una fuerza importa cuando la línea de acción de la fuerza no pasa por el punto fijo:



No gira

Giro en sentido antihorario ⊙

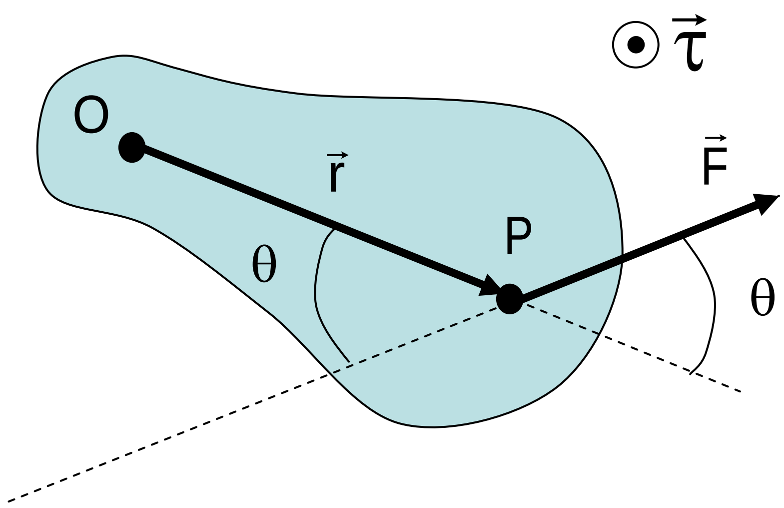
Giro en sentido horario ⊗

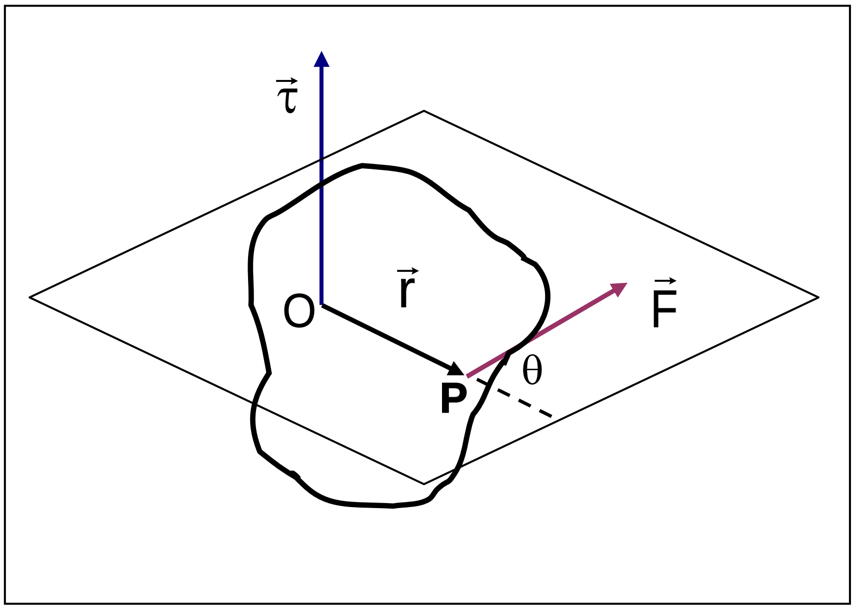
Debemos introducir un nuevo concepto: momento de una fuerza

(vector) $\boxed{\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}}$ cuyo módulo es $\boxed{\tau = |\vec{\tau}| = |\vec{r} \times \vec{F}| = r\,F\,\mathrm{sen}\theta}$

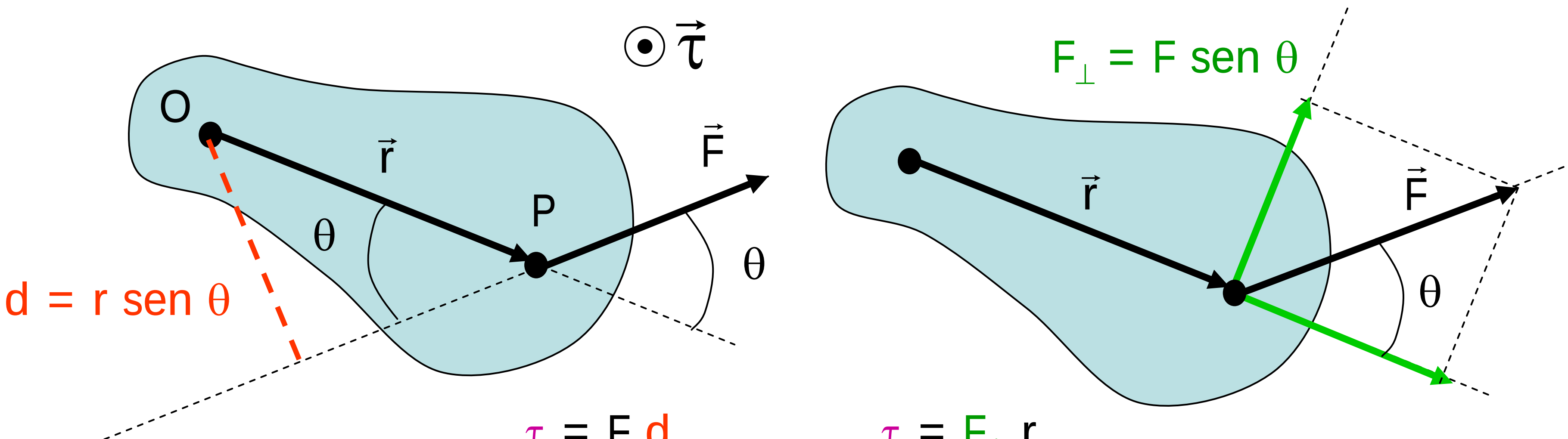
donde $\vec{r}$ es el vector del punto de giro O al de aplicación de la fuerza P, θ es el ángulo entre $\vec{r}$ y $\vec{F}$, cuya dirección es perpendicular al plano que forman y cuyo sentido viene dado por la *regla del sacacorchos* (*producto vectorial*).

