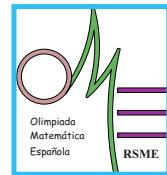




XLVI OME



**XLVI Olimpiada Matemática Española
Fase nacional 2010 (Valladolid)
Primera sesión (26 de marzo)**

• **Problema 1**

Una sucesión *pucelana* es una sucesión creciente de dieciséis números impares positivos consecutivos, cuya suma es un cubo perfecto. ¿Cuántas sucesiones *pucelanas* tienen solamente números de tres cifras?

• **Problema 2**

Sean N_0 y Z el conjunto de todos los enteros no negativos y el conjunto de todos los enteros, respectivamente. Sea $f : N_0 \rightarrow Z$ la función que a cada elemento n de N_0 le asocia como imagen el entero $f(n)$ definido por

$$f(n) = -f\left(\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor\right) - 3\left\{ \frac{n}{3} \right\}$$

donde $\lfloor x \rfloor$ es la parte entera del número real x y $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$ su parte decimal. Determina el menor entero n tal que $f(n) = 2010$.

NOTA: La parte entera de un número real x , denotada por $\lfloor x \rfloor$ es el mayor entero que no supera a x . Así $\lfloor 1,98 \rfloor = 1$, $\lfloor -2,001 \rfloor = -3$, $\lfloor 7\pi - 8,03 \rfloor = 13$.

• **Problema 3**

Sea $ABCD$ un cuadrilátero convexo. Sea P la intersección de AC y BD . El ángulo $\angle APD = 60^\circ$. Sean E , F , G y H los puntos medios de los lados AB , BC , CD y DA respectivamente. Halla el mayor número real positivo k tal que

$$EG + 3HF \geq kd + (1-k)s$$

siendo s el semiperímetro del cuadrilátero $ABCD$ y d la suma de las longitudes de sus diagonales. ¿Cuándo se alcanza la igualdad?

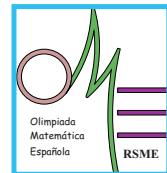
No está permitido el uso de calculadoras.

Cada problema se puntuá sobre siete puntos.

El tiempo de cada sesión es de tres horas y media.



XLVI OME



**XLVI Olimpiada Matemática Española
Fase nacional 2010 (Valladolid)
Segunda sesión (27 de marzo)**

• **Problema 4**

Sean a, b, c tres números reales positivos. Demuestra que

$$\frac{a+b+3c}{3a+3b+2c} + \frac{a+3b+c}{3a+2b+3c} + \frac{3a+b+c}{2a+3b+3c} \geq \frac{15}{8}$$

• **Problema 5**

Sea P un punto cualquiera de la bisectriz del ángulo A en el triángulo ABC , y sean A', B', C' puntos respectivos de las rectas BC, CA, AB , tales que PA' es perpendicular a BC , PB' es perpendicular a CA y PC' es perpendicular a AB . Demuestra que PA' y $B'C'$ se cortan sobre la mediana AM , siendo M el punto medio de BC .

• **Problema 6**

Sea p un número primo y A un subconjunto infinito de los números naturales. Sea $f_A(n)$ el número de soluciones distintas de la ecuación $x_1+x_2+\dots+x_p = n$, con $x_1, x_2, \dots, x_p \in A$. ¿Existe algún número natural N tal que $f_A(n)$ sea constante para todo $n > N$?

No está permitido el uso de calculadoras.

Cada problema se puntuá sobre siete puntos.

El tiempo de cada sesión es de tres horas y media.