PARADOJAS MATEMÁTICAS PARA LA FORMACIÓN DE PROFESORES
MATHEMATICAL PARADOXES FOR TEACHERS EDUCATION

Pablo Flores Martínez

Departamento de Didáctica de la Matemática
Campus Universitario de Cartuja
Universidad de Granada

Tfno: 958 242845

e-mail: pflores@platon.ugr.es

SAEM THALES

Resumen

La actual reforma de la enseñanza de las Matemáticas propone cambiar la idea de que el profesor es un agente que transmite un conocimiento cultural único y preestablecido. Para que el profesor se sienta partícipe de este cambio tiene él mismo que afrontar un cambio actitudinal en relación al conocimiento matemático, y en relación a la enseñanza. En este artículo proponemos el empleo de paradojas matemáticas para provocar conflictos cognitivos en el sujeto, de manera que se vea abocado a revisar de manera crítica sus concepciones y a adoptar nuevas soluciones. Presentamos una secuencia para emplear en la formación de profesores basada en una paradoja y el análisis de la paradoja desde diversos campos de la matemática.

Abstract

The current reform in mathematics teaching proposes a change in the way of regarding teaching and learning. This change breaks away from the concept of the teacher as an agent passing on a single and preestablished cultural knowledge. The teacher must adopt a new approach to mathematical knowledge and teaching in order to feel his own participation in this change. In this paper we propose the use of paradoxes to provoque cognitive conflicts in the individual, so that he will be forced to review his conceptions in a critical way and therefore to adopt new solutions. We present a secuence to be used in teacher education based on a paradox, and its analysis from various fields of mathematics.

PARADOJAS MATEMÁTICAS PARA LA FORMACIÓN DE PROFESORES

La reforma de la enseñanza de las Matemáticas que está en curso (NCTN 1991; MEC 1992) aboga por unas Matemáticas abiertas a todos los alumnos y por un método más participativo de enseñanza, con mayor protagonismo del alumno. Pone el énfasis en el "proceso" de hacer Matemáticas, más que considerar el conocimiento matemático como un "producto" acabado. Así en el Curriculum de Educación Secundaria de Andalucía se indica: *"El Curriculum del Área de Matemáticas (..) quiere partir de una concepción de este Área integradora y cultural, superadora de la visión academicista, encerrada en sí misma y principalmente basada en la deducción que con frecuencia la ha caracterizado*" (p. 4188)

Para llevar a cabo esta renovación en la enseñanza es preciso que los profesores compartan sus intenciones epistemológicas. La formación de profesores tiene que ayudar a los profesores en formación a tomar en consideración esta visión epistemológica, para lo que debe buscar estrategias de formación que favorezcan el cambio epistemológico.

No basta con formar profesores que busquen la eficacia en la transmisión de conocimientos matemáticos establecidos. Tampoco es suficiente el que los profesores incorporen a su clase hábitos más abiertos y democrácticos de actuación y participación de sus alumnos. Se trata de que los profesores busquen los significados educativos de los contenidos matemáticos y establezcan estrategias formativas acordes con ello. Una de las formas de hacer más educativa la enseñanza de las matemáticas es procurar que los alumnos "hagan matemáticas".

Pero los estudiantes para profesor y los profesores no experimentados tienden a concebir la enseñanza como transmisión de un producto externo, único, de quien lo conoce a quien no lo conoce. Los cursos de formación tienen que procurar cambiar esta expectativa de los futuros profesores, y hacerles asumir su papel profesional: son educadores matemáticos. Para llegar a hacer patente esta propuesta, es necesario que los estudiantes para profesor sientan que ellos "también pueden hacer matemáticas". Además, es preciso que rompan la visión unidimensional de la matemática, que hace que se identifique geometría con álgebra lineal, álgebra con teoría de ecuaciones o análisis con estudio de curvas. Se trata de mostrar que los problemas matemáticos pueden contemplarse de formas variadas, y al hacerlo de esta forma se amplia la riqueza interpretativa de estos problemas.

Con vista a este fin, en este artículo presentamos una secuencia de razonamiento matemático basado en la resolución de una paradoja matemática, con la intención de que dicha propuesta se utilice en los cursos de formación de profesores de matemáticas de secundaria. El análisis matemático y didáctico de las tareas relacionadas con la paradoja nos permitirá mostrar la riqueza interpretativa de significados y formas de representación de los conceptos matemáticos ligados a ella. Creemos que mediante la realización de módulos formativos basados en la búsqueda de significado y de resolución de paradojas podemos poner a los estudiantes en formación a "hacer matemáticas". De esta forma percibirán que se puede hacer matemáticas a partir de problemas elementales, y podrán comprender mejor la propuesta que se está haciendo para que sus alumnos "hagan matemáticas en clase".