Mide la capacidad de una fuerza para girar un cuerpo alrededor de un eje: no hay giro cuando $r = 0$ ó $\vec{r} \,||\, \vec{F}$ $(\theta = 0)$ y es máximo cuando $\vec{r} \perp \vec{F}$





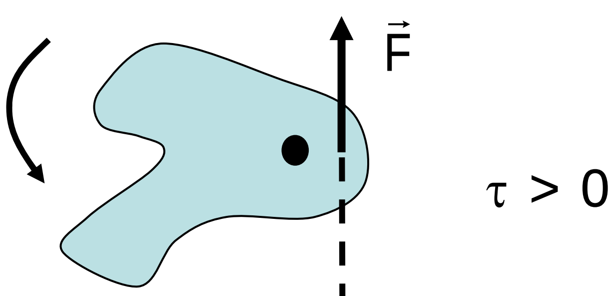
Módulo $\tau = r\,F\,\text{sen}\,\theta$



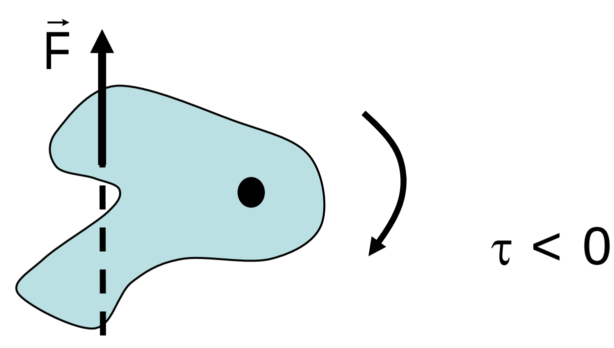
$\tau = F\,d$ $\tau = F_\perp\,r$

Brazo de palanca d: distancia mínima entre O y la línea de acción de F (perpendicular).

Sentido



Giro en sentido antihorario



Giro en sentido horario

Si actúan varias fuerzas sobre el objeto, el momento resultante es:

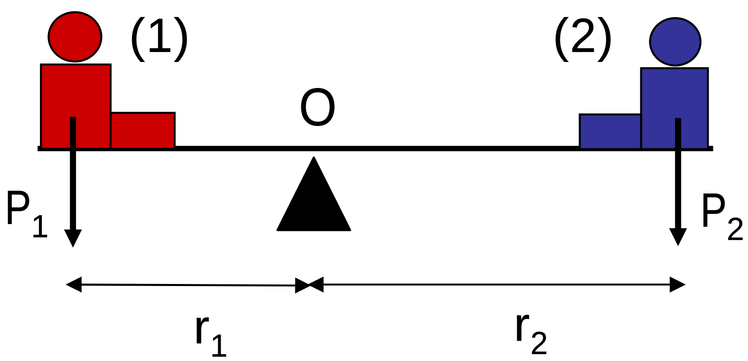
$$\boxed{\vec{\tau} = \sum \vec{\tau}_i}$$ (suma vectorial)

En el plano, el momento de una fuerza tiene dos sentidos. **Notación**:

⦿ antihorario : $\tau > 0$

⊗ horario : $\tau < 0$

Ejemplo: **balancín**



Tomamos momentos respecto a O:

$\tau_1 = P_1\, r_1$

$\tau_2 = -\, P_2\, r_2$

$\tau = \tau_1 + \tau_2 = P_1\, r_1 - P_2\, r_2$

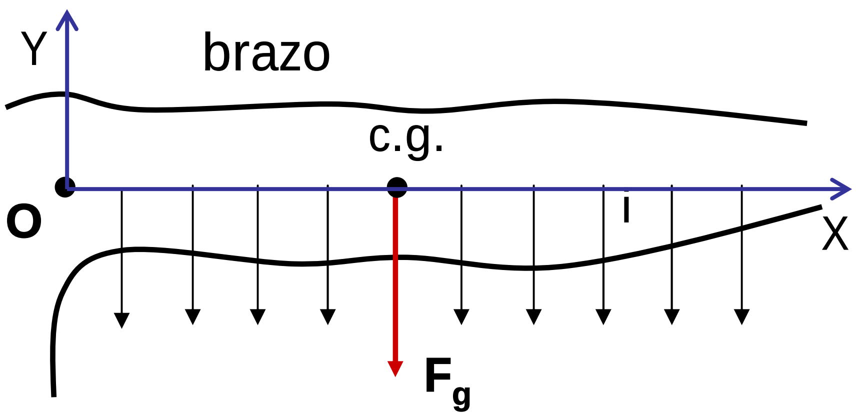
Datos: $m_1 = 35$ kg, $m_2 = 30$ kg, $r_1 = 1.2$ m, $r_2 = 1.8$ m

Mostrar que el resultado es $\tau = -117.6$ Nm, es decir sentido horario.

2.3 Centro de gravedad

Una fuerza que actúa siempre sobre los cuerpos es la de la gravedad.

Para un cuerpo extenso (no puntual) la resultante es la suma de muchas fuerzas paralelas que actúan en cada punto.



