"ALGUNOS ELEMENTOS DEL CONOCIMIENTO PROFESIONAL EN LA PLANEACION DE CLASES DE FUTUROS PROFESORES DE SECUNDARIA (UN CASO: LAS FRACCIONES)"

Oliverio Morcote Herrera, Universidad Popular del Cesar, Colombia
(omorcote@ugr.es)
Pablo Flores Martínez, Universidad de Granada, España
(pflores@ugr.es)

INTRODUCCION

Como formadores de profesores estamos interesados en analizar la interacción estudiante para profesor-conocimiento profesional y lo estamos trabajando en relación al contenido matemático fracciones en un contexto de programación de clases. Es la primera programación elaborada por los estudiantes y se quiere detectar algunos elementos allí existentes del conocimiento profesional siguiendo la caracterización de Bromme (1994) para éste constructo quien diferencia 5 componentes. Específicamente estamos interesados en el conocimiento didáctico del contenido (Shulman, 1986**.** Para ello estamos analizando sus programaciones usando un sistema de categorías construído con base en los organizadores curriculares de Rico (1997). En esta comunicación presentamos un marco de referencia del conocimiento didáctico de las fracciones de donde emergen tales categorías.

CONTEXTO

Nuestra investigación se lleva a cabo en el Programa de Licenciatura en Matemáticas de la Universidad de Granada, curso 1999-2000. Trabajamos con los estudiantes de 5º año, de la asignatura Prácticas de Enseñanza, a cargo de uno de los autores. Dicha asignatura consta de tres partes: una fase de Planificación; una fase de Realización de las Prácticas, y finalmente una fase de Evaluación. Nuestro interés se centró en la primera fase: Planificación de la Enseñanza. El investigador asumió el rol de observador-participante. Producto de este módulo, se encomienda a los estudiantes la planeación y diseño de una hora de clase dedicada a fracciones y número racional, como trabajo regular dentro de la asignatura. Esta planeación se elabora en grupos de 6 estudiantes cada uno.

AREA PROBLEMÁTICA

Este trabajo se encuentra enmarcado en la línea de investigación en Formación de Profesores. Más concretamente, asociado al Conocimiento Profesional, relacionado con la Programación de Clases. Hemos decidido trabajar con el contenido matemático "fracción". Nos interesa el conocimiento didáctico de las fracciones expresado en las planeaciones. Entendemos que la formación de profesores satisfaga tres características: que el futuro profesor sea "agente y protagonista" en la gestión del proceso de enseñanza aprendizaje; a posibilitar que adquiera un conocimiento para la acción y a formar al estudiante para profesor con una actitud crítica y reflexiva (Llinares, 1991).

Nos identificamos con la concepción del conocimiento profesional del profesor dada por Bromme (1994), que lo define como: "el contenido del que hablan durante la lección, pero también es evidente que deben poseer un conocimiento adicional, con vistas a ser capaces de enseñar matemáticas en una forma apropiada a sus alumnos". Esta visión nos invita a mirar la amalgama de que trata este tipo de conocimiento, donde se hace necesario identificar otros además del de matemáticas, como requisito para ser un profesional de la educación en ésta área. Nos adherimos a la organización de Bromme (1994) por cuanto presenta "una integración cognitiva desde varios campos del conocimiento que tiene lugar durante la formación práctica y experiencia personal". A nuestro juicio aquí se recogen acertadamente diversas variables didácticas, dignas de atención desde una visión retrospectiva y prospectiva de la relación teoría-práctica, que pueden conducir a trazar dimensiones útiles en los futuros profesionales de la educación matemática. Para Bromme (1994), el conocimiento profesional del profesor de matemáticas tiene como componentes: matemáticas como disciplina, matemáticas escolares, filosofía de las matemáticas escolares, pedagogía general y conocimiento didáctico del contenido.