En el punto siguiente (§1) haremos algunas reflexiones sobre el interés que tiene emplear paradojas en la formación de profesores, cuando se trata de provocar en ellos un cambio de actitudes hacia la enseñanza de la matemática. Posteriormente (§2) presentaremos una secuencia de enseñanza basada en la aparición de una paradoja relacionada con las operaciones con segmentos, y al analizar esta paradoja mostraremos que el estudio desde diversas perspectivas nos ayuda a comprender mejor la situación sorprendente que encierra la paradoja. Finalmente haremos algunas consideraciones sobre las cualidades educativas de las paradojas para la formación de profesores de matemáticas de secundaria.

1. Paradojas y formación de profesores de matemáticas

La formación de profesores de Matemáticas parte, en la actualidad, de una postura epistemológica constructivista de las Matemáticas. Esta postura está en consonancia con la concepción constructivista del aprendizaje (von Glasersfeld 1989) según la cual el propio alumno construye el conocimiento, a partir de sus estructuras cognitivas anteriores. Si se quiere formar profesores para que ayuden a sus alumnos a construir su aprendizaje, habrá que realizar esta formación mediante actividades que permitan al profesor en formación generar su propio aprendizaje del conocimiento profesional del profesor. Como consecuencia, la formación de profesores se apoyará en procesos interpretativos, críticos, de investigación sobre la tarea profesional, basados en la indagación sobre el conocimiento profesional del profesor de matemáticas, siempre partiendo del conocimiento del profesor en formación sobre la tarea docente.

Con esta formación crítica se pretende que el profesor busque significados de su conocimiento profesional, y por tanto, de su conocimiento matemático y de sus cualidades educativas. Sin embargo, el profesor en formación inicial está habituado a razonar en matemáticas, y parece que "domina las matemáticas" suficientemente, con lo que sólo demanda para su formación estrategias de "enseñanza" del conocimiento matemático establecido. Para que el estudiante para profesor rompa esa actitud, desde el paradigma de formación de profesores basado en la reflexión en la acción, se están proponiendo la utilización de paradojas, metáforas, etc. como base para suscitar la reflexión de los profesores en formación (Smyth 1991).

La idea de utilizar paradojas y metáforas no es nueva en educación matemática. Entre las investigaciones relacionadas con las creencias de los profesores sobre las Matemáticas y su enseñanza y aprendizaje, hay algunas que han empleado elementos evocadores, para facilitar que los estudiantes expresen sus representaciones sobre la enseñanza de las matemáticas. Johnston (1994) estudió las características personales de tres profesores canadienses, empleando para su análisis las metáforas con las que el profesor caracteriza la enseñanza. Bullough y Stokes (1994), utilizaron las metáforas como un medio para la exploración de los profesores por ellos mismos. Hoyles (1992) ha empleado *caricaturas* para sintetizar las visiones, actitudes y prácticas de diversos sujetos de los que ha realizado estudios de casos. Nosotros hemos propuesto en otro momento los chistes sobre las Matemáticas y la enseñanza (Flores, 1996) y las metáforas sobre la eseñanza (Flores, 1998), como forma de facilitar la comunicación entre los educadores matemáticos o entre los formadores y los profesores en formación.

Movshovitz-Hadar y Hadass, (1990) ya han empleado paradojas en la formación de profesores de Matemáticas en Israel. La investigación realizada llevó a estos autores a afirmar que las paradojas matemáticas proporcionan un campo conveniente para una revisión no rutinaria y refinada de los materiales del bachillerato, y hace que se genere en los estudiantes para profesor conflictos cognitivos. En este artículo nos basamos en esta idea, y hacemos una propuesta de formación centrada en el significado matemático de los objetos relacionados con la paradoja. Tratamos con ello de mostrar la riqueza interpretativa que puede generar.

Precisemos que se entiende por paradoja y el tipo de paradojas que vamos a considerar en nuestra propuesta.

Watzlawick y otros (1981) definen paradoja como "*Una contradicción que resulta de una deducción correcta a partir de premisas congruentes* (p. 173)". Estos autores clasifican las paradojas en tres tipos: 1) lógico-matemáticas o antinomias (paradojas sintácticas, como la que está ligada al conjunto de los conjuntos que no se pertenecen a si mismos); 2) definiciones paradójicas o antinomias semánticas (paradojas semánticas, como la del mentiroso: "soy un mentiroso") y 3) paradojas pragmáticas, que pueden ser instrucciones paradójicas (como la que resulta cuando el capitán que ordena al soldado barbero que afeite a todos los soldados que no se afeitan a sí mismos) y predicciones paradójicas (como la resultante de la imposibilidad de poner un examen sin avisar, incluyendo la paradoja del prisionero).