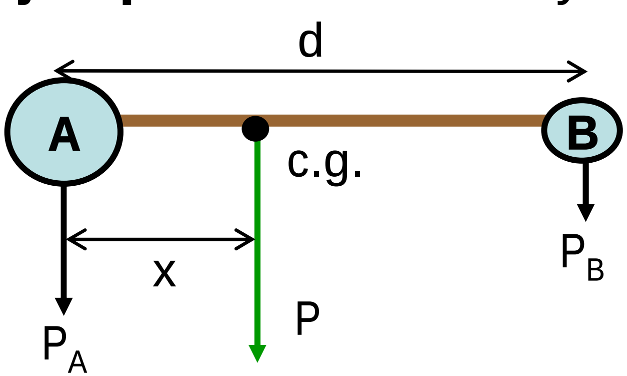
Podemos imaginar el peso total concentrado en un solo punto, el centro de gravedad, c.g.

Para ello: $Mg = \sum m_i g \Rightarrow M = \sum m_i$

y: $\vec{\tau} = \sum \vec{\tau}_i \Rightarrow MgX_{c.g.} = \sum m_i g x_i$

De donde: $\boxed{X_{c.g.} = \dfrac{\sum m_i x_i}{M}}$ y análogamente: $\boxed{Y_{c.g.} = \dfrac{\sum m_i y_i}{M}}$

Ejemplo: Dos masas A y B conectadas por una barra de masa despreciable.



Tomemos A como origen. Entonces:

$$X_{c.g.} = x = \frac{m_A 0 + m_B d}{m_A + m_B} = \frac{m_B}{m_A + m_B} d$$

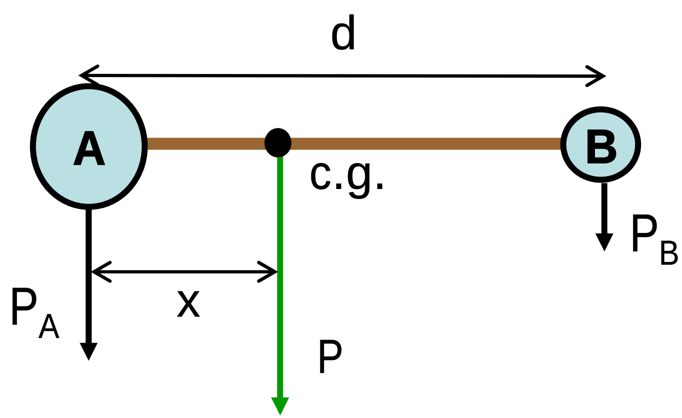
Comprobar que sale igual tomando momentos:

$P\,x = P_B\,d$ siendo $P = P_A + P_B$

Propiedades del centro de gravedad:

1. La fuerza de la gravedad produce un momento nulo respecto al c.g.

(evidente: P está *aplicada* en el c.g.)

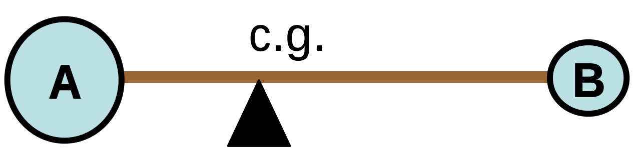


$$P_A\, x - P_B\,(d\text{-}x) = 0$$

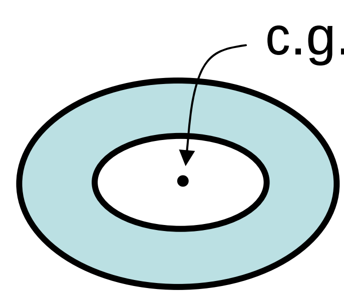
Compruébese usando que:

$$x = \frac{P_B}{P_A + P_B}\, d$$

2. El c.g. de un objeto rígido es su punto de equilibrio.



3. En un objeto rígido, el c.g. es un punto fijo respecto al objeto, pero no necesariamente localizado en él.

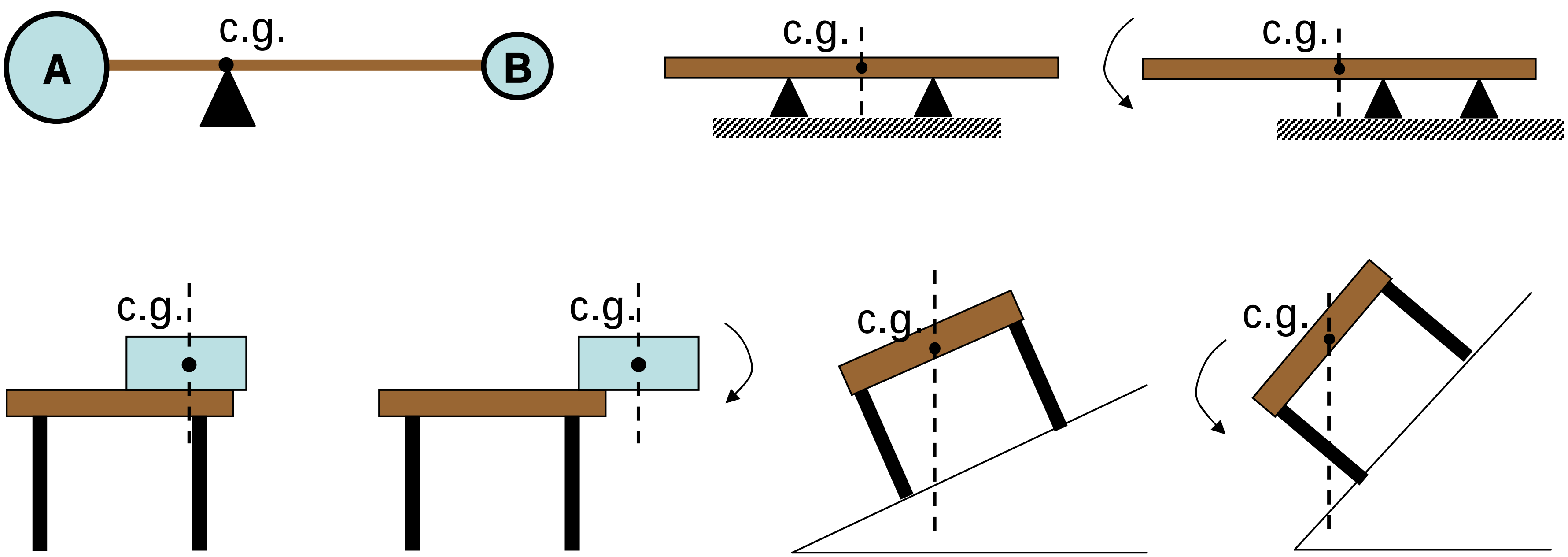


4. En un objeto flexible (cuerpo de un animal), el c.g. varía cuando cambia de posición: muy importante para caminar, saltar, etc.

