

# APLICACIÓN DEL ANÁLISIS DE TEXTOS MEDIANTE TÉCNICAS MULTIVARIANTES AL ESTUDIO DEL CAMBIO DE CONCEPCIONES SOBRE LAS MATEMÁTICAS, SU ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE

**Pablo Flores, Carmen Batanero y Juan D. Godino**

Departamento de Didáctica de la Matemática  
Universidad de Granada

## 1. INTRODUCCIÓN

La reforma de la enseñanza de la matemática que está en curso (NCTM, 1991, MEC, 1992) propone una matemática abierta a todos los alumnos y por un método de enseñanza participativo. Estos cambios están fundamentados en una evolución o cambio de la concepción del conocimiento matemático (Ernest, 1991), que da cuenta de la matemática como un producto social (Bishop, 1988), emergente del campo de problemas que dan sentido a los conceptos, y relativa a la institución en el seno de la cual alcanza el estatuto de conocimiento a enseñar (Godino y Batanero, 1994).

También la consideración del aprendizaje está cambiando dirigiéndose a identificarse con desarrollar destrezas de "*hacer matemáticas*", bajo una perspectiva constructivista (Lerman, 1994). En esta perspectiva se considera que es el alumno quien construye su conocimiento, y que este conocimiento es una visión personal surgida de su relación con el saber. Pero esta relación con el saber está influenciada por las creencias y concepciones del aprendiz.

La formación de profesores de matemáticas tiene que tener en cuenta estos cambios, y tratar de hacer partícipes de ellos a los estudiantes. Pero la caracterización epistemológica de la matemática y la visión constructivista del aprendizaje choca con los usos epistemológicos y educativos en los que se han educado los profesores actuales. La misión de los cursos de formación es proponer actividades que produzcan un cambio de perspectiva en los futuros profesores sobre estos temas. Para ello habrá que partir de la visión que tienen estos estudiantes

para profesor, especialmente de las concepciones y creencias sobre las matemáticas y sobre su enseñanza y aprendizaje.

En la licenciatura de matemáticas de la Universidad de Granada, estamos impartiendo la asignatura *Prácticas de Enseñanza de Matemáticas en Institutos de Bachillerato*, en el seno de la que se produce el primer contacto con la enseñanza de estos estudiantes. Interesados en estudiar la influencia que las prácticas de enseñanza tienen en ellos estudiantes, hemos planteado una investigación para poner en claro las concepciones y creencias de estos estudiantes y las diferencias que existen entre las creencias antes y después de realizar el período de prácticas en los centros de enseñanza (Flores, 1995).

El estudio de las creencias y concepciones de los profesores es un área de investigación de interés creciente que se inscribe en una perspectiva interpretativa de la investigación (Thompson, 1992). Para describir las creencias se están empleando una variedad de técnicas, aunque los investigadores se van decantando por métodos indirectos (Pajares, 1991, Thompson, 1992, Ponte, 1992). En ellas se emplean elementos evocadores para poner en común, con los sujetos investigados, los términos de descripción y los problemas ligados al conocimiento y a la enseñanza y aprendizaje.

Para hacer que aparezcan a la luz las creencias y concepciones de nuestros estudiantes, nuestra investigación ha empleado el comentario de un texto en el que se describen los dilemas epistemológicos y didácticos que caracterizan la reforma de la enseñanza de las matemáticas y los relacionan con la enseñanza que ellos han tenido. Partimos de la hipótesis de que los estudiantes van a reaccionar a los argumentos y conflictos planteados en el texto, ya que no le son nuevos, pues han empezado a plantearseles a lo largo de su experiencia docente y discente. Esperamos que los estudiantes sean especialmente sensibles a algunos de estos argumentos, y los van a reflejar en su comentario del texto. Para llevar a cabo la tarea elegimos como texto para

comentar un fragmento del artículo de Moreno y Waldegg (1992) *Constructivismo y Educación matemática*. En este fragmento se presenta la oposición entre *el realismo y el constructivismo* epistemológico y su repercusión en la forma de concebir la enseñanza desde una y otra postura.

Hemos comenzado por definir unas categorías, de acuerdo con las cuales hemos realizado un análisis del contenido del artículo (Weber, 1986; Manning y Cullum-Swan, 1994). Posteriormente hemos aplicado métodos multivariantes a la tabla de contingencia surgida del análisis de datos. Este análisis multivariante nos ha suministrado tres factores con arreglo a los cuales hemos caracterizado la estructura del texto respecto. Posteriormente hemos aplicado el mismo tipo de análisis a las respuestas de los estudiantes. Los datos obtenidos de las mismas se proyectaron sobre la estructura del texto, con lo que hemos obtenido una caracterización de las creencias y concepciones de los estudiantes. Para estudiar el cambio de estas concepciones y creencias hemos hecho que los estudiantes realicen el comentario en dos ocasiones, al comienzo y al final del curso, comparando las respuestas de los estudiantes en esas dos ocasiones.

Pasamos a presentar la investigación. Para ello comenzamos por

Dada la dificultad de estudiar las concepciones y creencias, el estudio que presentamos tiene interés no sólo desde el punto de vista de los resultados sobre la caracterización de las concepciones de los profesores. Metodológicamente ofrecemos un ejemplo de análisis que muestra la potencia de las técnicas multivariantes como ayuda en la síntesis, determinación de relaciones e interpretación de sistemas complejos de datos cualitativos. En opinión de Gras (1992) el análisis multivariante constituye una ruptura epistemológica con la estadística clásica que concierne a la vez a los objetivos, los medios técnicos para alcanzarlos, el tipo de datos tratados, los sujetos de análisis, los métodos matemáticos empleados y los conceptos implícitos en los mismos. Como señalan Escofier y Pagés (1988, p. 1), estas técnicas "*permiten utilizar las facultades de percepción que usamos a diario: sobre los gráficos del análisis factorial, se ven en*

*el propio sentido del término (con los ojos y el misterioso análisis que nuestro cerebro hace de una imagen) reagrupamientos, oposiciones, tendencias imposibles de discernir directamente sobre una tabla de datos, incluso después de un examen prolongado".*

## 2. DESCRIPCIÓN DEL INSTRUMENTO DE ANÁLISIS: LA REJILLA

Las creencias y concepciones epistemológicas que estamos estudiando se sitúan en una serie de planos de reflexión que conviene diferenciar. Algunas de ellas se refieren al conocimiento matemático, otras se refieren a la práctica de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, y un tercer grupo se refieren al conocimiento sobre didáctica de las matemáticas.

Para realizar el análisis de contenido del texto propuesto y de los protocolos de los estudiantes vamos a considerar la variable categórica que denominamos **plano** con los siguientes cinco valores: Los dos primeros corresponden a la reflexión epistemológica sobre el conocimiento matemático (*planos epistemológico y psicoepistemológico - o cognitivo-epistemológico*). Los dos siguientes a la reflexión sobre la enseñanza (*didáctico, y psicodidáctico o cognitivo-didáctico*). El último, a la reflexión epistemológica sobre el conocimiento didáctico (*epistemología de la didáctica*)

En cada plano hemos destacado una nueva variable que describe los etapas de interacción del sujeto con los problemas. En primer lugar, consideramos la forma en que los sujetos interactúan con el conocimiento, después la caracterización del conocimiento y, por último, la forma en que se valida. Esto ha dado lugar a una nueva variable que denominamos **etapa**, cuyos valores son: *gnoseológica, ontológica y validativa*.