Martin Gardner (1983) indica que las paradojas que emplea en su libro *Paradojas aja!* corresponden a cuatro tipos: *1) Afirmaciones que parecen falsas, aunque en realidad son verdaderas. 2) Afirmaciones que parecen verdaderas, pero que en realidad son falsas.3) Cadenas de razonamiento aparentemente impecables, que conducen sin embargo a contradicciones lógicas (falacias).4) Declaraciones cuya verdad o falsedad es indecidible. (p. vii)*

Las paradojas que nosotros vamos a proponer corresponden a los dos primeros tipos de Gardner: afirmaciones que parecen falsas/verdaderas, pero en realidad son verdaderas/falsas. De esta forma vamos a proponer un razonamiento *contrario al sentir común que provoca un sentimiento de sorpresa* (Gardner p. vii). Pero nuestra idea es que no se reduzcan a un sentimiento de sorpresa, sino que incluyan una componente que esté ligada al significado de los conceptos matemáticos utilizados. Se trata de provocar una sorpresa que ponga de manifiesto que no se dominan los conceptos en toda su extensión, pero que es posible profundizar para buscar una explicación conceptual, que no se reduzca a analizar la forma de expresión de los conceptos. Con ello, las paradojas que vamos a considerar podríamos incluirlas en las paradojas pragmáticas de Watzlawick.

Hemos buscado paradojas que se manifiesten como contrarias al sentir en determinado contexto, pero que tras un estudio más fino, puedan desaparecer o explicarse. Nuestra intención es presentar conceptos matemáticos, razonamientos, etc. que en una primera visión aparezcan como paradójicos para el estudiante para profesor, es decir, que contradiga sus expectativas intuitivas. Esperamos que de esta forma el estudiante para profesor, que está habituado a que el razonamiento matemático sea unívoco, correcto, válido y no contradictorio, se sienta obliguado a buscar la interpretación más amplia de la afirmación y/o razonamiento paradójico, y profundice en el sentido de los conceptos matemáticos ligados a esa *paradoja*. No vamos, pues, a entrar en las clásicas paradojas que, con su aparición, han moldeado la historia de la matemática. Nos interesan las paradojas que llevan a profundizar en conceptos matemáticos, para percibir la riqueza de relaciones que existen entre los componentes de los conceptos.

Antes de exponer la paradoja que hemos analizado en profundidad, veamos algunas paradojas clásicas y su potencialidad de significados matemáticos.

La paradoja de Ball, (Gardner 1956), que aparenta la pérdida de la superficie de una unidad en un rectángulo de 169 unidades de superficie en un proceso de descomposición y recomposición de figuras (figura 1). Esta paradoja reune las siguientes características, que cubren las expectativas que pretendemos:

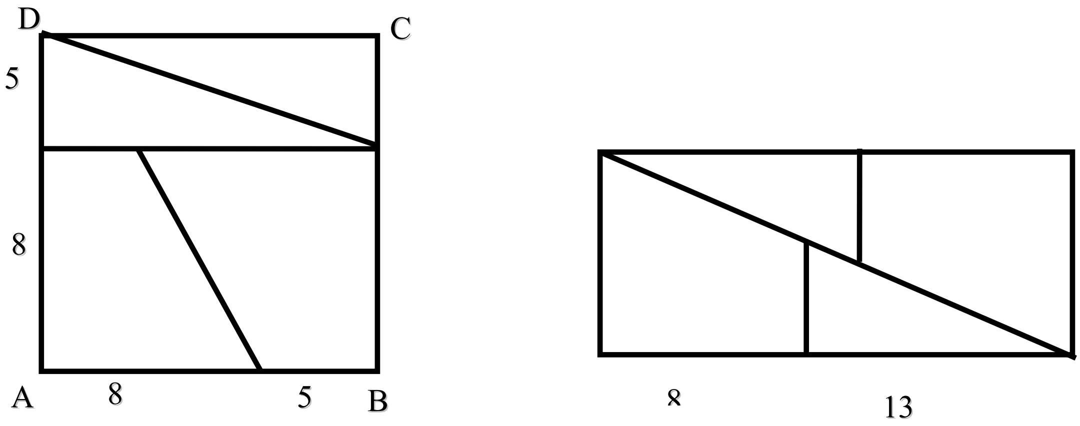
a) *es aparentemente sorprendente*,

b) *tiene una solución no trivial*,

c) *está relacionada con otros conceptos de la matemática* (en el caso de la paradoja de Ball, su *generalización* nos hace llegar a la sucesión de Fibonacci, y al número de oro), y

d) *es expresable en diferentes sistemas de representación* (en esta paradoja se relacionan la representación numérica-aritmética de los términos de la sucesión de Fibonacci, la algebraica mediante la búsqueda de la solución de la ecuación/inecuación y la geométrica, mediante el cálculo de pendientes, la determinación de las superficies y la identificación de las figuras que se ponen en juego).

Otra paradoja muy clásica es la del reparto de camellos, que ya tratamos en Gamiz y Flores (1996), y en las que aparece un elemento importante, como es el paso al límite, y la relación aritmética ligada a las fracciones. La primera paradoja que solemos tratar en los cursos de formación de profesores es la que se refiere a la idea de número decimal periódico y la controversia de los números de período 9.



Área, del cuadrado ABCD
13 x 13 = 169

Área del rectángulo
21 x 8 = 168

Figura 1: Paradoja de Ball

En este artículo vamos a desrrollar con mayor detalle una paradoja relativa a las *operaciones con segmentos*.

2. Una paradoja en las *operaciones con segmentos*

Para que un razonamiento de lugar a una paradoja es necesario situarlo. Vamos a proponer una secuencia de actividades que van a crear un marco adecuado para realzar la paradoja.

