MATEMÁTICAS EMPRESARIALES I. Grupos 1º A y 1º B
(L.A.D.E.–Derecho. CURSO 2008/09)
Relación de Ejercicios $N^{\underline{o}}$ 4

Funciones de una variable: continuidad y aplicaciones

1. Sean las siguientes funciones reales de una variable:

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad g : \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$$

definidas como $f(x) = x^4 - 3x^2 - 4$ y $g(x) = \dfrac{x-1}{3x^2}$. Calcula el dominio y la expresión de las funciones: $f+g$, $g \circ f$, $-\frac{3}{2}f$ y f/g.

2. Determina el dominio de las funciones siguientes:

a) $f(x) = \dfrac{2x^2 - 3x + 1}{x - 10}$, *b*) $g(t) = e^t\sqrt{4t^2 - 4t}$, *c*) $h(z) = \sqrt{\dfrac{z}{e^z - 1}}$, *d*) $j(x) = Ln(\dfrac{x-2}{x+1})$.

3. Estudia la continuidad de las siguientes funciones:

a) $f_1(x) = \begin{cases} 2x, & x \leq 2, \\ x^3 - 4, & x > 2. \end{cases}$ b) $f_2(x) = \dfrac{-x^2}{1 + |x|}$, c) $f_3(x) = \dfrac{3x^2}{|x-2|}$,

d) $f_4(x) = \begin{cases} \dfrac{x+4}{x+1}, & 0 \leq x \leq 2, \\ Ln(x-1) + 2, & 2 < x \leq 5. \end{cases}$ e) $f_5(x) = \begin{cases} \dfrac{5}{x+2}, & 1 \leq x < 3, \\ e^{(3-x)}, & 3 \leq x < 5, \\ \dfrac{3}{e^2}, & 5 \leq x \leq 7. \end{cases}$

4. Dada $f : \quad (-1, 1) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida como:

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 - x + 3, & -1 < x < 0, \\ a, & x = 0, \\ \dfrac{x+3}{1+x}, & 0 < x < 1, \end{cases} \qquad \text{donde} \qquad a \in \mathbb{R}.$$

a) Prueba que existe el límite de la función f en cero.
b) Encuentra el valor de a para que la función f sea continua en cero.

5. Se considera la función f definida como:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - ax + 2, & x \leq 1, \\ x - 1, & x > 1, \end{cases} \qquad \text{con} \quad a \in \mathbb{R}.$$

Determina los valores de a para los cuales la anterior función es continua en todo $\mathbb{R}$.

6. Prueba que la ecuación $x^6 - 3x^3 + 2x^2 - 4x + 2 = 0$, tiene una solución positiva y menor a 1.

7. Demuestra que la ecuación $2^x + x = 0$, tiene una solución real en el intervalo $[-1, 0]$.

8. Determina los valores del número real k para los cuales se puede aplicar el Teorema de Bolzano a la función $p(x) = 2x^3 - 4x + k$, en el intervalo $[-1, 1]$.

9. Prueba que la función:

$$f(x) = \begin{cases} x - 2, & 0 < x \leq 3, \\ -2, & x > 3, \end{cases}$$

alcanza un máximo y un mínimo. Comprueba que, sin embargo, no se verifica ninguna de las condiciones del teorema de Weierstrass.

10. El coste total de producir x unidades de un cierto bien es una función lineal. En una ocasión, se hicieron 100 unidades a un coste total de 250 euros y, en otra, se hicieron 150 unidades por 325 euros. Halla la función lineal de coste total en términos del número x de unidades producidas.

11. Se supone que la demanda por semana de un cierto producto es de 100 unidades cuando el precio es de 58 euros por unidad, y de 200 unidades si son 51 euros cada una. Halla la función de demanda suponiendo que es lineal.

12. Determina la función de coste medio $CM(q)$, donde q representa el número de unidades producidas, sabiendo que el coste variable es $CV(q) = 2q + q^2$ y el coste fijo de 300 euros.

13. Consideramos una empresa con función de demanda $D(q) = q^2 - 4$ y de costes medios $CM(q) = 3q^2 - 7q$. Hallar la función de beneficio.

14. Sea $D(q) = \dfrac{2}{q+2} + \dfrac{q}{4}$ la función de demanda de un cierto producto q. Halla la expresión de la función de ingreso $I(q)$.

15. Se sabe que el coste total de producir un cierto bien viene determinado por la función $C(q) = 3q + 100$, donde q representa el número de unidades producidas. Además el ingreso total es $I(q) = q^2 + 3q$. Halla la función de beneficio.

16. Se considera una empresa con función de demanda $D(q) = -\dfrac{1}{180}q + 12$ y función de oferta $O(q) = \dfrac{1}{300}q + 8$, donde q representa el número de unidades de producto. Calcula el precio de equilibrio.

17. Sean las funciones de demanda y de oferta de un bien: $q = D(p) = 100 - bp$, $q = O(p) = -20 + cp$, con $b, c > 0$. Halla el precio de equilibrio. Descubre como varía el precio de equilibrio al variar c.

18. La cantidad de impuestos a pagar, I, por una persona es: el 20 por ciento de su renta R si ésta no supera el millón de u.m.; 150.000 u.m. más el 30 por ciento de lo que exceda de un millón hasta los 3 millones y 700.000 u.m. más el 40 por ciento de lo que exceda de 3 millones si supera los 3 millones de u.m. Halla la expresión matemática de $I = f(R)$. Dibuja su gráfica y estudia si es una función continua.

19. (dic-06) Estudia la continuidad de la siguiente función real de variable real sobre su dominio:

$$f(x) = \begin{cases} 3 + 2x - x^2 & si \quad x \leq 2 \\ \dfrac{1+x}{3-x} & si \quad x > 2 \end{cases}$$

20. (dic-06) Una tienda vende al mes, a un precio de 50 euros, un total de 40 pantalones, y su dueño cree que sus ventas se duplicarán si baja el precio 8 euros. Para que los pantalones lleguen a la tienda, el dueño ha de pagar a su proveedor 20 euros por cada pantalón y al transportista 40 euros por los portes más el 30% de lo que le cuestan los pantalones. Suponiendo que la función de demanda es lineal, determina la función de demanda, coste, y beneficio.

21. (sept-07) Elige la opción que completa la frase de forma correcta.
Para que dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ con límite finito en $x = b$ verifiquen: $\lim_{x \to b} f(x) = \lim_{x \to b} g(x)$

   - ☐ es preciso que el punto límite en $x = b$ de la diferencia entre f y g sea 0.
   - ☐ ambas funciones han de estar definidas en el punto $x = b$.
   - ☐ ambas funciones han de ser continuas en el punto $x = b$.
   - ☐ ninguna de las anteriores afirmaciones es cierta (en general).

22. (sept-07) Calcula a y b para que la siguiente función sea continua en todo $\mathbb{R}$.

$$f(x) = \begin{cases} 1 & si \quad x < 0, \\ ax + b & si \quad 0 \leq x < 1, \\ x^2 + 2x + 2 & si \quad x \geq 1. \end{cases}$$