Como yá lo dijimos, aquí nos ocuparemos solamente del conocimiento didáctico del contenido, para el caso relativo a "las fracciones". Para aclarar lo que entendemos por "conocimiento didáctico del contenido" vamos a contrastarlo con el conocimiento pedagógico general y con el conocimiento disciplinario. Entendemos el conocimiento pedagógico general, como aquello que los futuros profesores saben acerca de cómo son los alumnos, cómo aprenden, qué necesitan para su formación, cómo es la manera de manejar la disciplina, las sanciones, los premios, los problemas morales, etc y el conocimiento matemático disciplinar lo que los estudiantes para profesor saben de matemáticas. Se sitúa entonces "el conocimiento didáctico del contenido" en un punto específico de tensión entre el contenido matemático como aparece en la escuela y la manera de enseñarlo. El "conocimiento didáctico del contenido" fue acuñado por Shulman (1986) para rescatar el valor e importancia del contenido de la materia a enseñar y lo define como:

"....para las nociones que se enseñan con mas regularidad en una materia, las formas mas útiles de representar estas ideas, las analogías mas poderosas, ilustraciones, ejemplos, explicaciones y demostraciones - en una palabra, las formas de representar y formular el contenido que lo hace entendible a los demás...comprender lo que hace difícil o fácil el aprendizaje de una idea; las concepciones y preconcepciones que los estudiantes de diferentes edades y antecedentes llevan al proceso de aprendizaje..."

Optamos por interesarnos en el conocimiento didáctico de las fracciones dada la red de relaciones que entrelaza a éste tópico matemático con diversas componentes del conocimiento matemático, y su relevante significación conexa.

Por otra parte, entendemos la planeación como una reflexión hacia una toma de decisiones, desarrollada en los dos momentos considerados por Jackson (1968): la fase preactiva y la fase interactiva. Más profundamente, desbordamos la programación clásica de objetivos, medios y actividades y nos asentamos en un diseño instruccional hacia la realización de un proyecto curricular personal sujeto a revisión crítica, esto es, un "Plan de Acción o Plan de Trabajo" sostenido en cuatro "columnas" (Martínez y Salinas, 1998): Análisis del sentido del Proyecto cultural oficial (adecuación de los documentos administrativos); Principios de procedimiento (¿Qué hago?, ¿porqué?); Manipulación de contenidos (selección y organización del contenido curricular) y Reflexión sobre actividades-marco (¿qué es una actividad?, clases de actividades, diseño de actividades)

UNA CARACTERIZACION DEL CONOCIMIENTO DIDACTICO DE LAS FRACCIONES

Consideramos importante establecer un marco de referencia con el cual comparar el conocimiento didáctico de las fracciones expresado en las programaciones. Haremos un barrido de lo que bien podríamos llamar "conocimiento didáctico para las fracciones".

Desde la noción de currículo como un plan de formación, se sugiere incorporar en Programas de Formación de Profesores de Matemáticas de Secundaria asignaturas como: Historia de la Matemática, Teorías del Aprendizaje de las Matemáticas, Filosofía de la Matemática, Fenomenología Didáctica de las Estructuras Matemáticas, Bases Teóricas para el Currículo de Matemáticas y Análisis Didáctico del Currículo de Matemáticas de Secundaria. *"Estas disciplinas* [las anteriormente mencionadas] *aportan la formación necesaria y los elementos de análisis adecuados para la planificación y realización de su trabajo profesional* [del profesor de secundaria]*; es decir, aportan la formación teórica necesaria para **el conocimiento didáctico del contenido** de las matemáticas de secundaria",* Rico (1997).

El ente que responde a esta formación teórica necesaria este autor lo ha estructurado en los llamados organizadores curriculares: Aspectos Históricos, Fenomenología, Sistemas de Representación, Errores y dificultades y Materiales y Recursos (Rico, 1997). Usaremos estos referentes ya que con base en ellos se posibilita el tratamiento de contenidos para la enseñanza y se consigue darle organización y estructura al proceso educativo. Paralelamente describiremos las categorías que emergen de este análisis teórico.

1. Aspectos Históricos

Iniciemos por clarificar dos de los términos claves al abordar este contenido matemático: fracción y número racional.

<u>Definición 1.</u> En N x N, decimos que (a,b) R (c,d) con b y d distintos de 0, sii a.d = b.c

<u>Definición 2.</u> Así, N x N/R se llamará "conjunto de números racionales"; y cada clase, un número racional. Un par representante de la clase, se llamará "fracción". Al conjunto se le nombra Q^+.