1ª Tarea *Dado un círculo, dibujar otro círculo concéntrico con el primero que tenga de superficie la mitad de la superficie del primero*

La resolución de este problema puede llevarse a cabo de muchas formas; la más espectacular consiste en dibujar el círculo inscrito en el cuadrado inscrito en el primer círculo. La generalización de este problema puede dar lugar a diversas líneas de trabajo que suponen un manejo de la representación aritmética-algebraica y la geométrica.

Una *primera generalización* consiste en obtener con regla y compás círculos cuya área sea: la tercera parte, dos terceras partes, cuarta parte, tres cuartas, .. , en general m/n veces el área del círculo original.

Un método general para estas construcciones es el basado en la espiral de triángulos de hipotenusas irracionales crecientes (2, 3, 4, etc..) (figura 2).También se podría afrontar la búsqueda de métodos particulares para algunos casos. Un *problema intermedio* que surge al resolver esta primera línea de cuestiones consiste en *obtener el radio de una circunferencia concéntrica con dos circunferencias que forman una corona, tal que determine con ellas coronas circulares de igual área*.

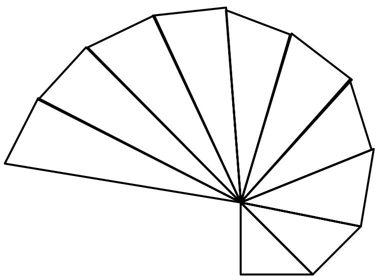


Figura 2: Espiral de irracionales

El método de dibujar el cuadrado inscrito en la circunferencia y luego inscribir otra circunferencia en el cuadrado es un caso particular de inscripción y circunscripción de polígonos regulares en circunferencias. *Otra forma de generalización* de la tarea: *determinar en qué proporción dividen al área del círculo los círculos inscritos en los polígonos regulares inscritos en el círculo original*. Para resolver esta tarea podemos emplear las razones trigonométricas de los ángulos de los polígonos regulares, con lo que surge *otra línea de generalización*: *¿De qué ángulos se pueden calcular el valor exacto de sus razones trigonométricas? ¿Cómo averiguar si un ángulo admite razones trigonométricas exactas?* Estas preguntas nos llevan hasta los límites de cálculo de razones trigonométricas de ángulos que sean combinación lineal de ángulos conocidos.

La resolución de estas tareas está insistiendo en la obtención del resultado de **multiplicar un segmento** (el radio del círculo original), **por un número irracional**. Esta operación es relativamente fácil cuando el número irracional es algebraico.

<u>2ª Tarea</u> (Cuadratura del rectángulo): *Dado un rectángulo, dibujar un cuadrado de igual área que el rectángulo*

Esta segunda tarea es aparentemente paradójica, sobre todo si se intenta resolver desde el álgebra. En efecto, el cuadrado de igual área que el rectángulo de lados ***a*** y ***b*** debe tener de lado la raíz cuadrada del producto ***a.b***, y esto ¿qué significa?.

Empecemos con un ejemplo más fácil. Queremos cuadrar un triángulo equilátero, con lo que sólo tendremos un dato en la figura de partida, el lado ***a***. El área del triángulo es **.**

$$\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

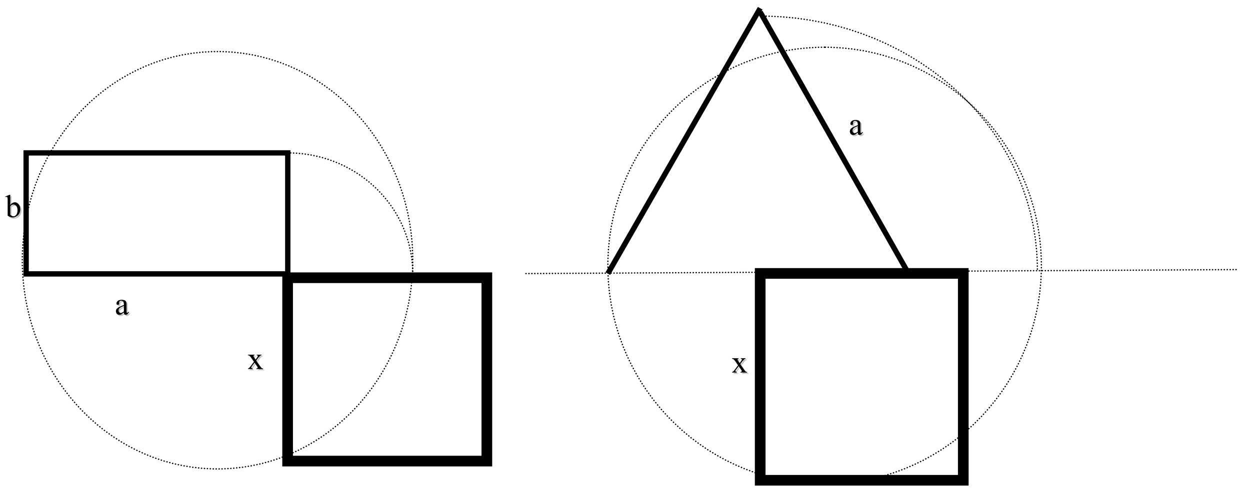
Luego el lado del cuadrado debe medir:

$$\frac{a\sqrt[4]{3}}{2}$$

¿Cómo obtener el segmento raíz cuadrada de un segmento? ¿Cómo obtener el segmento raíz cuarta de 3?.