**Tabla 1:** Rejilla para clasificar las unidades de información según Planos y Etapas.

P L A N O S		E T A P A S		
		Gnoseológica	Ontológica	Validativa
	Episte- moló- gico	Cómo se llega al conocimiento matemático Es descubrimiento/creación <b>(Categoría 1)</b>	Qué son las matemáticas Dónde están Características del conocimiento matemático Matemática bella/matemática útil <b>(Categoría 6)</b>	Quién establece la validez del conocimiento matemático Criterios para validar Racionalidad matemática en sistemas formales/aceptabilidad histórica <b>(Categoría 11)</b>
Psico- lógico	Psico- episte..	Cómo llega el sujeto a incrementar su conocimiento matemático <b>(Categoría 2)</b>	Qué es incrementar el conocimiento matemático del sujeto <b>(Categoría 7)</b>	Criterios para considerar que el individuo ha incrementado su conocimiento matemático <b>(Categoría 12)</b>
	Psico- didác.	Cómo llega el sujeto a aprender matemáticas <b>(Categoría 3)</b>	Qué es aprender matemáticas <b>(Categoría 8)</b>	Quién valida el aprendizaje matemático Cómo validar el aprendizaje. Criterios <b>(Categoría 13)</b>
	Didác- tico	Cómo enseñar matemáticas <b>(Categoría 4)</b>	Qué es la enseñanza de las matemáticas <b>(Categoría 9)</b>	Quién establece el curriculum de matemáticas Criterios para establecer el curriculum Quién valida la enseñanza Criterios para validar la enseñanza <b>(Categoría 14)</b>
Episte- molo- gía	de la Didácti- ca	Cómo acceder al conocimiento didáctico <b>(Categoría 5)</b>	Qué es el conocimiento didáctico Cómo es el conocimiento didáctico Características del conocimiento didáctico <b>(Categoría 10)</b>	Quién valida el conocimiento didáctico (sobre enseñanza) Criterios para validar el conocimiento didáctico. <b>(Categoría 15)</b>

En el texto se hace alusión de manera diferenciada a la postura *realista* y a la postura *constructivista*, por lo que para diferenciar la forma en que se caracteriza cada postura hemos definido la variable que llamamos **polo**.

Estos análisis nos han permitido elaborar una tabla de triple entrada o rejilla, que contiene los planos, los procesos o etapas que se producen en cada uno de ellos, y el polo en que se sitúan estas consideraciones. Esta rejilla define una tabla de contingencia tridimensional, cuyas variables y categorías son: Variable **etapa** con las categorías: *acceso*, *objeto* y *validación* (códigos ACCE, OBJE, VALI), variable **plano**, con las categorías: *epistemología*, *psicoepistemología*, *psicología*, *didáctica*, *epistemología de la didáctica* (Códigos: EPIS, SIEP, PSIC, DIDA, EPDI) y variable **polo** con las categorías: *realismo*, *constructivismo* (Códigos: REAL, CONS).

La figura 1 muestra esta rejilla diferenciando los valores de las dos primeras variables: **plano** y **etapa**.

### 3. CARACTERIZACIÓN DE LA ESTRUCTURA DEL TEXTO MEDIANTE EL ANÁLISIS DE CORRESPONDENCIA

Una vez definidas las variables y para estudiar la estructura del texto lo dividimos en unidades de información, e identificamos cada unidad con una posición en la rejilla (según el **polo**, **plano** y **etapa** al que se refiriera). Para mostrar esta asignación veamos algunas unidades del texto y las categorías de la tabla presentada en la figura 1 a que han sido asignadas:

*"El formalismo exige extirpar el significado de los objetos a fin de trabajar exclusivamente con las "formas" y con las relaciones entre dichos objetos que se derivan de la base axiomática de las teorías"*  
Categoría 1: Plano epistemológico, etapa gnoseológica, polo realista.

*El "conocimiento matemático", para la epistemología genética, es resultado de esta reflexión sobre acciones interiorizadas -la abstracción reflexiva-.*

Categoría 2: Plano psicoepistemológico, etapa gnoseológica, polo constructivista

*La tarea del profesor consiste en "inyectar" el conocimiento en la mente del estudiante a través de un discurso adecuado.*

Categoría 4: Plano didáctico, etapa gnoseológica, plano realista

*(El formalismo) que grosso modo, nos presenta a esta disciplina como un cuerpo estructurado de conocimientos*

Categoría 6: Plano epistemológico, etapa ontológica, polo realista

*(El educador constructivista) apelando a las estructuras anteriores de que el estudiante dispone, le permitan asimilar y acomodar nuevos significados del objeto de aprendizaje*

Categoría 8: Plano psicodidáctico, etapa ontológica, polo constructivista

*La didáctica, bajo este punto de vista, busca optimizar la tarea del profesor mediante una especie de combinatoria de contenidos*

Categoría 15: Plano metadidáctico, etapa validativa, polo realista

Contando el número de unidades del texto que encajan en cada casilla de la figura 1 hemos obtenido una tabla de contingencia (tabla 1). A esta tabla le hemos aplicado el Análisis de Correspondencias Múltiple (Greenacre, 1993). Este tipo de análisis extiende el análisis de correspondencias simples a tablas de variables cualitativas clasificadas por tres o más variables y puede considerarse una extensión del análisis de componentes principales a variables cualitativas. La técnica trabaja con las frecuencias relativas condicionales de las categorías de cada variable respecto al resto, es decir, con las filas de la matriz de Burt. De este modo cada categoría de cada variable se representa por un punto en un espacio  $n$ -dimensional ( $n=10$ ). Ello permite definir combinaciones lineales de categorías (de los vectores que unen los puntos correspondientes con el origen), coordenadas de las categorías sobre los ejes y correlaciones entre ejes y categorías (coseno del ángulo que forman).

El análisis ha producido cinco factores con más del 5% de inercia, de los cuales los tres primeros explican el 75,7% de dicha inercia total, por lo que restringiremos el análisis

a estos tres factores. El valor Chi cuadrado obtenido ha sido significativo y la calidad de representación es mayor que 0.879, por lo que creemos que la representación gráfica obtenida reproduce suficientemente las interrelaciones entre el conjunto de categorías de las diferentes variables. Las tabla 2 muestra los resultados obtenidos mediante el paquete de programas BMDP (Dixon y cols., 1993).

**Tabla 1:** Frecuencias observadas de las unidades de información del fragmento del artículo según las variables **etapa**, **plano** y **polo**:

<b>Polo</b>	<b>Plano</b>	<b>Etapas</b>			
		ACCE	OBJE	VALI	TOTAL
Realismo (REAL)	EPIS	4	12	6	22
	SIEP	1	2	0	3
	PSICO	1	0	3	4
	DIDA	5	5	3	13
	EPDI	0	2	2	4
	TOTAL	11	21	14	46
Construc- tivismo (CONS)	EPIS	0	9	0	9
	SIEP	4	9	0	13
	PSICO	3	2	0	5
	DIDA	7	0	0	7
	EPDI	0	0	0	0
	TOTAL	14	20	0	34

En la figura 2 representamos conjuntamente los dos primeros factores. El primero lo podemos denominar **Polaridad realismo-constructivismo** y explica el 36,7% de la inercia total. Las categorías que más contribuyen a la inercia explicada por este eje son: VALI (validación), CONS (constructivismo), SIEP (psicoepistemológico) y REAL (realismo). El



segundo factor *distinción entre acceso y objeto en la variable etapa*, explica el 24.9 % de la inercia total. Las categorías que más contribuyen a definir este factor son: DIDA (didáctico), ACCE (acceso), OBJE (ontológica u objeto) y EPIS (epistemológico). Por último, el tercer factor, explica sólo el 14.2% de la inercia total, por lo que su importancia relativa es mucho menor y no presentaremos las representaciones gráficas. Las variables y valores que más contribuyen a su definición son: PSIC (psicológico) y DIDA (didáctico), las cuales se oponen mutuamente en este eje. Podemos explicar esta oposición por la diferente frecuencia marginal de estas dos categorías de la variable **plano**.