Estamos interesados en auscultar elementos que puedan incidir en un análisis didáctico; de cómo la noción de fracción al desarrollarse a lo largo de la historia implica reflexiones educativas. La historia como una fuente de información para uso didáctico. Recordemos que así como el hombre empezó a contar a partir o con los números naturales, empezó a medir con los números racionales cuya idea fundamental históricamente hablando son las fracciones. De hecho la agrimensura está considerada dentro de las raíces de los mismos. Recordemos también que el término fracción viene del latín ***fractio*** que significa romper. El verbo ***fraccionar*** sugiere romper en partes iguales; y que se reconoce una relación de los ordinales con las fracciones dando lugar a la denominación de éstas. Iniciemos pues, un recorrido sucinto por algunas de las grandes civilizaciones cuyo aporte al conocimiento es reconocido:

Los babilonios a partir del uso de su sistema de numeración sexagesimal conectaron con las fracciones, y lo hicieron con relación al tiempo por ejemplo con "½ día" y otros. Nótese que 60 goza de una buena gama de divisores que permiten mostrar sus fracciones con números enteros. Además hoy día se mantienen tanto el sistema horario como las medidas angulares asociadas. En el antiguo Egipto se trabajó casi exclusivamente el uso de las fracciones unitarias consecutivas para la representación de cantidades no enteras. Por ejemplo 2/5 lo escribían 1/3 y 1/5 que en realidad es la interpretación de la suma correspondiente. Gairín (1998), considera que: "las fracciones egipcias surgen en el contexto de la

resolución de problemas de reparto y son una adaptación del sistema de numeración a la representación de cantidades no enteras" (sistema de numeración fraccional?). El interés es si el uso de las fracciones unitarias puede ser hoy día didácticamente válido: ¿Un sistema de representación de 2/n que usa fracciones unitarias ayuda a la comprensión?, ¿Mejor a partir de fracciones unitarias iguales (1/n), o en su otra forma conocida: 2/n = 1/n + 1/2n + 1/3n + 1/ 2.3.n ? ¿Qué tipo de estrategia didáctica podemos elaborar a partir de esto? ¿Qué tan útil resulta para nuestros alumnos este tipo de descomposición? ¿Qué hay con la clase de reparto considerado (igualitario, no igualitario)?
Entre los griegos son Euclides (libros V, VII y VIII) y Pitágoras a quienes mas se asocia a la noción de fracción. El primero porque la define y además trabaja propiedades de ésta; el segundo por relacionar la fracción con la música (sonidos armónicos). También se reconoce a los Pitagóricos el haber detectado y trabajado las "razones inconmensurables" gérmen de lo que posteriormente serán los números irracionales. Aceptado el legado árabe con nuestro sistema de numeración indoarábigo, se conoce que los mismos hindúes (siglo VI) notaban a las fracciones con numerador encima del denominador pero sin raya de fracción y que dieron continuidad a la descomposición de unidades fraccionarias. Son los árabes los que introducen las líneas vertical y horizontal para notar fracciones. Finalmente, Fibonacci, Vieta y Descartes, entre otros, requieren de las fracciones en sus diferentes estudios llegando a situaciones tales: "para sumar las líneas BD y GH (segmentos) llamo a la una a y a la otra b y escribiré a/b para indicar la división de a entre b". Es Gauss hacia 1801 quien fundamenta la Teoría de Números, relegando la fracción escasamente a una visión intuicionista. Con Gauss se considera que el cuerpo de los Números Racionales se establece como teoría estructural que se conoce hoy día. (Rico, 1984).
Definimos la categoría **ASPECTOS HISTORICOS (ASH):** Queremos detectar en las programaciones si los estudiantes conservan la historia de los conocimientos matemáticos, su génesis, su evolución, sus etapas críticas, y que consideramos relevantes para procesos de enseñanza aprendizaje. Es rescatar la dimensión cultural e histórica del conocimiento matemático. Las referencias históricas usadas en cuanto a etapas de la humanidad, culturas y civilizaciones antiguas, grandes pensadores, movimientos de reforma, períodos críticos, nos servirán de información al respecto. La presencia del elemento histórico y su frecuencia de aparición serán tenidas en cuenta en este análisis.