Esta supuesta paradoja se resuelve de manera geométrica mediante dos métodos ingeniosos. El primero es de naturaleza puramente geométrica, y consiste en aplicar el Teorema de la Altura correspondiente a la hipotenusa de un triángulo rectángulo, (*la altura es media proporcional entre los dos segmentos en que divide a la hipotenusa*). Con ello podemos dibujar un segmento **x** tal que su cuadrado sea igual a ***a.b***, tal como necesitábamos en la cuadratura del rectángulo. En la figura 3 aparece este método de cuadrar un rectángulo, y la cuadratura del triángulo equilátero. El segundo método es fundamentalmente algebraico, y consiste en hacer transformaciones con la igualdad **x.y = h^2**, tal como indica la figura 4.

Figura 3: cuadratura del rectángulo y del triángulo equilátero



A) Primera cuadratura del tectángulo

B) Cuadratura del triángulo equilátero

Si $x.y = h^2$, entonces, $(x+y)^2 - (x-y)^2 = 4xy = (2h)^2$. Luego $[(x+y)/2]^2 - [(x-y)/2]^2 = h^2$. Para construir h basta con construir un triángulo rectángulo de hipotenusa $(x+y)/2$, y de cateto $(x-y)/2$. El otro cateto medirá **h**

Figura 4: 2º método de cuadratura del rectángulo.

Teniendo en cuenta que todo polígono se puede descomponer en triángulos, y todo triángulo es la mitad de un paralelogramo, cuya superficie es la misma que la de un rectángulo de base y altura la del paralelogramo, al resolver la tarea 2 podemos afirmar que todo polígono es convertible en una suma de cuadrados. ¿Sería posible transformar cualquier polígono en un cuadrado? Esta es una línea de investigación que dejamos abierta.

Nos interesa más una segunda línea de generalización, la realización del problema inverso.

3ª Tarea *Dado un segmento **a**, dibujar el segmento cuya longitud sea la raíz cuadrada de la longitud de **a***

A partir de la tarea anterior se comprende fácilmente que el segmento buscado será el lado del cuadrado de superficie igual a la longitud del segmento ***a***. ¿Cómo calcular un segmento con longitud igual a la superficie de un rectángulo? ¿Es posible realizarlo?

Para afrontar esta tarea podríamos dibujar un rectángulo cuyos lados fueran ***a*** y el segmento de longitud unidad (media proporcional entre **1** y ***a***). De esta forma, el área del rectángulo sería igual a la longitud de ***a***. Al cuadrar este rectángulo obtenemos el segmento cuya longitud es ***a.*** (figura 4)

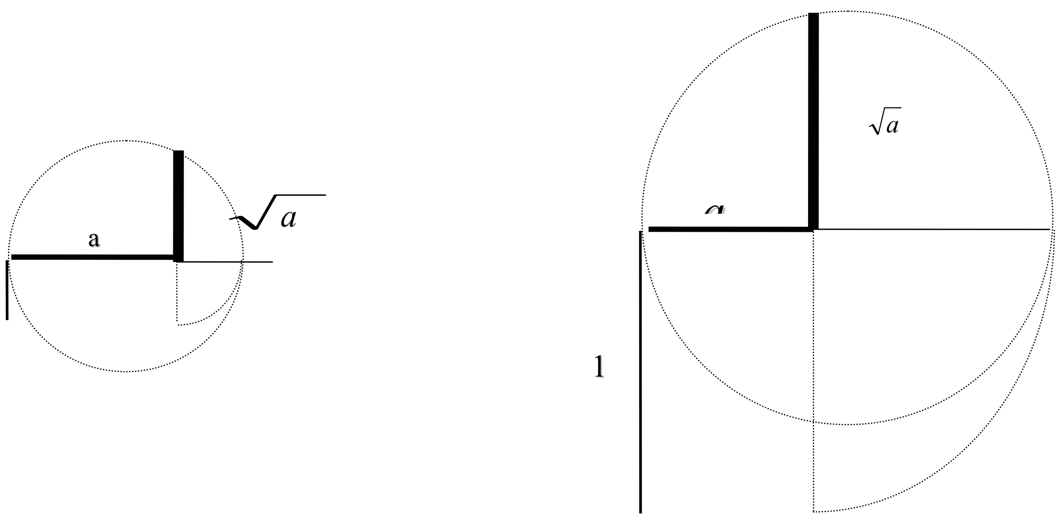


Figura 5: Raíz cuadrada de un segmento

Pero tal como se ve en esta figura 4, la longitud buscada **depende de la unidad de longitud que tomemos**. Aquí está la paradoja que buscábamos

> ¿Cómo es posible que la raíz cuadrada de un segmento dependa de la unidad de longitud? ¿Por qué no depende de la unidad de longitud el resultado de multiplicar un segmento por un número? ¿Qué ha cambiado en este caso respecto a la tarea 1?

