SEMEJANZA ENTRE UN NEGATIVO Y LA FOTOGRAFIA. PROPORCIONALIDAD EN LA OLIMPIADA THALES

Raquel Gil, Olalla Romero, Javier Villar y Pablo Flores
Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada

1. Introducción

Un grupo de licenciados en matemáticas hemos tenido la oportunidad de asistir como observadores a las " XIV Olimpiadas de Matemáticas" organizadas por la sociedad Thales, en su fase provincial dirigida a alumnos de 2º de ESO y celebrada en Granada el 18 de Abril de 1998.

Uno de los problemas que se les planteaba a los alumnos, consistía en la aplicación del concepto de proporcionalidad y tenía el siguiente enunciado:

Estos son diferentes tamaños de fotografías (medidas en cm.) que nos pueden ofrecer al revelar nuestros carretes:

10 x 15	*13 x 18*
20 x 25	*30 x 45*

Si el negativo que nosotros entregamos en la tienda es de 24 x 36 mm. ¿Qué tamaños de los anteriores podremos obtener?.

Al observar la forma en que estos alumnos (que se suponen destacados en matemáticas), estaban respondiendo, empezamos a interesarnos en estudiar el grado de dificultad que puede tener en la Educación Secundaria el concepto de proporcionalidad entre magnitudes. Hemos tenido la oportunidad de entrar en contacto con los correctores, lo que no ha permitido disponer de los ejercicios realizados por los alumnos, y los hemos analizado tratando de estudiar dos aspectos: a) Los diferentes mecanismos con los que el alumno estudia la relación de proporcionalidad entre magnitudes y b) Las principales dificultades que los alumnos encuentran en este concepto.

El concepto de proporcionalidad aparece en las Matemáticas de Secundaria en dos lugares. En el primer ciclo de la ESO, apartado de números y medidas "*Comparar magnitudes, identificando las que mantienen relaciones de proporcionalidad y las que no y tomando decisiones para considerar que dos magnitudes son proporcionales con la debida aproximación*". En 3º de ESO, en el apartado de números y medidas "*Construir y utilizar relaciones de proporcionalidad de diferentes formas*".

En esta comunicación vamos a analizar las respuestas de los alumnos, lo que nos permitirá estudiar más en profundidad el concepto de proporcionalidad. En primer lugar vamos a recordar la idea formal de proporcionalidad entre magnitudes, con objeto de clasificar los elementos necesarios para resolver problemas de proporcionalidad. Posteriormente presentaremos las respuestas de los alumnos, y finalmente haremos algunas consideraciones sobre el aprendizaje de la proporcionalidad que nos ha sugerido esta investigación.

2. Concepto de proporcionalidad

Dadas $(E, +, \leq)$, $(E', +, \leq)$ magnitudes escalares y $r \in R$. Definimos una aplicación biyectiva: $p: E \dashrightarrow E'$ de tal forma que $p(c_i) = c_i'$ con $c_i \in E$, $c_i' \in E'$

Si p cumple las condiciones: $p(c_1 + c_2) = p(c_1) + p(c_2) \quad \forall\, c_1, c_2, c \in E$

$$p(r \cdot c) = r \cdot p(c)$$

p se llama *aplicación de proporcionalidad* o *proporcionalidad entre magnitudes*.

Si en estas magnitudes definimos una medida, la aplicación p subordina una proporcionalidad entre medidas. Sean u y u´ las unidades de medida en cada magnitud, tenemos definidas en ellas las aplicaciones m_u y $m_{u'}$, que nos dan las medidas de cada cantidad. A partir de estas se define la función de proporcionalidad f, inducida por p como la biyección composición de las aplicaciones p, m_u y $m_{u'}$

$$f [m_u (c_i)] = m_{u'} [p (c_i)]$$

Se puede probar que esta función es siempre de la forma $f(r) = k \cdot r$, donde k es un número real llamado ***constante de proporcionalidad***.

Vamos a trasladar este aspecto formal a nuestro ejemplo concreto. En el problema planteado trabajamos con la magnitud longitud considerando las dimensiones “alto” y “largo”, y tomando como unidad el milímetro.

La aplicación proporcionalidad p: E (“alto”)--------> E´ (“largo”) induce la función proporcionalidad f cuya constante de proporcionalidad se determina con una sóla imagen.

f: S ------- S´ f(24) = k · 24 = 36 , entonces k = 36/24

24 ------ 36

Hay dos estrategias para resolver el problema:

A) **Buscar la constante de proporcionalidad k**, tal como hemos mostrado (k=3/2 o 2/3**).**

B) **Buscar la razón de semejanza “c”.** Además de la proporcionalidad definida existe una relación multiplicativa entre el conjunto de anchos que se reproduce en el de altos.

f: S ------ S´

24 ------3 x c: 24 · c------ 36 · c. La constante “c” va a ir variando para cada par de rectángulos que consideremos. En el problema, los tamaños semejantes al negativo son el 30x45, con una razón de semejanza de 12,5 (decimal limitada, con un solo decimal), y 10x15, con una razón de semejanza de $4,1\underline{6}$ (decimal períodica mixta).