2. Aspectos Fenomenológicos:

Asumimos un análisis fenomenológico como la descripción de los fenómenos suceptibles de ser organizados por un objeto matemático y el tipo de relación que tiene el objeto con esos fenómenos. Más concretamente, una visión fenomenológica de la fracción, desde el punto de vista didáctico, nos conduce a la diversidad de usos y significados tanto en el mundo escolar como en el mundo real (fenómenos que la fracción permite organizar). Nos muestra la potencialidad del concepto para diversos contextos y situaciones y en consecuencia nos conduce a las diferentes interpretaciones del objeto matemático analizado.
El uso y significado del número racional es de una gran riqueza: Por ejemplo desde las expresiones del lenguaje cotidiano "1/2 día" ; "1/4 de hora"; "la mitad del dinero" hasta aquellas requeridas para presentar cierta información: "el 64% de la población...."; "pague dos y lleve tres", podemos encontrar cómo una gran variedad de situaciones implícita o explícitamente llevan a la idea de fracción. Para organizar estas apreciaciones se han diferenciado varias significaciones de la fracción. La mas recomendada distingue: parte-todo y medida, cociente, razón y operador. En realidad, ésta tiene su origen desde la clasificación dada por Kieren (1980). Veamos, pues, los distintos significados atribuídos a la fracción y que nos permiten estudiar el uso correspondiente:

2.1. La fracción y la relación parte-todo y la medida

La idea clásica de fracción consiste en dividir un "todo", sea discreto o continuo, en partes "iguales". Se producen partes congruentes (por ejemplo equivalentes en número de elementos o en cantidad de una magnitud dada). Este significado de fracción se observa cuando se vé la relación existente entre el todo y una de sus partes. A este todo se le denomina "unidad". Dentro de las expresiones del lenguaje cotidiano asociadas a este significado están por ejemplo: la mitad de la naranja; ¼ de kilo; es decir donde se describen cantidades y/o valores de magnitudes.
Es la interpretación sobre la cual generalmente se fundamentan los procesos de enseñanza. Llinares (1988) detalla algunas "habilidades" requeridas para tal significado: la noción Piagetiana de inclusión de clases, identificar la unidad sobre la cual se trabaja, conservación de la cantidad y manejar la idea de área (para representaciones continuas).
Es necesario anotar que cuando en los libros (la mayoría lo hace) se presenta al fraccionario como un "partidor" de objetos: panes, dulces, tartas, bananos, naranjas, etc. se están presentando dos acciones que

debemos diferenciar: una acción física y una acción matemática. Entonces surgen las preguntas ¿partes iguales en qué? o ¿iguales de qué? ¿de largas, de anchas, de gruesas, de pesadas...? Quizá esto sirva para entender que los "partidores fraccionarios" no operan sobre los objetos, sino sobre las magnitudes. Cuando se habla de medio vaso de agua, no se piensa en romper el vaso en dos pedazos, sino en que hace referencia a la mitad del volumen de agua que cabe en el vaso. (Vasco, 1988). Parece ser que el sistema de representación que más se adecúa a esta forma de "ver" las fracciones (parte-todo), es el que usa modelos de superficie; esto es, que la representación figural continua por superficies tales como los círculos, los cuadrados y los rectángulos implican el significado de la relación parte-todo.

Para Freudenthal (1995) "las fracciones se presentan si un todo ha sido o está siendo rajado, cortado, rebanado, roto, coloreado, en partes iguales, o si se experimenta, imagina, piensa, como si lo fuera" Con respecto al todo, lo considera discreto o continuo, definido o indefinido y estructurado o carente de estructura.

"enfocar las fracciones desde el punto de vista de "parte-todo" es algo bastante limitado no solo fenomenológicamente sino también matemáticamente- este enfoque produce solo fracciones propias" (Freudenthal, 1995). Esta posición de Freudenthal es uno de los serios cuestionamientos a los procesos de enseñanza basados en parte-todo. Respecto de los obstáculos y dificultades que acarrea este significado de las fracciones volveremos en el apartado de errores y dificultades.

Otro uso que se suele hacer de la fracción asociada a parte-todo, es el que muestra la fracción como "comparador" de objetos concretos. Por ej: "Juan gana la mitad que Pedro" (se comparan salarios: objetos respecto a número o valores de magnitud); mientras que en "el sueldo de Juan es la mitad que el de Pedro" se comparan los propios números o valores de magnitudes. Finalmente diríamos que dos aspectos de importancia en esta significación de la fracción es distinguir el proceso de ir de la parte al todo y su inverso, es decir del todo a las partes. Un sistema de representación adecuado puede facilitar estos dos procesos. Resumiendo, fijamos la categoría **FENOMENOLOGIA INTERPRETACION PARTE-TODO Y LA MEDIDA (FIP):** Es la interpretación donde la fracción muestra o indica la relación existente entre una parte y el todo (el total de las partes); aparece cuando consideramos un todo (discreto o continuo) dividido en partes "congruentes" (iguales medidos en superficie o en número de "elementos u objetos"). Aquí la fracción es "la parte de una unidad" previamente definida; es decir es fracción de un elemento.