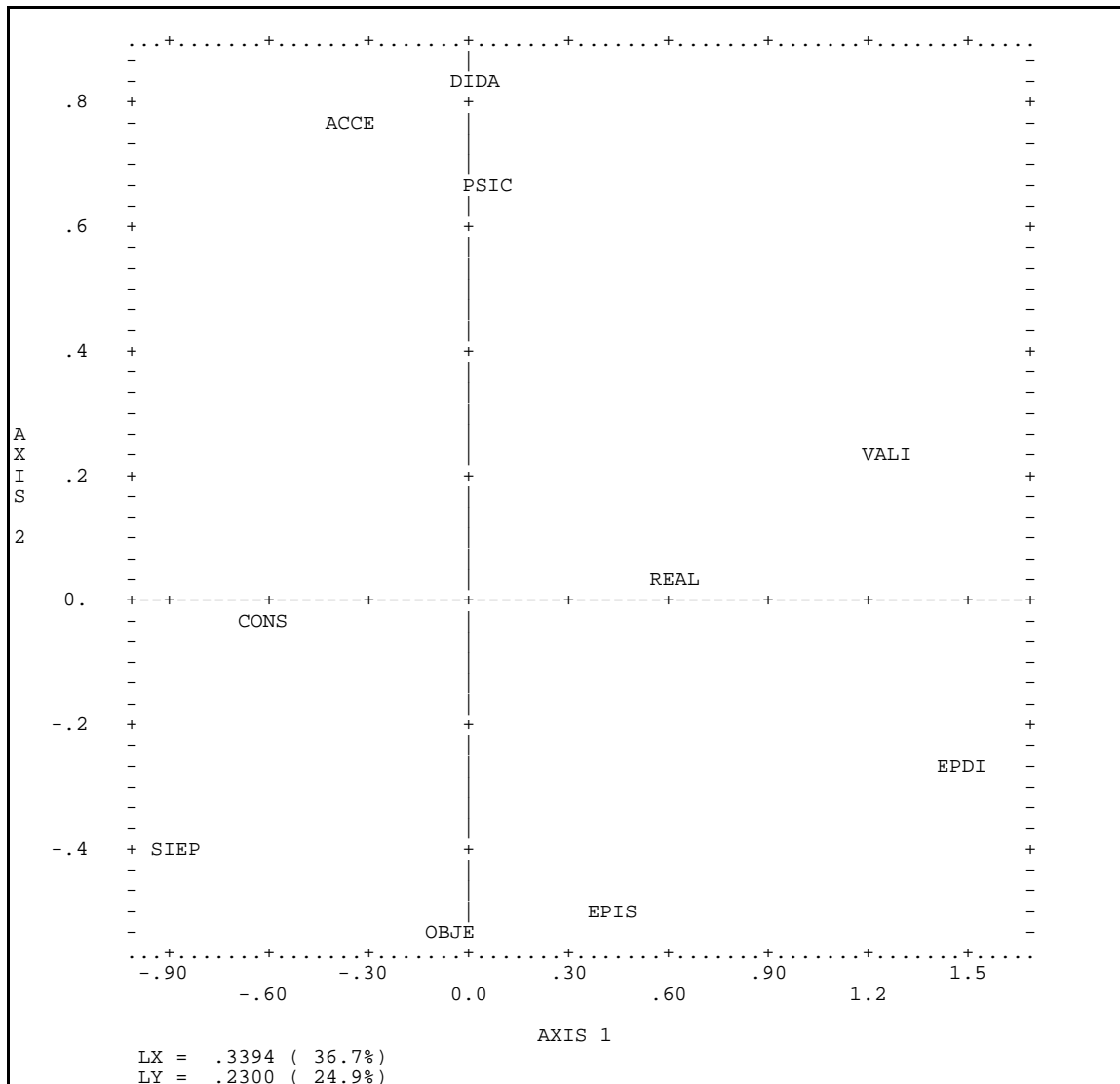
**Tabla 2:** Resultados del análisis de correspondencias

ROW	NAME	MASS	QLT	INR	FACTOR	COR2	CTR	FACTOR	COR2	CTR	FACTOR	COR2	CTR
						AXIS 1			AXIS 2			AXIS 3	
1	ACCE	0.104	0.879	0.093	-0.432	0.208	0.057	0.759	<b>0.643</b>	0.261	-0.124	0.017	0.012
2	OBJE	0.171	0.893	0.064	-0.135	0.048	0.009	-0.547	<b>0.792</b>	0.222	-0.075	0.015	0.007
3	VALI	0.058	0.960	0.115	1.167	<b>0.689</b>	0.234	0.246	0.031	0.015	0.440	0.098	0.086
4	EPIS	0.129	0.916	0.078	0.332	0.182	0.042	-0.486	0.390	0.133	-0.235	0.091	0.054
5	SIEP	0.067	0.973	0.108	-0.957	0.567	0.180	-0.392	0.095	0.045	0.248	0.038	0.031
6	PSIC	0.038	0.967	0.104	0.003	0.000	0.000	0.653	0.154	0.070	1.311	0.619	0.492
7	DIDA	0.083	0.903	0.095	-0.031	0.001	0.000	0.826	0.597	0.247	-0.565	0.279	0.203
8	EPDI	0.017	0.990	0.115	1.405	0.287	0.097	-0.260	0.010	0.005	0.704	0.072	0.063
9	REAL	0.192	0.907	0.064	0.535	<b>0.853</b>	0.162	0.036	0.004	0.001	-0.122	0.044	0.022
10	CONS	0.142	0.907	0.087	-0.724	<b>0.853</b>	0.219	-0.049	0.004	0.001	0.165	0.044	0.029

Este análisis nos ha mostrado que el fragmento del artículo de Moreno y Waldegg (1992) tiene una estructura paralela, en la que cada línea trata uno de los *polos*, líneas paralelas que no tratan por igual las demás variables. Así, se observa que el *polo realista* enfatiza los aspectos prescriptivos (validación de la enseñanza y el aprendizaje, como consecuencia, validación del conocimiento didáctico, y en algún sentido, validación formal del conocimiento matemático). El *polo constructivista* se centra en aspectos psicológicos, evitando entrar en analizar las formas de validar el conocimiento y los procesos de

aprendizaje, que presenta como personales.

**Figura 2:** Estructura del fragmento del texto. Representación gráfica en el plano del primer y segundo factor



El análisis de correspondencias nos muestra además una dimensión que se extiende en la oposición entre las *etapas gnoseológica* y *ontológica*. El tratamiento que el fragmento da a los *planos didáctico y psicológico* es preferentemente *gnoseológico* ( ) cómo se enseña? ) cómo se aprende?), mientras que el tratamiento *ontológico* afecta

preferentemente al *plano epistemológico* en el *realismo* (¿qué es la matemática?), y al *psico-epistemológico* en el *constructivismo* (¿qué es conocer matemáticas?).

Gracias a la rejilla elaborada y a la técnica de análisis de datos utilizada, conocemos mejor la estructura y el contenido del fragmento, y nos encontramos en mejores condiciones para analizar la forma en que los estudiantes resumen el texto y realizan el comentario.