2.4 Equilibrio

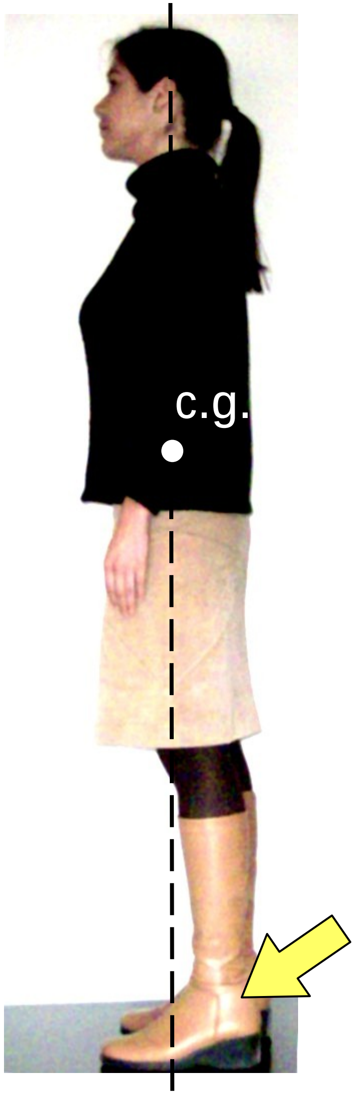
Condiciones de equilibrio (traslacional y rotacional): $\boxed{\sum \vec{F}_i = 0 \quad y \quad \sum \vec{\tau}_i = 0}$

Consecuencia: un objeto en contacto con una superficie sólida está en equilibrio mientras la vertical de su c.g. pase por la superficie de apoyo.

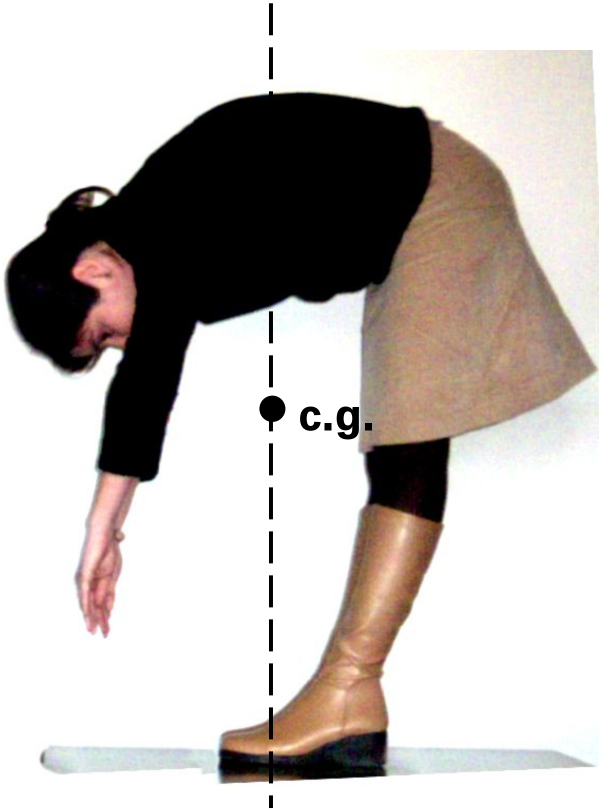


(sin deslizamiento)

En el cuerpo humano la superficie de apoyo viene definida por la posición de ambos pies.

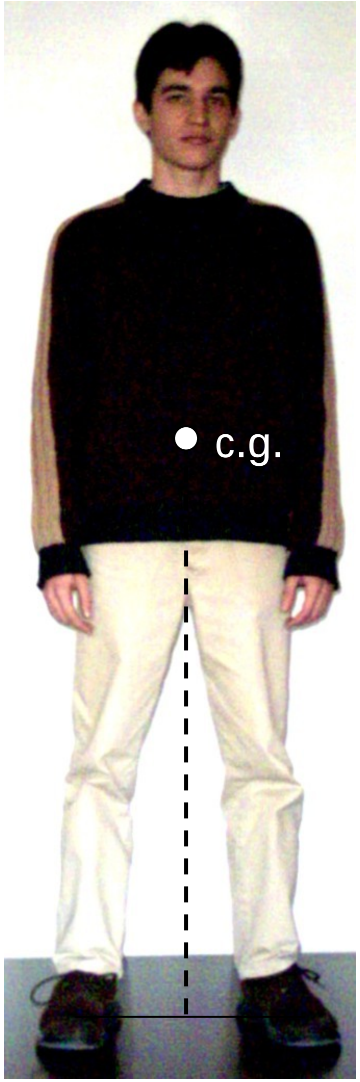


Al inclinar el tronco hacia delante el c.g. tiende a caer fuera del área de apoyo. Para evitarlo las piernas se desplazan hacia atrás para mantenerlo sobre los pies.