2.2. La fracción como cociente

T. E. Kieren (1980) señala que para el niño que está aprendiendo a trabajar con las fracciones, el dividir una unidad en cuatro partes y coger tres (3/4) resulta ser un problema diferente del hecho de dividir tres unidades entre cuatro personas, aunque la porción resultante sea del mismo tamaño.

La representación mas general de la fracción como a/b conduce a la idea inmediata de cociente de dos números: "a unidades en b partes iguales" con lo cual aparece la noción de "reparto" en cantidades iguales. Se enfatiza en repartos igualitarios, a pesar de que físicamente se pueda llevar a cabo la acción contraria. "En la constitución mental de todas las clases de magnitudes, repartir en partes equitativas me parece un eslabón importante – más importante que lo que los psicólogos investigan bajo el nombre de conservación" (Freudenthal, 1995). Gairín (1998) presenta dos técnicas de reparto: reparto en varias fases y reparto en una sola fase. En la primera a cada persona se le asigna una parte de unidad (de un tamaño determinado) y con lo que queda por repartir se repite el proceso, hasta agotar lo que se pretende repartir. Termina siendo esto una suma de fracciones unitarias distintas (partes alícuotas de la unidad de tamaños diferentes). En la segunda, cada una de las a unidades se fracciona en b partes iguales y cada individuo recibe una parte de cada una de las a unidades; es decir, a cada participante le corresponden a partes de tamaño 1/b unidad.

En esta significación de la fracción, es notable la exigencia o necesidad de que las partes que le corresponden a cada persona sean "iguales", con lo cual pueden generarse dudas en los alumnos al efectuar repartos que en su versión final aún no sean reconocidas como "iguales"; al respecto Streefland (1991) muestra las siguientes 3 respuestas o formas de reparto para la fracción ¾ en un contexto de 3 pizzas para 4 niños:

a. cada niño recibe: ¼ de pizza + ¼ de pizza + ¼ de pizza
b. cada niño recibe: ½ pizza + ¼ de pizza
c. dos niños reciben: 1- ¼ de pizza ; y los otros dos niños reciben: ½ pizza + ¼ pizza

Otra lectura de las fracciones como cociente conduce a los racionales como estructura algebraica. Esto es, las fracciones (números racionales) como elementos de la forma b/a, con a y b números naturales (a distinto de cero) que resultan ser la solución de la ecuación $a.x = b$. Esta visión de las fracciones como elementos de un cuerpo (estructura algebraica) no se encuentra relacionada al pensamiento natural de los alumnos. La propia naturaleza de las estructuras algebraicas requiere (entre otros aspectos) el desarrollo de la abstracción y generalmente lo uno y lo otro se presenta en niveles mas superiores. Para captar la información asociada a esta interpretación de la fracción que aparezca en las programaciones resumimos todo lo anterior en la categoría **FENOMENOLOGIA INTERPRETACION COCIENTE (FIC):** Cuando una fracción se relaciona directamente con la operación división sugerida por ella, estamos dándole una interpretación de cociente. Un cociente de dos números.

