





# XLVIII Olimpiada Matemática Española Fase nacional 2012 (Santander) Primera sesión (24 de marzo)

## • Problema 1

Determinar razonadamente si el número  $\lambda_n = \sqrt{3n^2 + 2n + 2}$  es irracional para todo entero no negativo n.

## • Problema 2

Hallar todas las funciones  $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$  de variable real con valores reales, tales que

$$(x-2)f(y) + f(y+2f(x)) = f(x+yf(x))$$

para todo  $x, y \in \mathbb{R}$ .

#### • Problema 3

Sean x y n enteros tales que  $1 \le x < n$ . Disponemos de x+1 cajas distintas y n-x bolas idénticas. Llamamos f(n,x) al número de maneras que hay de distribuir las n-x bolas en las x+1 cajas. Sea p un número primo. Encontrar los enteros n mayores que 1 para los que se verifica que el número primo p es divisor de f(n,x) para todo  $x \in \{1,2,\ldots,n-1\}$ .

No está permitido el uso de calculadoras. Cada problema se puntúa sobre siete puntos. El tiempo de cada sesión es de tres horas y media.







## XLVIII Olimpiada Matemática Española Fase nacional 2012 (Santander) Segunda sesión (25 de marzo)

## • Problema 4

Hallar todos los números enteros positivos n y k tales que  $(n+1)^n = 2n^k + 3n + 1$ .

#### • Problema 5

Una sucesión  $(a_n)_{n>1}$  se define mediante la recurrencia

$$a_1 = 1$$
,  $a_2 = 5$ ,  $a_n = \frac{a_{n-1}^2 + 4}{a_{n-2}}$ , para  $n \ge 3$ 

Demostrar que todos los términos de la sucesión son números enteros y encontrar una fórmula explícita para  $a_n$ .

### • Problema 6

Sea ABC un triángulo acutángulo,  $\omega$  su circunferencia inscrita de centro  $I,\ \Omega$  su circunferencia circunscrita de centro  $O,\ y\ M$  el punto medio de la altura  $AH,\ donde\ H$  pertenece al lado BC. La circunferencia  $\omega$  es tangente a este lado BC en el punto D. La recta MD corta a  $\omega$  en un segundo punto  $P,\ y$  la perpendicular desde I a MD corta a BC en N. Las rectas NR y NS son tangentes a la circunferencia  $\Omega$  en R y S respectivamente. Probar que los puntos  $R,\ P,\ D$  y S están en una misma circunferencia.