#### 4. ASOCIACIONES PARCIALES Y MARGINALES EN LA TABLA DE CONTINGENCIA DE LOS RESÚMENES DE LOS ESTUDIANTES. SIGNIFICACIÓN ESTADÍSTICA MEDIANTE EL ANÁLISIS LOGARÍTMICO-LINEAL

El comentario de texto fue realizado por 25 estudiantes de quinto curso de matemáticas (especialidad de Metodología) al comienzo y al final del curso, en el contexto de la asignatura *Prácticas de Enseñanza de Matemáticas*. Cada protocolo fue descompuesto en unidades de información, de modo similar a como lo hicimos con el texto comentado, y clasificado según la casilla de la rejilla. Algunas de estas unidades son:

*El formalismo consiste en dar teorías (=axiomas) y ver las relaciones que se derivan.*

Categoría 6: Plano epistemológico, etapa ontológica, polo realista

*En cuanto al modelo de enseñanza, el realismo matemático ... concede un papel pasivo al sujeto*

Categoría 4: Plano didáctico, etapa ontológica, polo realista

De este modo se obtuvieron 25 tablas de contingencia (una por estudiante) y otra tabla similar con los datos agregados del grupo, todas ellas con una estructura análoga a la presentada en la tabla 1, aunque con las lógicas diferencias en las frecuencias de las diferentes celdas, pues según las ideas previas de los estudiantes cada uno concedió un peso mayor o menor a las variables que hemos descrito.

Una vez analizado el texto hemos construido una tabla de contingencia para los datos obtenidos del resumen de cada estudiante en el pre-test y post-test. Sumando los valores de cada variable en el pre-test y post-test, hemos obtenido la tabla 3, que comprende el número de unidades de los resúmenes de todos los estudiantes en cada categoría. Esta tabla nos permite comparar los resultados obtenidos por el grupo completo en pre-test y post-test.

La realización de un análisis multivariante permitirá estudiar la interacción entre las tres variables consideradas: **etapa**, **plano** y **polo**, y entre estas tres y la variable **test** (antes, después). Para ello, el siguiente paso del estudio se ha centrado en el análisis de la tabla 3. Vamos a estudiar sobre esta tabla, no sólo la estructura de las asociaciones de las categorías de las diferentes variables, sino también explorar si los estudiantes han enfatizado una de las categorías de una variable frente a otras. Por ello, en esta fase del estudio se ha aplicado un modelo logarítmico lineal, empleando el paquete estadístico BMDP.

El propósito es estudiar si existen diferencias significativas en las frecuencias de cada categoría en una misma variable y qué asociaciones se dan entre categorías de distintas variables. Ello es posible por los contrastes asociados al modelo que hacen referencia a las distribuciones marginales y condicionadas por una o varias variables. Para ello utilizamos un modelo completo, incluyendo las interacciones hasta orden tres, puesto que el contraste sobre el efecto de todas las interacciones de orden tres dio un resultado significativo ( $\chi^2=115.63$ ,  $p=0.0000$ ) y el estudio de las interacciones de cuarto orden no dio resultado significativo. En la tabla 4 aparecen los resultados de los contrastes de asociaciones parciales y marginales. En esta tabla, llamamos **e** a la **etapa**, **p** al **plano**, **P** al **polo** y **t** al **test**. De esta forma, las interacciones de orden dos sólo contemplan las iniciales de estas variables. Así, **pP**, por ejemplo, es la interacción **plano-polo**.

**Tabla 3:** Frecuencias de cada variable en el total de resúmenes de los estudiantes, clasificadas según test, polo, plano y etapa.

test	Polo	plano	etapa			TOTAL
			acceso	objeto	valida	
antes	realismo	epis	25	99	7	131
		siep	0	13	0	13
		psico	18	0	17	35
		dida	55	21	1	77
		epdi	0	2	0	2
		TOTAL	98	135	25	258
	construc- tivismo	epis	0	57	0	57
		siep	12	76	0	88
		psico	21	27	0	48
		dida	79	0	0	79
		epdi	0	0	0	0
		TOTAL	112	160	0	272
después	realism	epis	19	105	16	140
		siep	0	15	0	15
		psico	16	0	19	35
		dida	45	11	7	63
		epdi	0	2	7	9
		TOTAL	80	133	49	262
	construc	epis	0	61	0	61
		siep	24	64	0	88
		psico	22	25	0	47
		dida	59	0	0	59
		epdi	0	0	0	0
		TOTAL	105	150	0	255

Como resultado, observamos un efecto parcial de cada una de las variables **etapa** y **plano**, aunque no del **polo** y del **test**. Se observa que no hay diferencia global del número total de unidades de información entre *pre-test* y *post-test*, ni tampoco entre *constructivismo* y *realismo*.

Por el contrario, la variable **etapa** presenta importantes diferencias que han sido estadísticamente significativas, como pone de manifiesto el análisis. Las referencias al

*objeto* hechas por los alumnos (578) superan significativamente a la del *acceso* (395) y las dos se diferencian notablemente de la *validación* (74). (Tabla 4)

Asimismo, hay una diferencia significativa entre las diversas categorías de la variable **plano**, correspondiendo la máxima frecuencia a *epistemología* (389) y *didáctica* (278). En una posición intermedia se sitúa la *psicología* (204 como *psicología epistemológica*, y 165 como *psicodidáctica*).

Respecto a las asociaciones marginales han sido estadísticamente significativas las siguientes: **etapa** por **plano**, **etapa** por **polo**, **plano** por **polo**, **etapa** por **polo** por **plano**. Ello quiere decir que se ha encontrado una asociación estadísticamente significativa entre cada una de estas combinaciones de variables.

Influenciados por el contenido del fragmento del texto, los estudiantes han atendido más a los aspectos ontológicos que a los gnoseológicos, y mucho menos a los validativos. Igualmente, la estructura del texto, en el que hemos observado que existen notables diferencias en el número de unidades de cada categoría, ha repercutido en los resúmenes de los estudiantes. Esta influencia de la estructura del texto sobre todas las demás variables podría justificar el que no sean significativas las diferencias entre los resúmenes realizados en el pre-test y en el post-test.

**Tabla 4:** Contrastes de asociaciones parciales y marginales sobre los datos presentados en la Tabla 3

	Asociación parcial		Asociación marginal	
	$\chi^2$	Prob.	$\chi^2$	Prob.
etapa	<b>451.47</b>	0.0000		
plano	<b>485.28</b>	0.0000		
Polo	0.05	0.8295		
test	0.16	0.6878		

ep	580.31	0.0000	<b>584.71</b>	0.0000
eP	106.39	0.0000	<b>109.45</b>	0.0000
et	8.00	0.0183	9.60	0.0082
pP	197.50	0.0000	<b>200.48</b>	0.0000
pt	7.73	0.1019	9.29	0.0543
Pt	0.17	0.6757	0.42	0.5183
epP	141.09	0.0000	<b>140.53</b>	0.0000
ept	10.74	0.0567	14.03	0.0507
ePt	0.00	1.0000	0.51	0.4740
pPt	0.70	0.7054	0.14	0.9861

## 5. ESTUDIO COMPARATIVO DE LA ESTRUCTURA DE LOS RESÚMENES DE LOS ESTUDIANTES CON LA DEL TEXTO

Una vez analizadas las estructuras de asociaciones del texto y de las respuestas de los estudiantes, queremos determinar hasta qué punto se corresponden estas dos estructuras, o bien aparecen algunas diferencias atribuibles a las concepciones de los estudiantes que han influido en los resúmenes que presentan.

Este estudio comparativo vamos a hacerlo en dos fases. En la primera realizaremos un estudio individualizado de las respuestas de cada uno de los estudiantes. Para ello proyectamos, sobre los ejes factoriales del texto, un perfil de las respuestas de cada estudiante como variables suplementarias. Este perfil se define mediante un vector cuyas coordenadas son las distribuciones marginales de las tablas correspondientes al estudiante. Estas variables suplementarias no intervienen en el análisis, sino que simplemente se proyectan sobre los ejes factoriales que se han obtenido en el mismo.