2.3. La fracción como razón

Otra interpretación de la fracción es la que usamos para comparar situaciones: una relación entre dos números naturales que son las medidas de dos cantidades asociadas. En este caso, no se habla de partir o fraccionar. Mas aún, en este tipo de significado de la fracción no existe definido un todo, o una unidad. Cuando hay una relación entre a y b (una razón), todo cambio en a producirá un cambio en b. Algunos de los contextos donde se presenta este uso de las fracciones están asociados a mezclas y aleaciones, comparación de alturas, escalas de mapas y planos, recetas de cocina, etc. Dos de las formas más expeditas de "ver" la fracción como razón están en la probabilidad y en los porcentajes. Si vemos la razón como una forma de comparar, precisamente la probabilidad es una manera de comparación todo-todo (casos favorables vs. casos posibles). Los porcentajes también se suelen asociar con comparación parte-todo; pero vistos como relaciones entre conjuntos, un 20% de rebaja sobre un precio de 300 pts por ejemplo nos permite hablar de la misma relación de 20 a 100 que de 60 a 300 (tomando 3 subconjuntos de 100 partes).
Toda razón entre dos cantidades determina una proporcionalidad entre las cantidades de la misma magnitud. La importancia de la proporcionalidad en la ciencia y la técnica, se observa en varios conceptos de física y de química como velocidad, aceleración, densidad, presión, concentraciones, dilataciones. Todos estos son nombres dados a relaciones de proporcionalidad. Ubicamos una nueva categoría: **FENOMENOLOGIA INTERPRETACION RAZON (FIR):** Si la fracción se usa para mostrar la relación entre dos cantidades de determinada magnitud, es decir se establece un índice de comparación entre esas partes, se habla de la fracción como una razón. En estos casos, no existe una unidad, un todo, que permita "ver" la fracción. Se asocia esta interpretación a la relación parte-parte y a la relación conjunto a conjunto.

2.4. La fracción como operador

Se trata de la idea de fracción como transformador. La fracción actúa a partir de un estado inicial transformándolo en un estado final. Se asocia directamente a multiplicaciones y divisiones sucesivas (independiente del orden). En este sentido, se puede hablar de la fracción como expresando un orden de ejecución (que en el resultado final resulta ser indistinguible). Ejemplos de este uso de la fracción lo observamos en "los ¾ de una clase son niños" o "el 25% de descuento sobre 3000 ptas". Notemos que en el segundo caso, el porcentaje también se asocia como operador, pues en este caso para hallar la cantidad a descontar será necesario multiplicar por 25 y dividir por 100 (o a la inversa). En general, de la fracción como operador se dice que actúa como "reductor o ampliador proporcional del objeto sobre el que se aplica" (Gairin, 1998); o "ciertos monstruos imaginarios que achican o agrandan a las víctimas que se les acerquen" (Vasco, 1988).
Definimos otra categoría como **FENOMENOLOGIA INTERPRETACION OPERADOR (FIO):** Cuando en las programaciones aparezca por ejemplo la fracción asociada a la transformación de estados o calculando porcentajes de cantidades.

Con relación a las categorías establecidas para la componente Aspectos Fenomenológicos, cuantificaremos las diferentes interpretaciones junto con la frecuencia de uso correspondiente presentadas en las programaciones.

3. Sistemas de Representación

Consideramos las representaciones como los símbolos, íconos, dibujos, y expresiones que usamos para referirnos a un objeto/concepto o a sus propiedades. Diferenciando que la representación de un objeto/concepto no es el objeto/concepto en sí mismo, pero que dicha representación nos permite acercarnos a la comprensión del objeto/concepto. Establecemos aquí siete categorías a partir de considerar las representaciones en los aspectos figural, numeral y literal. Usamos como base los Principales Sistemas de Representación de la Fracción (Ver en Llinares, 1988; Castro, 1997; Morcote, 1999)