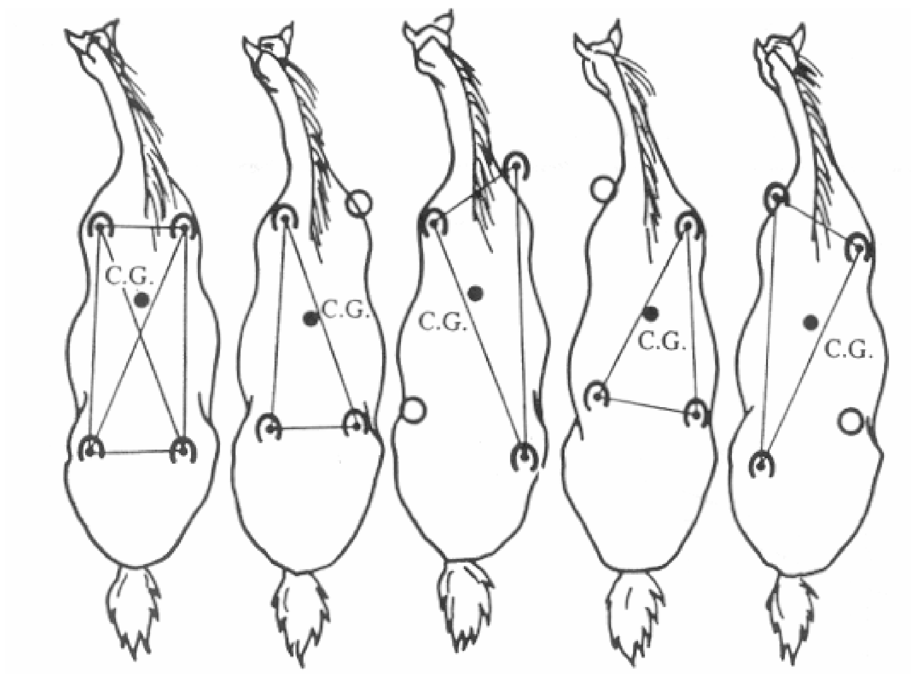


Incluso estando parados se necesitan los músculos. El c.g. pasa 3 cm delante de la articulación del tobillo: el tendón de Aquiles evita que el cuerpo rote hacia delante.

Al levantar un pie (o caminar) se inclina el cuerpo hacia un lado desplazando el c.g. sobre el pie de apoyo.



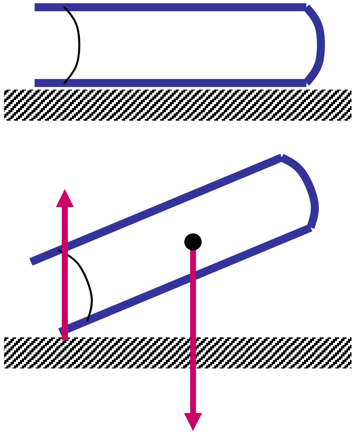
Los animales cuadrúpedos al caminar mantienen tres patas apoyadas en el suelo, desplazando el cuerpo de modo que el c.g. permanezca siempre sobre el triángulo que forman los tres apoyos.



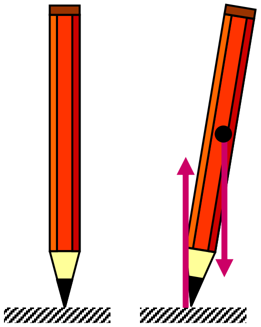
Estabilidad y equilibrio:

Cuando se aparta ligeramente un cuerpo de su posición de equilibrio, actúan fuerzas cuyos momentos pueden hacer que:

- El cuerpo vuelva a su posición de equilibrio (equilibrio estable), o bien
- Se aleje de su posición de equilibrio (equilibrio inestable)



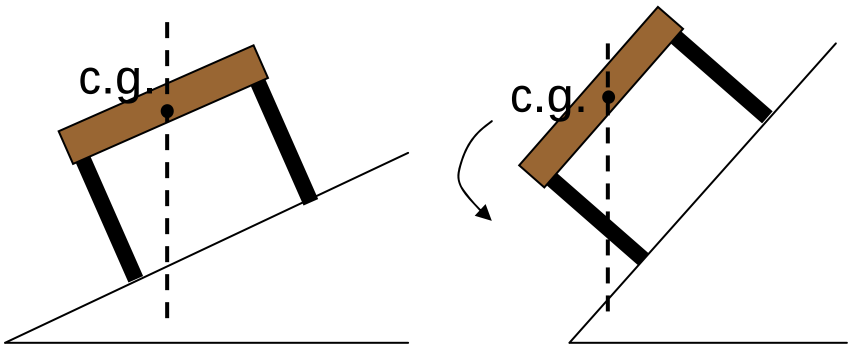
equilibrio estable



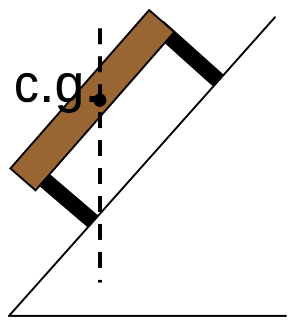
equilibrio inestable

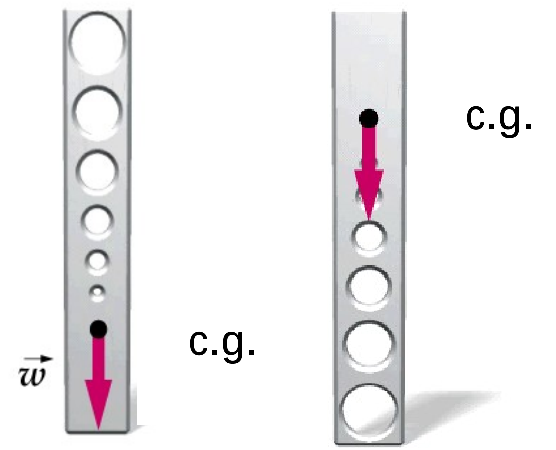
Factores que influyen en la estabilidad:

