MATEMÁTICAS EMPRESARIALES I. Grupos 1º A y 1º B
(L.A.D.E.–Derecho. CURSO 2008/09)
Relación de Ejercicios $N^{\underline{o}}$ 5

Funciones de una variable: Derivabilidad y aplicaciones

1. Calcula y simplifica las derivadas de las siguientes funciones reales de una variable:

a) $f(x) = 3x^4 - 7x^3 + 6x^2 + 10$, b) $f(x) = 5x^2(2x-3)$, c) $f(x) = (1-x^2)(3x^2+4)$,

d) $f(x) = \dfrac{5}{x-7}$, e) $f(x) = \dfrac{4-x^2}{1+2x}$, f) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}-2}{3x}$,

g) $f(x) = x\sqrt{2+3x^2}$, h) $f(x) = \dfrac{x-2}{\sqrt{5+x}}$, i) $f(x) = \dfrac{1}{2x} + x^{1/3} - \sqrt{3x}$,

j) $f(x) = \cos(x-2) - \cos(3x^2)$, k) $f(x) = (3 + 2sen(x/4))^5$, l) $f(x) = e^{2x^2-4x}$,

m) $f(x) = 3^{(x^2-x+\cos(x))}$, n) $f(x) = (x^2+2)\, e^{2x-1}$, o) $f(x) = Ln(x^4+4x^2)$.

2. Calcula, cuando existan, los siguientes límites:

a) $\displaystyle\lim_{x\to 5^+} \frac{x-5}{x^2-25}$ *b)* $\displaystyle\lim_{x\to 0} (\cos^2(x))^{\frac{-2}{sen^2(x)}}$ *c)* $\displaystyle\lim_{x\to 2^+} \frac{x}{\sqrt{x^2-4}}$

d) $\displaystyle\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4}$ *e)* $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{3x^2+2x+5}{x^3+2x^2+7x-5}$ *f)* $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{x^3+3x^2-9x-2}{x^3-x-6}$

g) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2}$ *h)* $\displaystyle\lim_{x\to 3} \begin{cases} (x+2)/2 & x \le 3 \\ (12-2x)/3 & x > 3 \end{cases}$ *i)* $\displaystyle\lim_{x\to 1} \begin{cases} \frac{sen(x^2-1)}{x-1} & x < 1 \\ 2 & x > 1 \end{cases}$

j) $\displaystyle\lim_{x\to -1} \frac{1+\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt[5]{x}}$ *k)* $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{2x-2}{\sqrt[3]{26+x}-3}$ *l)* $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2+7x^4}}{\log(1+x)}$

m) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}$ *n)* $\displaystyle\lim_{x\to 3} \frac{x^2-3x}{3x^2-2x-3}$ *ñ)* $\displaystyle\lim_{x\to 0} (\frac{1}{x} - \frac{2x+1}{x})$

o) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(\frac{1+(x)}{1+sen(x)}\right)^{1/sen(x)}$ *p)* $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1/(x+a)-1/a}{x}$ *q)* $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \sqrt{\frac{3x^3}{sen(x)+16x^{69}}}$

r) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x-sen(x)}{x^2-x}$ *s)* $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{7x} - \frac{1}{sen(7x)}\right)$ *t)* $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{sen(x)\cos(x)}{sen(2x)}$

3. Estudia la continuidad y derivabilidad de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \begin{cases} x^3-3x+1, & si \quad 0 \le x \le 2, \\ |x-5| & si \quad 2 < x \le 8, \\ e^x + x & si \quad 8 < x \le 10. \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x+2}, & si \quad -1 \le x < 0, \\ sen(x) & si \quad 0 \le x < 3, \\ e^x + x & si \quad 3 \le x. \end{cases}$

4. Determina los valores de a y b, para que la siguiente función sea derivable en su dominio:

$$f(x) = \begin{cases} 3\,a\,x^2 - 2x, & si \quad x \leq 2, \\ -x^2 + b\,x - 1 & si \quad 2 < x. \end{cases}$$

5. Estudia el crecimiento/decrecimiento y la concavidad/convexidad de las siguientes funciones en el dominio especificado en cada caso. A partir de este estudio, halla los extremos locales de dichas funciones.

   a) $f(x) = -x^3 + x + 1$ en $\mathbb{R}$, b) $f(x) = 2x^3 + \frac{15}{2}x^2 - 9x + 3$ en $\mathbb{R}$,

   c) $f(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x-1}$, en $(0,1)$, d) $f(x) = x\,e^{-x}$, en $\mathbb{R}$.

6. Calcula, cuando existan, los extremos globales de las siguientes funciones:

$$\begin{array}{lll} f: \ [-4,1] \to \mathbb{R} & g: \ [-3,3] \to \mathbb{R} & h: \ [-1,0] \to \mathbb{R} \\ \quad f(x) = 2x^3 + \frac{15}{2}x^2 - 9x + 3 & \quad g(x) = \sqrt{9-x^2} & \quad h(x) = x^2 + 2x - 2 \end{array}$$

7. Para la función $f(x) = (1+3x)\sqrt{x+5}$ estudia:

   a) dominio maximal, b) continuidad, c) derivabilidad, d) puntos críticos.

8. Determina el polinomio de Taylor de orden uno de la función $f(x) = e^{-2x}$ en el punto cero y úsalo para aproximar el valor de $e^{-0.02}$.

9. Una empresa vende mensualmente un producto con función de demanda $p = D(q) = 3800 - 16q$. La estructura de costes mensuales al producir q unidades del producto es: coste fijo $C_0 = k$; costes por mano de obra $= q^2 + 150q$; costes de materia prima $= 250q$. Suponiendo que, en el mes considerado, la empresa vende todo cuanto produce, calcula:

   a) La función de coste, sabiendo que al producir 150 unidades, el coste es de 90.000 euros;

   b) El número de unidades que se han de vender para maximizar el beneficio de la empresa, cuál es ese beneficio y a qué precio se han vendido.

10. Consideramos una empresa que elabora un producto con función de ingreso $I(q) = 10q - 2q^2$ y función de coste $C(q) = q^2 + 2q + 7/3$, ambos medidos en miles de euros mientras que q está medido en docenas de unidades.

    a) Calcula la función de demanda y verifica que es decreciente.

    b) Calcula las marginales y los incrementales del coste, el beneficio y el ingreso.

    c) Comprueba que la elasticidad es (-1) en el punto en que el ingreso marginal es nulo.

    c) Determina el número de unidades mínimo que hay que vender para que el beneficio comience a ser positivo.

11. Se tiene una empresa con función de beneficio diario $B(q) = -\frac{1}{3}q^3 + \frac{15}{2}q^2 + 250q - 100$. Si la maquinaria de la empresa sólo puede fabricar 30 unidades del producto al día, ¿cuál es el nivel de producción que maximiza el beneficio?

12. Sea $p = D(q) = 7(30-q)/(30+q)$ la función de demanda de un bien. Halla la función elasticidad, calcula la elasticidad para un precio de 4 euros e interpreta el resultado.