Las categorías que siguen buscan captar información sobre representaciones o modelos externos. Consideramos como modelos externos los que "tienen un trozo o soporte físico tangible, aun cuando dicho soporte pueda llegar a alcanzar grados de abstracción elevados" (Castro y Castro 1997). Desde la noción de representación, modelo y visualización el interés se centra en capturar la información relativa a la amalgama de sistemas de representación que se encuentran ligados a un mismo concepto, para el caso "fracción", enfatizando la distinción entre el objeto matemático y su representación. Para ello usamos los principales sistemas de representación reconocidos actualmente. "Dominar un concepto matemático consiste en conocer sus principales representaciones, el significado de cada una de ellas, así como operar con las reglas internas de cada sistema; también consiste en convertir o traducir unas representaciones en otras, detectando qué sistema es mas ventajoso para trabajar con determinadas propiedades" (Castro y Castro 1997). Para todos los sistemas de representación queremos analizar su frecuencia de aparición. Distinguimos las representaciones figural, numérica y literal, pero cada una de éstas se puede presentar de varias formas. Veamos las categorías definidas y la codificación establecida:
REPRESENTACION FIGURAL CONTINUA SUPERFICIE (RFCS): Usamos este tipo de representación de la fracción, asociado a la noción de superficie; bien sea en figuras geométricas circulares o poligonales en general. Programaciones que usan figuras y áreas de cuadrados, rectángulo, círculos, etc. como modelos, como esquemas para representar contenidos asociados a fracciones.
REPRESENTACION FIGURAL CONTINUA LINEAL (RFCL): Cuando el modelo para representar la fracción es la recta numérica. Hace ejecutar la acción de asociación o asignación de un punto de la recta de números reales a cada fracción (más exactamente la relación biunívoca latente) con lo cual la equivalencia de fracciones se hace más explícita en tal contexto.
REPRESENTACION FIGURAL DISCRETA (RFD): Si la representación usada se refiere a conjuntos de cantidades discretas. En un contexto discreto la noción de fracción representada también es suceptible de detectarse en las programaciones.
REPRESENTACION NUMERAL FRACCION (RNF): Es la clásica y conocida representación a/b con la cual se identifica a la fracción la mayoría de veces. Evidentemente su uso es el mas generalizado. La intensidad de su uso en las programaciones será reconocida en el análisis pertinente.
REPRESENTACION NUMERAL PORCENTAJE (RNP): Otra de las representaciones de los racionales, para nuestro caso representación de la fracción, es la que echa mano de la simbolización con los porcentajes. Aceptamos el uso tanto del símbolo " % " como de la expresión "por ciento".
REPRESENTACION NUMERAL DECIMAL (RND): El uso o la aparición de los números decimales en las programaciones también son de nuestro interés. Nos interesa el tratamiento y la atención que se presenta a este otro sistema simbólico externo de los racionales (Vasco, 1996), en particular en su relación con las fracciones.
REPRESENTACION LITERAL (RLI): Un último sistema de representación cuantificable que tenemos en cuenta para la categorización se refiere a las expresiones literales presentes en las programaciones que permiten "escribir y leer" de otra forma las fracciones. Se trata del uso de palabras escritas: *tres cuartos, tres cuartos de, tres de cuatro, tres cuartas partes, proporción de tres a cuatro*.

Para todas las categorías pertinentes a sistemas de representación, observaremos en las programaciones el número de representaciones usadas y la frecuencia correspondiente.

4. Errores y dificultades

Establecemos la categoría **ERRORES Y DIFICULTADES (EYD):** A través de ésta categoría pretendemos observar si las programaciones se refieren a errores y/o dificultades en la comprensión del concepto trabajado. Vemos importante cuantificar ésta información por cuanto consideramos que los errores en matemáticas podrían recibir un tratamiento didáctico. Aceptando que "las dificultades se conectan y refuerzan en redes complejas que se concretan en la práctica en forma de obstáculos y se manifiestan en los alumnos en forma de errores" (Socas, 1997) parece acertado analizar las fuentes y causas posibles de los errores de los alumnos y tratamientos adecuados a ellos. Entre los mas conocidos relacionados con el contenido matemático que nos ocupa, encontramos aquel que ocurre para la suma de fracciones y que se opera sumando numeradores y denominadores; o la dificultad presentada para representar el todo a partir de la información de una de sus partes; o la duda sobre la unidad que provoca la pregunta ¿Cuánto representa la parte sombreada? en diagramas reticulados en que aparece más de una unidad.
Registraremos conjuntamente el número de errores y el número de dificultades que sean contemplados.

5. Materiales y Recursos

Finalmente, establecemos una categoría para **MATERIALES Y RECURSOS (MYR):** En la programación de clases quiere ser observada la utilización de recursos manipulativos. Consideramos como tales, aquellos elementos tangibles o nó, que posibilitan la interacción en el aula, que permiten establecer modelos por analogía, que sugieren situaciones (algunas de ellas simuladas) que ayudan a acceder a la comprensión y significatividad del objeto matemático trabajado. Consideramos los materiales y recursos didácticos, desbordando los clásicos tiza, tablero y voz. Un simple folio puede dar lugar a una explotación como material estructurado a efectos y fines de aprendizaje matemáticos determinados. Los puzzles, dominós, calculadora, canicas, material comestible y muchos otros juegos deberían ser utilizados con fines didácticos. Para el análisis, tenemos en cuenta como materiales y recursos, sólo aquellos diferentes a los tres clásicos mencionados. Aunque no hacemos la distinción correspondiente, entendemos por recursos cualquier material, diseñado o nó para el aprendizaje de un concepto, que se menciones y use en las programaciones de clase.