- Posición del centro de gravedad:



Una mesa baja es
más estable





más estable   menos estable

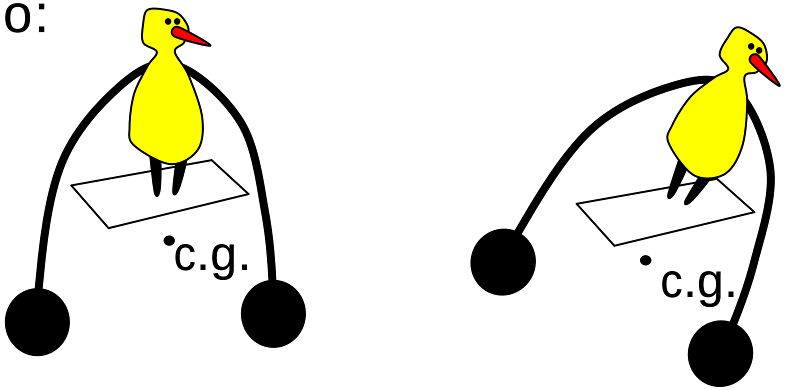
Mejor si el c.g. es bajo

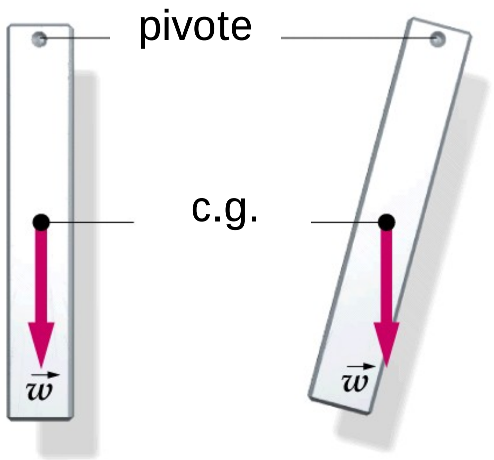
- Tamaño del área de sustentación: mejor si el área es grande.
  Los animales cuadrúpedos son más estables que los bípedos.

Los animales de patas cortas están mejor adaptados para vivir en terrenos escarpados o en las ramas de los árboles (ej. las ardillas).

Nótese que si el centro de gravedad está por debajo del punto de apoyo el sistema es estable para cualquier desplazamiento

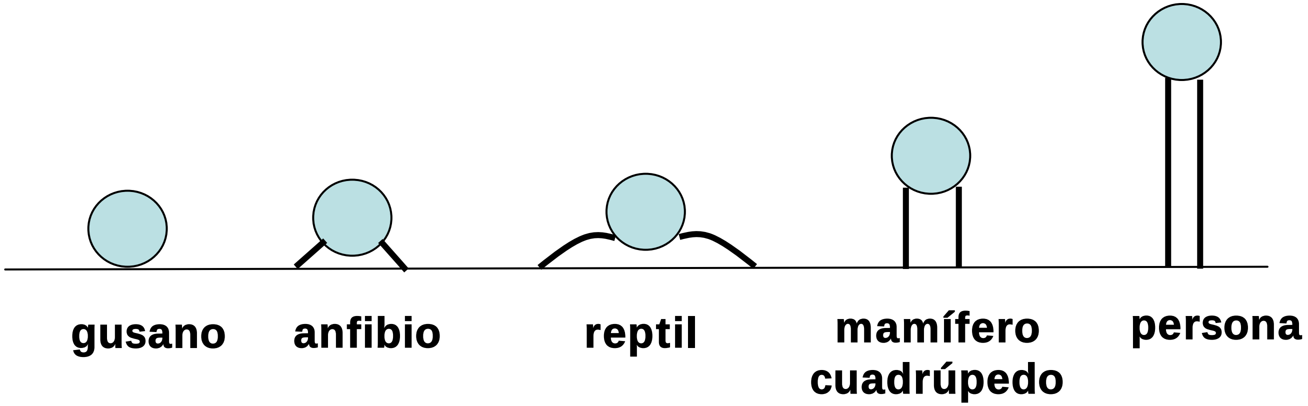
Ejemplo:





equilibrio estable
para cualquier desplazamiento

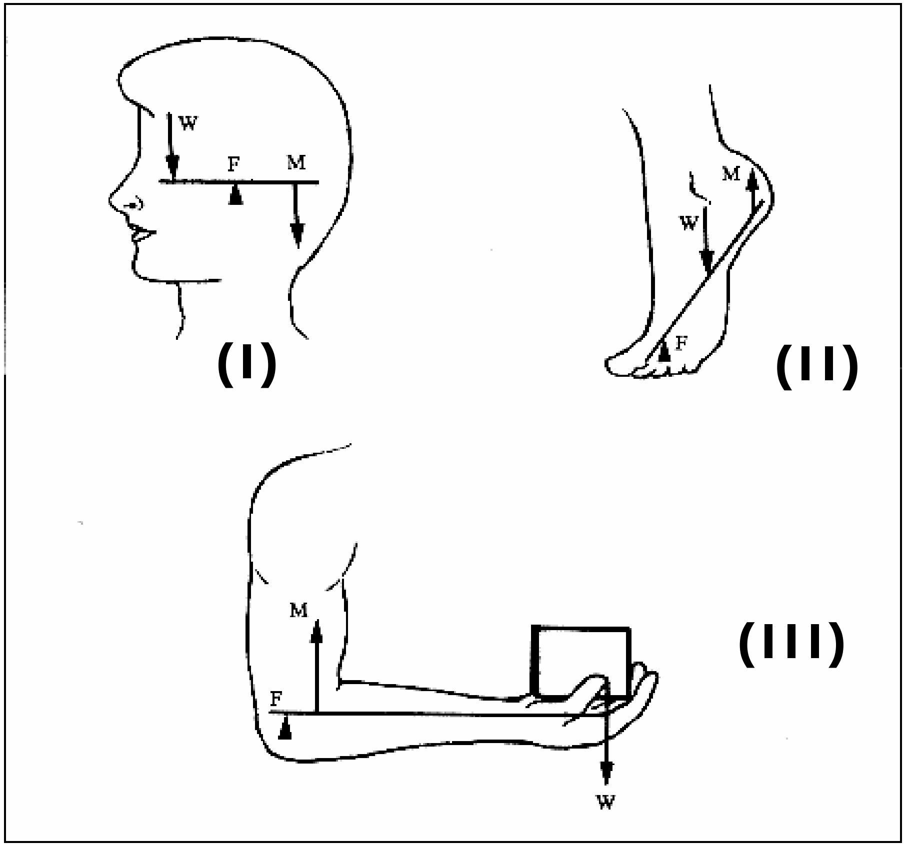
A lo largo de la evolución se ha sacrificado estabilidad a costa de mayor movilidad, gracias a un control neuromuscular cada vez más complejo (un niño necesita un año para desarrollar el control necesario).