En efecto, los resultados de la tarea 1 eran únicos, independientes de las unidades tomadas, ya que se basaban en relaciones entre áreas, y éstas no podían variar (el círculo inscrito al cuadrado inscrito tiene de área siempre la mitad de la del círculo original) ¿Qué ha cambiado?

Para resoler esta paradoja vamos a trabajar con diversas formas de representación del problema: algebraica, magnitudes, geométrica y aritmética.

a) <u>resolución algebraica</u>: partamos del estudio de la función irracional cuadrática. Sabemos que la función raíz cuadrada de **x**, está definida en R+ donde es estrictamente creciente, con un mínimo absoluto en el 0 y con una rama parabólica cuando x crece. Si comparamos esta función con la función lineal y = x, observamos que se corta en el x = 1, y que como función creciente, está por encima de la función lineal cuando x es menor que la unidad, y por debajo cuando x es mayor. Aparece pues una primera explicación de la paradoja: *la raíz cuadrada de un número es mayor o menor que dicho número según sea este número menor o mayor que la unidad*. Sería pues inconsecuente que la raíz de la longitud de un segmento fuera siempre la misma cantidad, independientemente de la relación de esta longitud con la cantidad unidad. En la figura 6 se sintetiza este estudio algebraico de la paradoja, en la que se observa la forma de construir la gráfica de la función raíz cuadrada de x geométricamente.

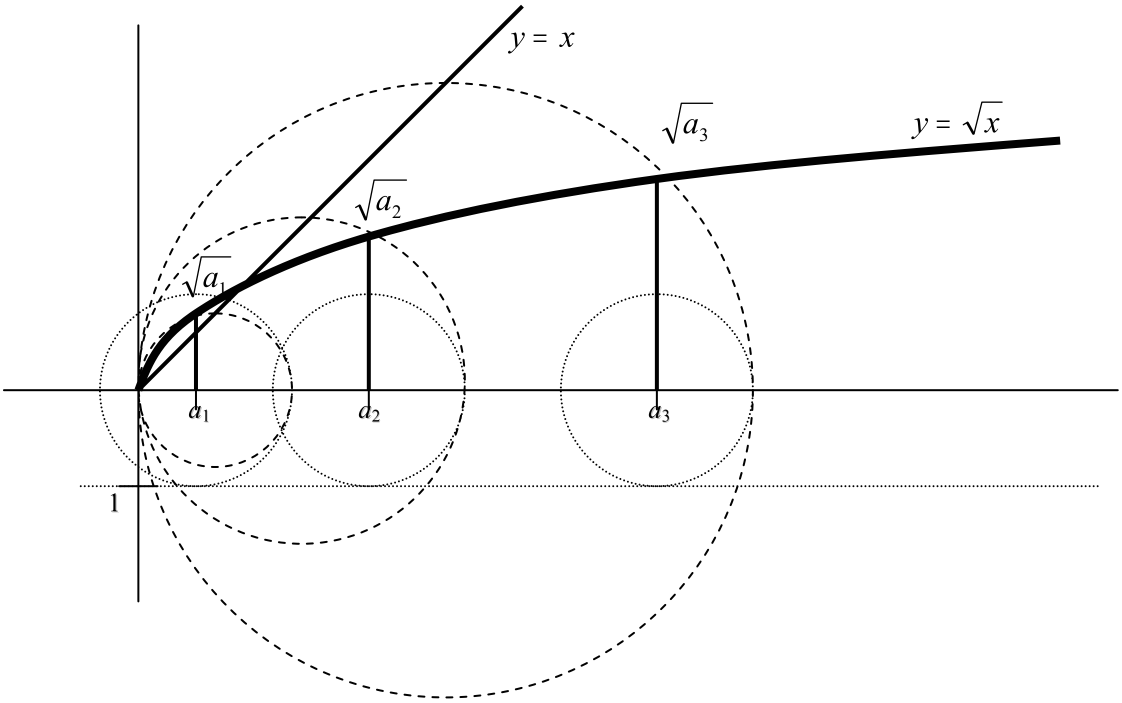


Figura 6: Obtención de la función raíz cuadrada de x geométricamente, y su relación con y=x

Esta explicación tiene que ser compatible con la unicidad del resultado de multiplicar un segmento por un número. ¿No es cierto que cualquiera que sea la relación de ***a*** con la unidad, 2.***a*** es mayor siempre que ***a***? ¿Debería pues ser multiforme también el resultado de multiplicar un segmento por un número? Para aclarar estas cuestiones es conveniente afrontar otras formas de representación.

b) <u>Consideración como magnitudes</u>. Formalmente, una magnitud es un semimódulo, construido sobre un conjunto de cantidades, entre las que se establece una suma que lo estructura como semigrupo, una ordenación compatible con la suma, y una operación externa definida sobre un semianillo.