CONCLUSIONES Y PERSPECTIVAS

En resúmen, las categorías empleadas para el conocimiento didáctico del contenido son: Fenomenología Interpretación Parte-todo y la Medida: FIP; Fenomenología Interpretación Cociente: FIC; Fenomenología Interpretación Razón: FIR; Fenomenología Interpretación Operador: FIO; Materiales y Recursos: MYR; Aspectos Históricos: ASH; Representación Figural Continua Superficie: RFCS; Representación Figural Continua Lineal: RFCL; Representación Figural Discreta: RFD; Representación Numeral Fracción: RNF; Representación Numeral Porcentaje: RNP; Representación Numeral Decimal: RND; Representación Literal: RLI; Errores y Dificultades: EYD.

Con este instrumento estamos analizando las programaciones de los estudiantes, tratando de estudiar los aspectos que se consideran, dado que la fracción es el concepto matemático que se aplica en todas las manifestaciones fenomenológicas y se representa de todas las formas señaladas. Para su enseñanza se pueden (y deben) emplear los materiales existentes y los profesores tienen que conocer los principales obstáculos así como los errores mas frecuentes con objeto de comprender más rápidamente las respuestas de los alumnos. Todas estas informaciones nos permitirán diseñar actividades de formación de profesores que hagan más significativo el conocimiento didáctico del contenido a los futuros profesores.

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

Bromme, R. (1994): “Beyond subject matter: A psychology topology of teachers’ professional knowledge”. En R. Bielher, R. Scholz, R. SträBer y B. Winkelman (Eds) *Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline.* Dordrecht: Kluwer Acdemic Pb

Castro, E. y Castro, E. (1997): Representaciones y Modelización. En *La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria.* Horsori: Barcelona

Freudenthal, H. (1995). *Fenomenología didáctica de las estructuras matemáticas.* CINVESTAV: México. (Traducción de L. Puig)

Gairin, J. (1998): *Sistemas de Representación de números racionales positivos.* Un estudio con Maestros en Formación. Tesis Doctoral inédita. Universidad de Zaragoza.

Jackson, P.W. (1968): *Life in Classrooms*, New York, Holt, Rinehart and Winston

Kieren, T.E. (1980): The rational number construct-its elements and mechanisms. *Recent Research on Number Learning.* Columbus, Ohio ERIC/SMEAC

Llinares, S. y Sánchez, V. (1988): *Fracciones.* Síntesis: Madrid.

Llinares, S. y Sánchez, V. (1990): “El conocimiento profesional del profesor y la enseñanza de las matemáticas”. En S. Llinares y V. Sánchez (Eds), *Teoría y Práctica en Educación Matemática.* Alfar: Sevilla.

Llinares, S. (1991): *La formación de profesores de matemáticas.* GID, Universidad de Sevilla.

Martínez, J. y Salinas, D. (1988). *Programación y evaluación de la enseñanza: Problemas y sugerencias didácticas.* Mestral Libros: Valencia

Morcote, O. (1999): “¿Cómo se usan las fracciones en el periódico?”. En M. Berenguer y otros (Eds), *Investigación en el aula de matemáticas. Matemáticas en la Sociedad*. SAEM THALES: Granada.

Rico, L et al. (1984): Estudio metodológico del número fraccionario en el 6º nivel de E.G.B.. *Epsilon*, 3, Diciembre, pág 3-24

Rico, L et al. (1997): *La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria.* Horsori: Barcelona.

Rico, L. et al. (1997): *Bases Teóricas del Currículo de Matemáticas en Educación Secundaria.* Síntesis: Madrid.

Shulman, L. (1986): “Those Who Understand: Knowledge Growth in Teaching”. *Educational Researcher,* Febrero, pp. 4-14.

Socas, M. (1997): Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la Educación Secundaria. En *La Educación Matemática en la Educación Secundaria*. Horsori: Barcelona

Streefland, L. (1991): *Fractions in realist mathematics education. A paradigm of developmental research.* Kluwer Academic Publishers: Dordrecht

Vasco, C. (1988): *“El archipiélago fraccionario”*. Un Nuevo Enfoque para la Didáctica de las Matemáticas, Vol 2. Ministerio de Educación Nacional, Bogotá.

Vasco, C. (1996): Una teoría de procesos y sistemas genérios en las matemáticas y en la educación matemática*. Actas ICME-8*, Sevilla