Debido al principio baricéntrico, cada estudiante, considerado como una variable

suplementaria a las estudiadas en el análisis de correspondencia se proyectará en una posición de los ejes que indica el lugar geométrico de las asociaciones que presenta con las diferentes variables que constituyen el eje. Por ello, la proyección de variables suplementarias se considera similar a la regresión múltiple entre variables cuantitativas. Una posición privilegiada sobre un eje es, según Escofier y Pagés (1988) una indicación de la asociación entre la nueva variable y el eje. Debido al número elevado de sujetos hemos separado las proyecciones del conjunto de datos en el pre-test y post-test, para que los gráficos se interpreten con mayor claridad. Ello nos permitirá apreciar los cambios de los sujetos particulares entre pre-test y post-test, así como detectar los casos atípicos, indicativos de concepciones diferenciadas.

La segunda fase es un estudio conjunto del total de los resúmenes de todos los alumnos. Para ello hemos proyectado las distribuciones marginales de la tabla de contingencia del conjunto de los 25 estudiantes. En este caso, para no aumentar el número de gráficos se proyectan sobre los mismos ejes los datos del pre-test y del pos-test.



**Tabla 5:** Resultados de la proyección de los datos individuales de los estudiantes en el pre-test

SROW	NAME	QLT	SUPPLEMENTARY ROWS					
			FACTOR AXIS	COR2 1	FACTOR AXIS	COR2 2	FACTOR AXIS	COR2 3
1	A1	0.995	0.038	0.022	0.142	0.302	-0.013	0.002
2	A2	0.949	-0.221	0.386	-0.210	0.347	0.121	0.115
3	A3	0.890	-0.297	0.416	0.109	0.056	0.162	0.125
4	A4	0.961	-0.210	0.475	0.153	0.251	-0.131	0.184
5	A5	0.870	-0.375	0.615	-0.236	0.244	-0.026	0.003
6	A6	0.968	-0.031	0.011	-0.133	0.197	-0.199	0.441
7	A7	0.994	-0.171	0.025	0.857	<b>0.621</b>	-0.614	0.319
8	A8	0.996	-0.309	<b>0.910</b>	-0.030	0.009	-0.045	0.020
9	A9	0.960	-0.318	<b>0.766</b>	-0.155	0.182	-0.030	0.007
10	A10	0.879	-0.302	<b>0.713</b>	0.099	0.076	0.061	0.029
11	A11	0.922	-0.059	0.022	0.235	0.353	-0.286	0.526
12	A12	0.995	-0.127	0.207	-0.020	0.005	-0.001	0.000
13	A13	0.915	-0.277	0.583	-0.182	0.252	-0.102	0.078
14	A14	0.965	-0.174	0.309	0.123	0.154	-0.073	0.054
15	A15	0.949	-0.195	0.328	0.112	0.108	0.004	0.000
16	A16	0.932	-0.269	0.340	0.347	0.567	-0.036	0.006
17	A17	0.485	-0.117	0.039	0.286	0.229	0.000	0.000
18	A18	0.952	-0.136	0.162	-0.201	0.354	0.164	0.237
19	A19	0.995	-0.103	0.097	0.016	0.002	0.116	0.123
20	A20	0.804	-0.257	0.528	-0.112	0.101	0.060	0.028
21	A21	0.910	-0.032	0.007	0.055	0.022	0.076	0.042
22	A22	0.951	-0.210	0.201	0.356	0.581	-0.171	0.133
23	A23	0.907	-0.188	0.201	0.263	0.394	0.157	0.140
24	A24	0.878	-0.186	0.251	-0.224	0.366	-0.144	0.151
25	A25	0.854	-0.243	0.644	0.012	0.002	-0.008	0.001

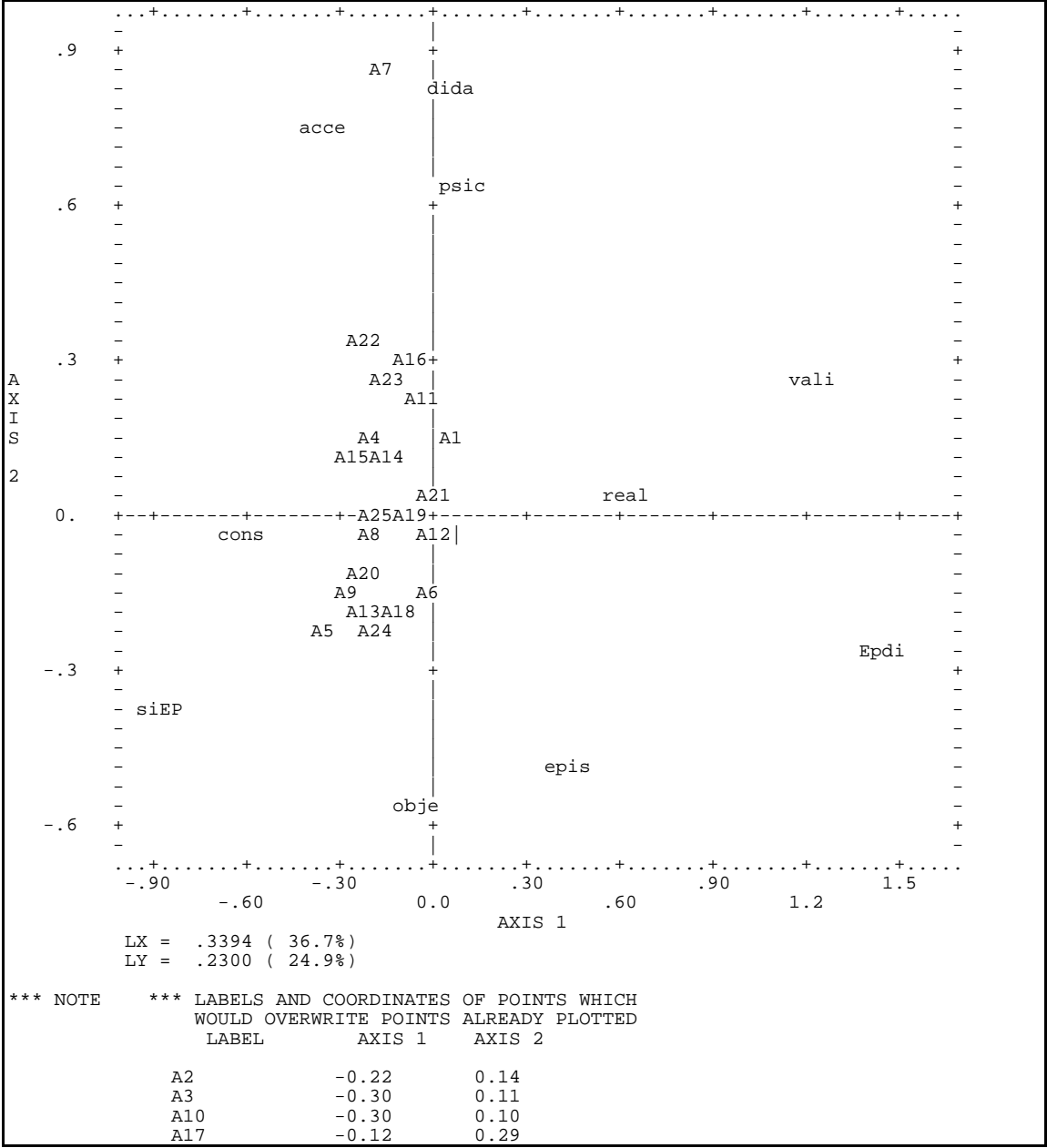
## 5.1. PROYECCIÓN INDIVIDUALIZADA DE LOS ESTUDIANTE ANTES Y DESPUÉS DE LAS PRACTICAS DE ENSEÑANZA

En la tabla 5 presentamos los datos correspondientes a los comentarios que han realizado los estudiantes a comienzo de curso. La calidad de la representación es alta, en general, por encima de 0.854, con excepción del alumno A17. La figura 3 muestra gráficamente esta posición de los estudiantes en relación a los dos factores principales del texto.