2.5 Fuerzas en músculos y articulaciones

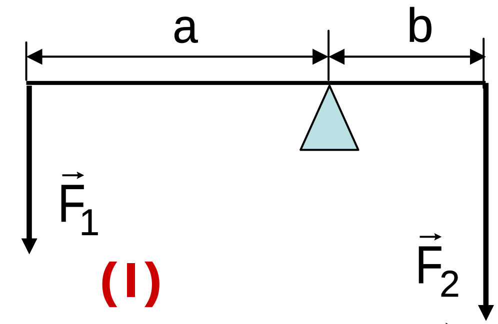
Las condiciones de equilibrio pueden utilizarse para calcular las fuerzas a que están sometidas distintas partes del cuerpo.

En los cuerpos de los animales se encuentran muchos ejemplos de palancas. Los músculos proporcionan las fuerzas necesarias para el uso de dichas palancas.



Palancas

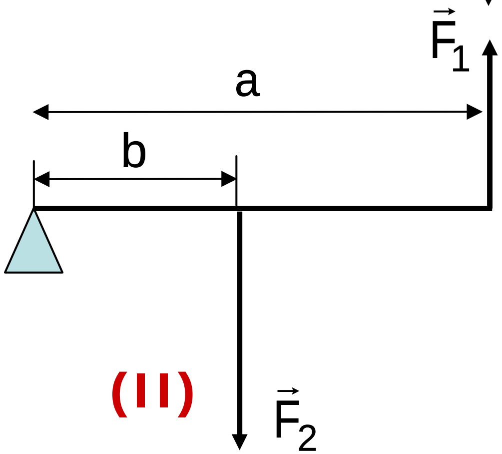
Equilibrio: $F_1\, a = F_2\, b$ F_1 = fuerza aplicada, F_2 = peso



(I) Primer género (balancín):

El punto de apoyo está entre el peso y la fuerza aplicada

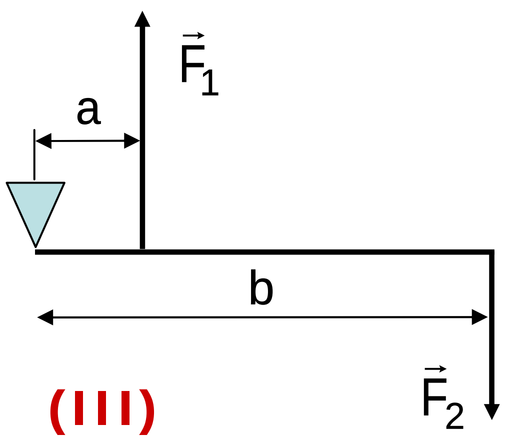
si $a > b \Rightarrow F_1 < F_2$



(II) Segundo género (carretilla):

El peso está entre el punto de apoyo y la fuerza aplicada

siempre $a > b \Rightarrow F_1 < F_2$



(III) Tercer género:

La fuerza aplicada está entre el punto de apoyo y el peso

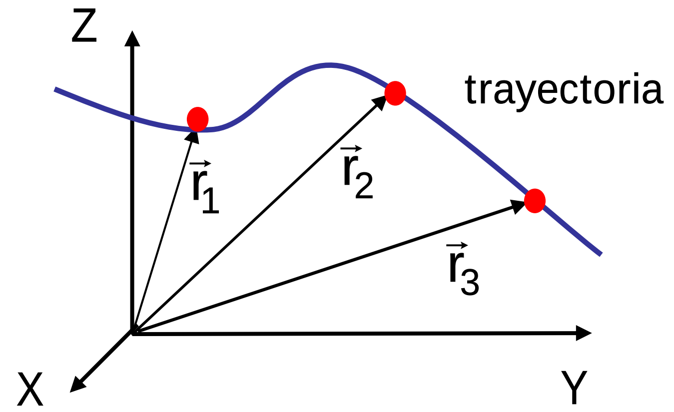
$a < b \Rightarrow F_1 > F_2$

2.6 Descripción del movimiento. Leyes de Newton

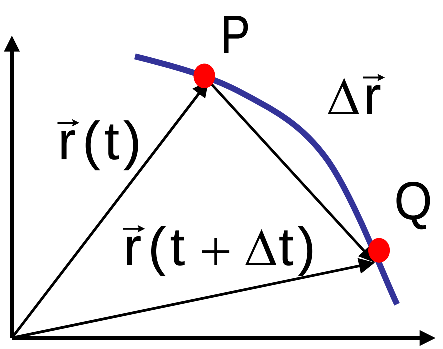
Cinemática

- Vector de posición: $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$

  Descripción del movimiento: $\vec{r}(t)$



- Velocidad:



Desplazamiento: $\Delta\vec{r} = \overrightarrow{PQ}$

Velocidad media: $\vec{v}_m = \dfrac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$

Velocidad instantánea: $\boxed{\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \dfrac{d\vec{r}}{dt}}$

- Aceleración: $\boxed{\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \dfrac{d\vec{v}}{dt}}$

Si la velocidad cambia en módulo y/o en dirección hay aceleración.