Para aplicar estas dos estrategias, se pueden aplicar diversas técnicas aritméticas:

a) Realizar productos cruzados entre las medidas (24/10 = 36/15 ⇔ 24.15 = 36.10)
b) Buscar la fracción irreducible (24/36 = 2/3 = 10/15 = 30/45, o 24/10 = 12/5 = 36/45)
c) Dividir el numerador entre el denominador (36/24 = 1,5 = 15/10, o 24/10 = 2,4 = 36/15)
d) Regla de tres (24 – 36, 10 – x; o 24 – 10, 36 – x)

El concepto de proporcionalidad tiene diversas componentes que hemos visto reflejadas en las distintas respuestas dadas, muchas de ellas erroneas al no haber asimilado el concepto con todos sus matices.Pasamos a analizarlas:

1) La proporcionalidad exige que se supere la consideración aditiva o sustractiva, es decir que

$$\frac{a}{b} \neq \frac{a+d}{b+d}$$

2) La proporcionalidad exige la presencia de dos parejas de números, aunque estos números pueden ser iguales (media proporcional, la razón aurea, etc.) Sin embargo en algunos casos los alumnos calculan las areas de dos rectángulos y las comparan entre sí buscando proporcionalidad.

3) La proporcionalidad supone que existen dos coeficientes. Uno es la constante de proporcionalidad que multiplicado por una cantidad da la otra, y otro llamado razón de semejanza que variará para cada deos rectángulos. Estos no tienen por qué ser naturales, ni decimales exactos. Tampoco hay necesidad de calcularlos, si se resuelve por productos cruzados. Esto puede facilitarle la resolución. Se ha observado que cuando la razón de semejanza era c = $4,1\underline{6}$ decimal periódico, los alumnos lo dejaban de lado, sin embargo se observa que la respuesta 30 x15 es mucho más frecuente debido a que c = 12,5 número decimal exacto.

3. Respuestas de los alumnos

Hemos clasificado las respuestas de los alumnos en dos grandes grupos aquellas que son correctas parcial o totalmente y otras en las que el alumno muestra que no ha asimilado el concepto. Dentro del primer grupo distinguimos los que han calculado la constante de proporcionalidad ($\frac{a}{l} = \frac{a'}{l'} = k$) y los que han calculado la razón de semejanza para cada dos rectángulos, ($\frac{a}{a'} = \frac{l}{l'} = c$) A su vez estos los clasificamos segun cuatro modos de resolverlo: producto en cruz, efectuando las divisiones, reducir fracciones, regla de tres.

En el segundo grupo recogemos las distintas concepciones erróneas de proporcionalidad como: 1) las que calculan supercies de cada uno de los rectángulos, y buscan una proporcionalidad con la superficie del negativo y 2) las que intentan llegar a la medida de las copias sumando o restando una cantidad al ancho y alto del negativo. Hemos indicado también los alumnos que no respondieron, las respuestas sin justificar, o aquellos que dijeron que vale cualquier tamaño.

A. **Respuestas correctas total o parcialmente.**

	Producto en cruz	División	Reducir fracción	Regla de tres	Totales
Cte. Proporcionalidad	16	12	2	4	34
Razón de semejanza	13	25 (14*)	0	0	38
Totales	29	37	2	4	72

* Este es el número de alumnos que sólo aceptan la solución 30 x 45

B. **Otros.** Totales

1. Resultados sin explicar 77
2. Calculo de superficies 35
3. Suma o diferencia 5
4. Cualquier tamaño 35
5. En blanco 47

Observando los datos recogidos en la tabla A apreciamos que no hay diferencias significativas entre los que resuelven buscando razón de semejanza y constante de proporcionalidad. La mayoría resuelve por productos en cruz y división, muy pocos buscan igualdad de fracciones irreducibles y realizan la regla de tres. Aproximadamente la mitad de los que calculan la razón de semejanza por división se limitan a la solución en la que esta razón es 12,5 (30 x 45), decimal exacto con una sóla cifra, o bien no aceptan otra solución por aparecer un número periódico.

4. Conclusiones finales

Veamos en primer lugar algunas conclusiones relacionadas con las respuestas de los alunos al problema:

a) Un 28% de los alunmos han justificado al menos una repuesta corresta, lo que supone un alto porentaje si tenemos en cuenta la ubicación del concepto de proporcionalidad en el currículo de matemáticas.

b) Por contra un 32% no parecen establecer una relación entre el conceto de proporcionalidad y la situación propuesta en el problema.

c) El 16% de los alumnos tinen una idea equivocada de proporcionalidad, de los que la mayoría recurren a la relación entre áreas.

d) El resto de alumnos han dado unas respuestas no justificadas, en algunas ocasiones fuera de toda lógica.

La realización de esta actividad de análisis de las respuestas nos ha permitido tomar conciencia sobre las dificultades que tiene el concepto de proporcionalidad para los alumnos de 2º de ESO. Hemos comenzado a tener información sobre las carencias que los alumnos tienen en torno a este concepto.

Por otra parte, para entender mejor las respuestas de los alumnos hemos tenido que profundizar en el concepto matemático de proporcionalidad, y hemos tenido que buscar estrategias de resolución de problemas relacionados con la proporcionalidad. Creemos que este tipo de tareas repercuten de manera provechosa en nuestra formación como profesores, por lo que esperamos compartir el análisis, y discutir con otros compañeros sobre la complejidad del concepto de proporcionalidad.

Bibliografía consultada

Fiol M.L. y Fortuny J.M. (1990). *Porporcionalidad directa*. Síntesis, Madrid.

Luengo, R. (1990). *Proporcionalidad, Geometría y Semejanza*. Síntesis, Madrid.