En la tabla 5 y la figura 3 se aprecia que los estudiantes se distribuyen a lo largo del segundo factor, no apareciendo gran dispersión respecto al primer eje. Se podría decir que los resúmenes de los alumnos son prácticamente unidimensionales, ya que todos aparecen hacia la parte negativa del primer factor y muy próximos al origen. En todo caso, podremos diferenciar entre los grupos de alumnos con coordenadas positivas y negativas en el segundo factor. No obstante, quitando el caso atípico del alumno A7, hay una graduación

muy uniforme en el resto, no apareciendo grupos claramente diferenciados. Hay más bien un continuo de respuestas que tipologías que diferencien las mismas.

**Figura 3:** Representación gráfica sobre el plano del primer y segundo factor. Proyección de los estudiantes (PRE-TEST)



La proyección de los comentarios realizados al final de curso aparecen en la tabla 6 y la figura 4. Se observa que la calidad de la representación es, en general, alta, por encima

de 0.85, con excepción de los alumnos A9 y A3 con una calidad moderada.

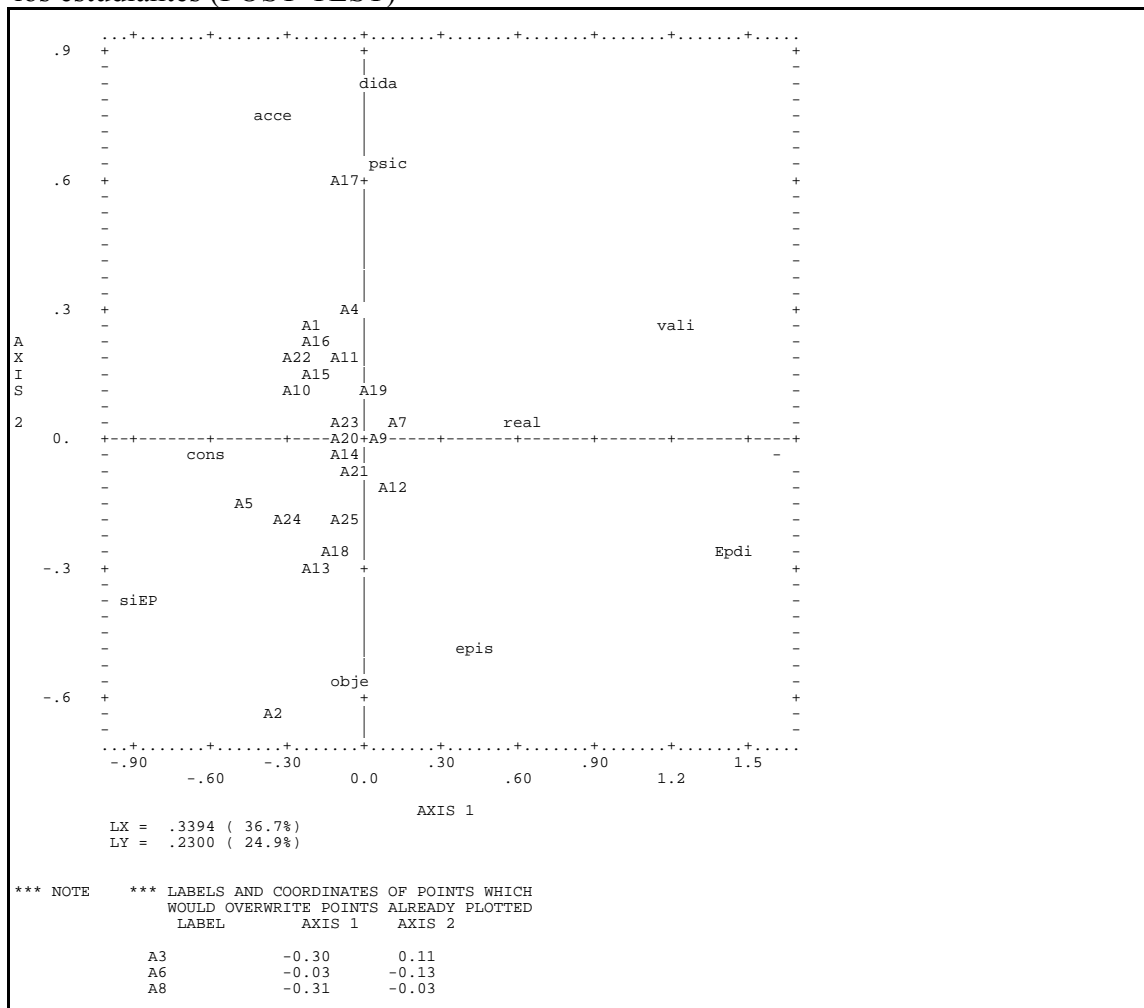
**Tabla 6:** Resultados de la proyección de los datos individuales de los estudiantes en el post-test.

SROW	NAME	QLT	FACTOR AXIS	COR2 1	FACTOR AXIS	COR2 2	FACTOR AXIS	COR2 3
1	A1	0.997	-0.233	0.374	0.254	0.443	-0.074	0.038
2	A2	0.934	-0.367	0.221	-0.629	0.650	-0.018	0.001
3	A3	0.535	-0.109	0.065	-0.185	0.187	0.117	0.075
4	A4	0.852	-0.090	0.046	0.311	0.558	0.126	0.092
5	A5	0.968	-0.479	0.697	-0.164	0.082	-0.112	0.038
6	A6	0.944	0.038	0.019	0.018	0.004	0.166	0.351
7	A7	0.911	0.128	0.235	0.034	0.017	-0.194	0.534
8	A8	0.896	0.038	0.076	0.048	0.123	0.096	0.498
9	A9	0.643	0.070	0.047	0.025	0.006	0.111	0.119
10	A10	0.946	-0.298	0.493	0.109	0.066	0.095	0.050
11	A11	0.887	-0.095	0.050	0.190	0.198	-0.267	0.389
12	A12	0.898	0.072	0.027	-0.130	0.085	-0.140	0.099
13	A13	0.979	-0.236	0.309	-0.308	0.527	-0.143	0.113
14	A14	0.877	-0.206	0.440	-0.021	0.004	0.090	0.083
15	A15	0.993	-0.217	0.295	0.145	0.132	-0.276	0.481
16	A16	0.987	-0.208	0.169	0.209	0.170	0.209	0.170
17	A17	0.981	-0.125	0.027	0.608	0.634	0.277	0.131
18	A18	0.676	-0.160	0.152	-0.273	0.442	0.046	0.012
19	A19	0.927	-0.006	0.000	0.101	0.083	0.247	0.497
20	A20	0.914	-0.127	0.106	0.013	0.001	0.341	0.762
21	A21	0.877	-0.064	0.106	-0.070	0.128	-0.134	0.470
22	A22	0.831	-0.299	0.444	0.197	0.193	-0.185	0.171
23	A23	0.927	-0.114	0.110	0.047	0.018	0.290	0.713
24	A24	0.993	-0.347	0.731	-0.184	0.205	0.071	0.031
25	A25	0.937	-0.027	0.008	-0.093	0.090	0.137	0.197

Al comparar la posición en el primer eje de los comentarios realizados a final de curso con los comentarios de principio de curso no se observan cambios globales. El rango de variación de las coordenadas se sitúa, de nuevo, entre el alumno A5 ( $x=-0.347$ ) y A9 ( $x=0.076$ ), por lo que podemos observar que, también en el post-test, los estudiantes se han inclinado por el polo *constructivista*. Sin embargo, observamos algunos cambios sobre este eje de alumnos particulares, (A9 ha pasado de una posición *constructivista* a una posición más ecléctica; A24 ha aumentado su tendencia hacia el constructivismo). Observamos que en el segundo eje ha habido un aumento de la dispersión de los datos. Hay ahora una mayor división de los estudiantes en cuando al énfasis que hacen del *objeto y epistemología* o bien del *acceso y la didáctica*.