En el caso de la longitud, partimos de los segmentos, que clasificados mediante una relación de equivalencia (AB es equivalente a CD sii existe una transformación plana que lleva a hacerlos coincidir), definen cantidades de longitud (la cantidad de longitud representada por un segmento ***a*** corresponde con la de todos los segmentos equivalentes a ***a***). Se define la suma de cantidades de longitud ***a*** y ***b*** mediante la selección de dos segmentos de estas clases, que se encuentren en la misma recta, uno a continuación del otro, con lo que la cantidad suma es la clase a la que pertenece el segmento formado por la unión de ambos. La suma de cantidades de longitud es una cantidad **única**, independiente de los representantes tomados. El orden de cantidades de longitud se define de igual modo que la equivalencia, buscando segmentos de la clase que tengan un origen común, y comparando los extremos.

Nótese que estamos operando con cantidades de longitud, y por tanto, no necesitamos los números, con lo que la asociación de la unidad a una cantidad no aparece por ningún lado. Los números aparecen como operadores mediante la operación externa: la multiplicación de un número natural por una cantidad de longitud se obtiene mediante suma repetida; la multiplicación de un número racional **m/n** por una cantidad de longitud **a** se obtiene buscando otra cantidad de longitud **b**, tal que **m.*a*** = **n.*b***. La multiplicación de un número irracional por una cantidad de longitud se realiza mediante un paso al límite de multiplicaciones racionales.

Cuando realizábamos la tarea 1, estábamos multiplicando cantidades de longitud por números irracionales, mediante la operación externa. El resultado era, pues, una cantidad de longitud, y, tal como hemos dicho para la suma (la multiplicación externa se reduce a una suma), este resultado es único.

Llamamos **medida** de una magnitud al homomorfismo entre la magnitud y un semimódulo numérico, que conserva el orden. La medida de una magnitud es pues, una correspondencia que asocia a cada cantidad un número. En esta aplicación lineal se debe conservar la operación externa. Para realizar la medida comenzzmos por asociar a una cierta cantidad de magnitud la unidad del semimódulo numérico. Esta asociación es arbitraria, con lo que *la medida de una cantidad dependerá de como hagamos la asociación unitaria.*

Para medir la longitud, se comienza por establecer una longitud a la que se le asocia la unidad (unidad de medida), y a partir de ella se asigna una medida a cada cantidad. Dada una cantidad de longitud, su medida dependerá de la cantidad unidad adoptada. Recíprocamente, si queremos dibujar un segmento de medida dada, necesitamos previamente indicar cual es la unidad de medida. La cantidad de longitud es única, pero su medida depende de la cantidad unidad elegida.

En la tarea 3ª, buscábamos la raíz cuadrada de .... la **medida** de una cantidad de longitud, y esta **medida** depende de la cantidad tomada como unidad. En la tarea 1ª buscábamos la **cantidad** de longitud resultante de multiplicar una cantidad por un número y esta operación no depende de la unidad, ya que no corresponde con medida de longitudes.

Desde el punto de vista aritmético, la raíz cuadrada está relacionada con la potencia, y ésta es una multiplicación. Detrás de la tarea 3ª se esconde **la multiplicación de <u>medidas</u> de cantidades de longitud**. Sabemos que mediante el *ábaco continuo* se puede realizar la multiplicación y división de .. números representados en la recta real, de manera gráfica, basándose en el Teorema de Thales. Pero, tal como se puede ver, esta multiplicación es .. **de medidas de segmentos**, no de cantidades de longitud, con lo que su resultado depende igualmente de la unidad adoptada, y la multiplicación *aparentemente interna* entre *segmentos*, depende de la unidad de medida.

c) <u>Consideraciones aritméticas</u>. Hemos llegado, pues, a establecer una relación entre la supuesta paradoja y la característica y significado de las operaciones que se están poniendo en juego. El análisis de la multiplicación desde el punto de vista aritmético puede añadir algún resultado interesante. La multiplicación responde a problemas fundamentalmente de dos tipos (Vergnaud, 1983): isomorfismo de medidas, y multiplicación de medidas. La primera responde a problemas del tipo A y la segunda a problemas como el B siguientes:

A) *Tengo 4 cajas, en cada una de las cuales hay 5 lápices. ¿Cuántos lápices tengo en total?*

B) *Tengo 4 camisas y 5 pantalones ¿de cuántas maneras diferentes puedo vestirme?*

¿Qué tipo de operaciones son las planteadas en estos dos problemas? ¿Internas o externas?. Si escribimos las **unidades** de referencia, la resolución de ambos problemas sería:

A) 4 cajas x 5 lápices/caja = 20 lápices

B) 4 camisas x 5 pantalones = 20 formas de vestirme

Como vemos, en el primer caso utilizamos dos tipos de datos, un dato puntual (número de cajas), un **índice** (número de lápices por caja), y obtenemos otro dato puntual (número de lápices). ¿En qué conjunto se está definiendo la operación?