Conocida $\vec{r}(t)$ se obtienen $\vec{v}$ y $\vec{a}$ derivando.
Análogamente, conocida $\vec{a}$ se obtienen $\vec{v}$ y $\vec{r}$ integrando.

Aceleración constante en una dimensión (ej. gravedad)

$$\left.\begin{array}{r} a = \dfrac{dv}{dt} \Rightarrow dv = a\,dt \Rightarrow v = \int a\,dt = a\,t + C \\ t = 0 \Rightarrow v = C \equiv v_0 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{v = v_0 + a\,t}$$

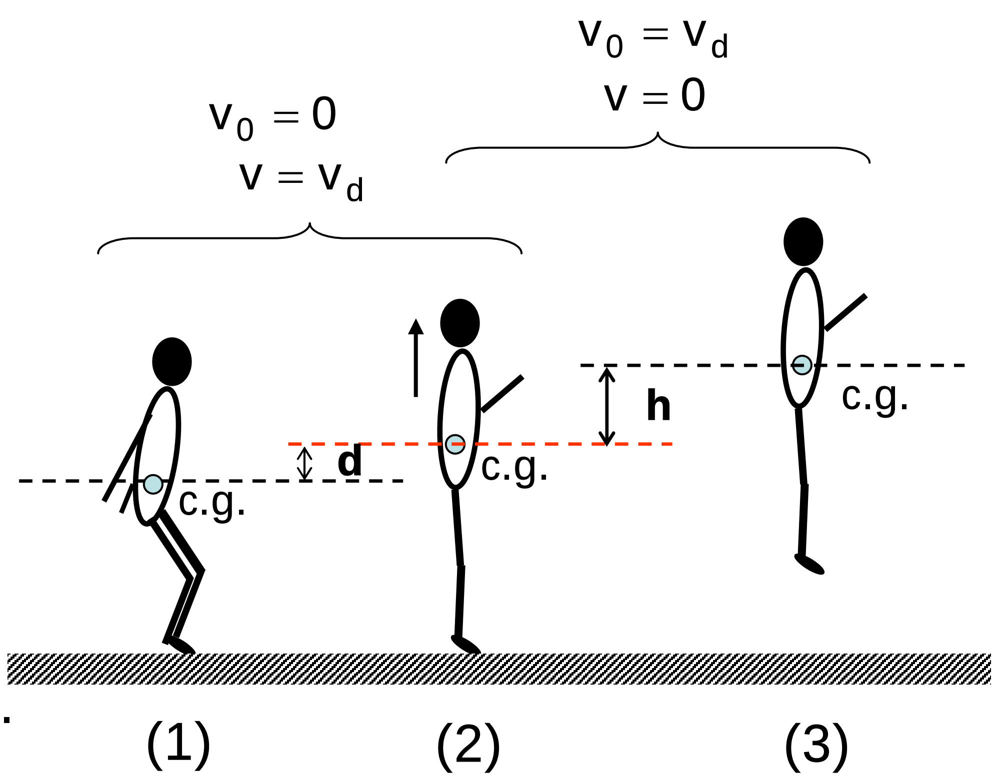
$$\left.\begin{array}{r} v = \dfrac{dr}{dt} \Rightarrow dr = v\,dt \Rightarrow r = \int v\,dt = \int (v_0 + at)\,dt = v_0 t + \frac{1}{2}at^2 + C \\ t = 0 \Rightarrow r = C \equiv r_0 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{r = r_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{v^2 = v_0^2 + 2\,a\,(r - r_0)}$$

Movimiento rectilíneo y uniforme (a = 0)

velocidad constante: $\boxed{v = v_0}$ $\boxed{r = r_0 + v\,t}$

Salto vertical



1→2: Actúan varias fuerzas (aceleración a ↑)

2→3: Actúa sólo la gravedad (aceleración g ↓)

La velocidad de despegue v_d está relacionada con la longitud de las patas y la fuerza muscular.

	distancias de aceleración d (m)	máxima altura h (m)
Seres humanos	0.5	1.0
Canguro	1.0	2.7
Lemur (mono)	0.16	2.2
Rana	0.09	0.3
Langosta	0.03	0.3
Pulga	0.0008	0.1

Hallar la aceleración a (suponiéndola constante) y v_d de diversos animales:

$$v_d = \sqrt{2gh}$$

$$a = \frac{v_d^2}{2d}$$

Leyes de Newton (dinámica)

1ª ley de Newton: Todo objeto permanece en estado de reposo o de movimiento rectilíneo y uniforme, a no ser que sobre él actúen fuerzas que le hagan cambiar dicho estado.

2ª ley de Newton: Un objeto sobre el que actúa una fuerza adquiere una aceleración en la dirección de la fuerza. El módulo de la aceleración es el módulo de la fuerza partido por la masa del objeto (propiedad intrínseca).

$$\vec{a} = \vec{F} / m \Rightarrow \boxed{\vec{F} = m\,\vec{a}}$$

3ª ley de Newton : La fuerza ejercida por un cuerpo sobre otro (acción) es siempre igual y de sentido contrario a la ejercida por el segundo sobre el primero (reacción).