Algunos alumnos enfatizan más el objeto y la epistemología al final de curso (A2 y A13). El estudiante A4 ha aumentado su sensibilidad hacia el *acceso y la didáctica*. Otros enfatizaban preferentemente, con mayor o menor intensidad el *plano didáctico* y la *etapa de acceso* y ahora muestran un equilibrio en este factor (A7, A23 y A16).

**Figura 4:** Representación gráfica sobre el plano del primer y segundo factor. Proyección de los estudiantes (POST-TEST)



## 5.2. PROYECCIÓN CONJUNTA DEL GRUPO Y DE LOS ESTUDIANTES DEL ESTUDIO DE CASOS

Con objeto de describir la "tendencia general" de las respuestas del grupo, y la posible variación en esa tendencia, abordamos el estudio de las respuestas conjuntas de todos los estudiantes, considerada como una variable suplementaria.

Las tablas y gráficos con los resultados de la inclusión de estos datos en el análisis de correspondencias se reflejan en la tabla 7 y en la figura 5. La calidad de representación es muy alta para todos los puntos, por encima de 0.849.

**Tabla 7:** Resultados de la proyección del grupo y de los estudiantes A5 y A12 (pre-test y post-test)

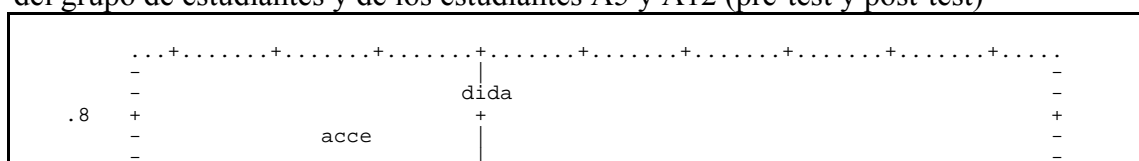
SROW	NAME	QLT	FACTOR AXIS	COR2 1	FACTOR AXIS	COR2 2	FACTOR AXIS	COR2 3
1	AL5pre	0.849	-0.357	0.588	-0.232	0.248	-0.031	0.004
2	AL12pre	0.979	-0.266	0.601	0.017	0.002	-0.075	0.047
3	AL5pos	0.968	-0.479	0.697	-0.164	0.082	-0.112	0.038
4	AL12pos	0.946	0.216	0.220	-0.167	0.132	-0.026	0.003
5	GRUpre	0.973	-0.199	0.558	0.050	0.035	-0.046	0.030
6	GRUpes	0.976	-0.142	0.571	0.011	0.004	0.019	0.011

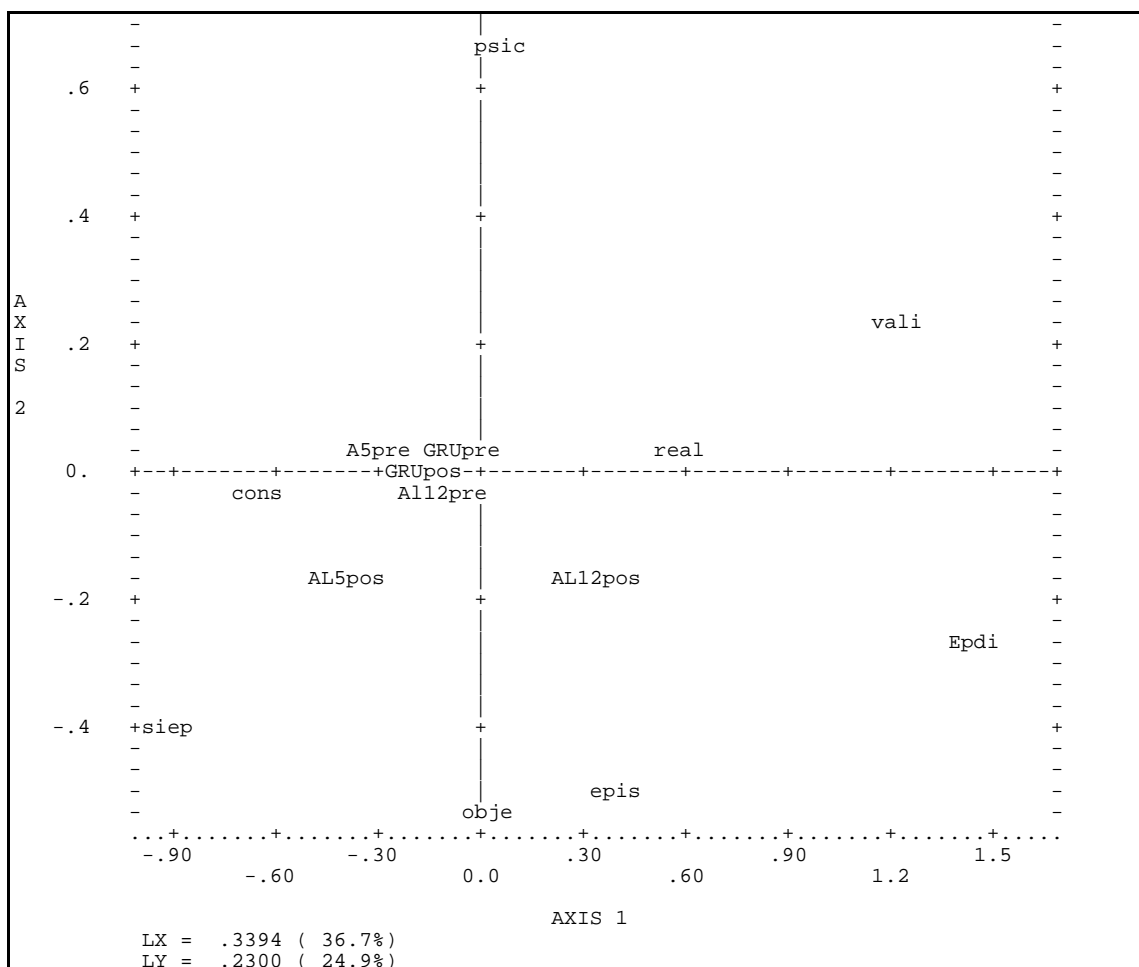
En el primer factor, se observa en la tendencia global del grupo lo que ya se ha observado en los alumnos individuales. La tendencia del grupo en el pre-test se orientaba ligeramente hacia el constructivismo, y esta tendencia prácticamente se conserva. En el segundo factor, no se aprecian cambios en las tendencias del grupo en relación a este eje, a pesar de que individualmente había bastante variabilidad y también cambios de estudiantes particulares.

La figura 5 muestra que las categorías de las distintas variables consideradas para los datos de los estudiantes y los correspondientes al texto están representadas en posiciones muy próximas entre sí, de lo que podemos inferir que el conjunto de las respuestas de los estudiantes constituye un "buen resumen" del extracto del artículo; no se ha apreciado globalmente en este conjunto de respuestas algún tipo de sesgo en los items seleccionados que pudiera ser indicativo de una concepción o creencia común a una mayoría de los estudiantes que enfatizara alguna categoría sobre las restantes. Por el contrario, la variabilidad de los estudiantes que hemos analizado en las secciones anteriores neutralizaría una posible "tendencia sesgada" del grupo.

Se llega a un resultado semejante cuando hemos proyectado los datos del post-test como filas suplementarias en el análisis de correspondencias de la matriz de datos del extracto del texto.