En el segundo caso, multiplicamos datos de conjuntos diferentes, y obtenemos un resultado de .. otro conjunto distinto a los dos anteriores. Esta situación es aún mas paradójica cuando multiplicando medidas de longitudes de los lados de un rectángulo obtenemos .. áreas del rectángulo (Segovia, Castro, Flores, 1997, Castro, Flores y Segovia, 1998).

Si buscamos la significación de la suma y el producto externo, podemos encontrarnos situaciones similares, pero también podemos plantear una suma de **cantidades homogéneas** (tengo 5 lápices en mi mano derecha y 3 en la izquierda, cuántos lápices tengo).

Si profundizamos en la significación de la multiplicación, observamos que su resultado depende de la unidad. Tal como indica Vergnaud, en los problemas multiplicativos de isomorfismo de medidas (al menos) contamos con **tres datos**. En efecto, en el problema A, tenemos los datos siguientes:

cajas :	1	4	
lápices:	5		x

Tal como se observa, dependiendo de **la unidad** de medida (de la cantidad que corresponde con la unidad), será diferente el resultado. Esto puede explicarnos también la situación paradójica anterior. La raíz es un tipo de multiplicación y hemos visto que el resultado de la multiplicación depende de la unidad que tomemos.

Conclusiones

En este artículo hemos presentado una secuencia de actividades que ha dado lugar a una paradoja relacionada con la *raíz cuadrada de un segmento*. Hemos querido mostrar la riqueza interpretativa que puede tener incorporar este tipo de actividades a la formación inicial y permanente de profesores de Matemáticas de enseñanza secundaria. Nuestra expectativa es que los profesores en formación tengan una creencia arraigada en la unicidad de los resultados de las operaciones, lo que puede llevarlos a buscar formas de superar la supuesta paradoja. Los comentarios presentados han pretendido mostrar la necesidad de profundizar en el significado y la red de conceptos matemáticos para resolver la paradoja.

Las paradojas y otros elementos matemáticos evocadores, como las metáforas, los chistes, y los pasatiempos han sido siempre temas de referencia en la enseñanza de las Matemáticas, especialmente para hacer más amenas las clases y romper la consideración formal. En este artículo hemos querido mostrar la riqueza interpretativa y formativa que encierra uno de estos elementos, las paradojas. Hemos tratado de mostrar el interés auto - formativo que genera la resolución de paradojas matemáticas, valiéndonos para ello de un ejemplo concreto. Esperamos con ello animar a diseñar módulos de formación de profesores de matemáticas de secundaria, que contemplen el conocimiento matemático en toda su extensión y con toda la riqueza de formas de análisis y representación posibles.

Referencias bibliográficas

BULLOUGH, R.V. y STOKES, D.K. (1994): Analyzing personal teaching metaphors in preservice teacher education as a mean for encouraging professional development, *American Educational Research Journal*. Vol 31, 1, 197-224.

CASTRO, E., FLORES, P., y SEGOVIA, I. (1998): Relatividad en las fórmulas de cálculo de superficie de figuras planas. Suma nº 26**,** 23-32..

FLORES, P. (1996): El chiste como contraste de representaciones en educación matemática. En Fuente, M. y Torralbo, M. (Eds.) *Actas de las VII Jornadas de la SAEM Thales*. Córdoba: SAEM THALES y Universidad de Córdoba , 535-544.

GÁMIZ, L. Y FLORES, P. (1996): Papel pericial de las matemáticas. Los repartos, *Suma* 21, 81-88.

GARDNER, M. (1983): *Paradojas*. Labor, Barcelona.

GLASERSFELD, E. VON (1989): Congition, construction of knowledge, and teaching. *Synthese* 80, 121-140

HOYLES, C. (1992): Illumination and reflections - Teachers, methodologies and Mathematics. En W. Geeslin y K. Graham. (Eds), *Proceedings of the sixteenth PME Conference*. Durham, 263 – 286.

JOHNSTON, M. (1994): Contrast and similarities in case studies of teacher reflection and change, *Curriculum inquiry*, 24:1, 9-26.

MOVSHOVITZ-HADAR, N. y HADASS, R. (1990): Preservice education of math teacher using paradoxes, *Educational Studies in Mathematics* 21, 3, 265-287.

NCTN. (1991): Professional standars for teaching mathematics. (Va. National Council of Teacher of Mathematics: Reston).

SEGOVIA, I., CASTRO, E. Y FLORES, P. (1996): El área del rectángulo, *UNO 10,* 63-78.

SMYTH, J. (1991): Una pedagogía crítica de la práctica en el aula, *Revista de Educación*, 294, 275-300.

VERGNAUD, G. (1981): *L'enfant, la mathématique et la réalité*. Lang, Berna.

WATZLAWICK, P. (1976): *Cambio*. Herder, Barcelona.

WATZLAWICK, P. (1983): *El lenguaje del cambio*. Herder, Barcelona.

WATZLAWICK, P., BAVELAS, J.B. y JAKSON, D.D. (1981): *Teoría de la comunicación humana*. Herder, Barcelona.