**Figura 5:** Representación gráfica sobre el plano del primer y segundo factor. Proyección del grupo de estudiantes y de los estudiantes A5 y A12 (pre-test y post-test)





La variación en el comportamiento del grupo entre pre-test y post-test no es significativa, tal como cabría esperar al contemplar el número de estudiantes que han cambiado significativamente y el número de ellos que han permanecido. Aparece una ligera variación que se dirige hacia una preocupación mayor por la caracterización del conocimiento matemático que por la enseñanza. Una interpretación posible de este hecho se basa en que los estudiantes se encontraron en una clase de *Prácticas de enseñanza de matemáticas*, y tenían las expectativas de que iban a tratar el proceso de enseñanza y no a analizar el objeto matemático. Al recibir un texto que habla del conocimiento matemático y de la enseñanza de las matemáticas, lo resumieron atendiendo a lo que se les presentaba, pero pensando que lo más importante era lo referente a la enseñanza. En las actividades del

curso se ha hablado frecuentemente de aspectos epistemológicos, con lo que ha cambiado ligeramente su "jerga" en esta asignatura, y al realizar de nuevo el comentario se han sentido inclinados a aportar más aspectos epistemológicos en ligero detrimento de los didácticos. Pero este cambio ha sido tan ligero que no se puede pensar en un cambio global de creencias y concepciones.

Sólo algunos estudiantes han realizado cambios bruscos que habría que estudiar más a fondo. Pero tal como hemos visto en la primera parte del análisis, el número de estudiantes que permanecen muy próximos a la posición que adoptaron en el pre-test es mayor que el número de estudiantes que han cambiado. Por otra parte, las variaciones se contrarrestan, con una tendencia hacia el centro de los ejes, lo que no es de extrañar, ya que indica que al hacérseles más familiares los términos y las ideas del texto, los estudiantes resumen mejor dicho texto.

## 6. CONCLUSIONES

El análisis de contenido realizado al texto que hemos empleado para el comentario nos ha mostrado que dicho texto se estructura según dos dimensiones fundamentales, la primera separa las unidades que se refieren al *realismo* de las que se refieren al *constructivismo*. La segunda separa, en un extremo la caracterización del *objeto* matemático ([EPIS, OBJE], categoría 6), y en el otro la forma de enseñar matemáticas ([DIDA, ACCE], categoría 4).

La proyección de las unidades de los resúmenes de cada estudiante sobre estos ejes nos permite observar que no hay diferencias significativas en la caracterización que hacen de los dos *polos*, especialmente en el pre-test. Todos caracterizan mejor el *constructivismo* que el *realismo*, aunque en el post-test se produce una subida en coordenadas respecto del

primer eje, de los resúmenes. Esto puede significar que los estudiantes se hacen un poco más sensibles a las diferencias entre las características de los *polos realista* y *constructivista*; o sea, al hacerse sensibles a la existencia de estos dos *polos*, necesitan citar los argumentos del texto que los diferencia.

Los resúmenes de los estudiantes se distinguen en la manera en que se ocupan de caracterizar el conocimiento matemático o la forma de enseñar. La variación entre resúmenes respecto a este segundo eje es muy amplia. El estudiante A7, por ejemplo, se ocupa sólo de caracterizar la enseñanza, en el pre-test, mientras que el A2, se ocupa sólo del conocimiento matemático en el post-test.

El tercer factor que aparece en el análisis de correspondencias del texto distingue la dimensión *psicológica* frente a la *didáctica* (dimensión aprendizaje-enseñanza). Los resúmenes de los estudiantes correlacionan ligeramente con este eje, y sus valores en él son próximos entre sí. Hay una mayor preocupación por caracterizar el aprendizaje que por caracterizar la enseñanza. Al contemplar las figuras 3 y 4 se observa que algunos estudiantes han cambiado significativamente de posición entre el pre-test y el post-test. Cuatro estudiantes no han variado prácticamente su posición en los ejes, desde el pre-test a el post-test (A3, A8, A10 y A11) y seis varían ligeramente su posición (A5, A13, A15, A18, A21 y A24)

Como vemos, el análisis de correspondencias múltiple realizado nos ha permitido caracterizar tanto el texto como la posición de los estudiantes en relación al mismo, lo que nos ha llevado a mostrar las concepciones y creencias puestas en juego por los estudiantes para cumplimentar el comentario de textos. El comentario de textos como instrumento de recogida de datos, la rejilla como instrumento de clasificación de datos y el análisis de correspondencia múltiple como procedimiento de estudio de estos datos se han mostrado



valiosos para realizar este tipo de estudios cualitativos, facilitando la interpretación que inicialmente habíamos hecho de modo cualitativo.

### Referencias bibliográficas

**Bishop, A.J.** (1988). Aspectos sociales y culturales de la educación matemática. *Enseñanza de las Ciencias*, 6(2), 121-125.

**Cooney, T.J.** (1984b). Investigating mathematics teachers' beliefs: The pursuit of perceptions. *Paper prepared for short communications at V ICME*, Adelaida

**Cooney, T.J. y Shealy, B.E.** (1994). Conceptualizing teacher education as field of inquiry: theoretical and practical implications. En J. P. Ponte y J. F. Matos (Eds.) *Proceedings of the eighteenth International Conference for PME, Vol II* (pp. 225-232). Lisboa.

**Dixon, W.J.S. y cols.** (1993). *BMDP Statitital software manual*. Berkeley: University of California Press.

**Ernest, P.** (1991). *Philosophy of mathematics education*. London: Falmer Press.

**Flores, P.** (1995). *Concepciones y creencias de los futuros profesores sobre las matemáticas, su enseñanza y aprendizaje*. Tesis doctoral inédita. Universidad de Granada.

**Godino, J.D. y Batanero, M.C.** (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques Vol 14, n1 3*, 325-355.

**Gras, R.** (1992). L'analyse des données: une méthodologie de traitement des questions de didactique. *Rechérches en Didactique des Mathématiques*, 12(1), 59-72.

**Greenacre, M.J.** (1993). *Theory and aplications of correspondence analysis*. London: Academic Press.

**Lerman, S.** (1994). "Metaphors for mind and metaphors for teaching and learning Mathematics", En J. da Ponte and J. F. Matos (Eds.) *Proceedings of the eighteenth International Conferencie for PME, Vol III*.(pp. 144-151). Lisboa.

**Manning, P.K. y Cullum-Swan, B.** (1994). Narrative, Content, and Semiotic Analysis. En N.K. Denzin y Y.S. Lincoln. (Eds). *Handbook of Qualitative Research*, (pp. 463-477). London: Sage publications.

**Ministerio de Educación y Ciencia** (1992). *Matemáticas. Secundaria obligatoria*. Madrid: el autor.

**Moreno, L. y Waldegg, G.** (1992). Constructivismo y educación matemática. *Educación Matemática. Vol 4, n 2*, 7-15.

**NCTM** (1991). *Professional standards for teaching mathematics*. Reston: Va. National Council of Teachers of Mathematics.

**Pajares, M.F.** (1992). Teachers' beliefs and educational research: cleaning up a messy construct. *Review of Educational Research, Vol 62, n1 3*, 307-332.

**Ponte, J.P. da** (1992). Concepções dos Professores de Matemática e Processos de Formação. En *Educação Matemática*. Lisboa: Instituto de Inovação Educacional

**Thompson, A.G.** (1992). "Teachers' Beliefs and Conceptions: A synthesis of the research". En Grouws (Ed.) *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. (pp. 127-146). NCTM. MacMillan, New York. .

**Weber, J.** (1986). *Basic content analysis*. Newbury Park, California: Sage University Press.