AÑO 2001

Soluciones XXXVII Olimpiada

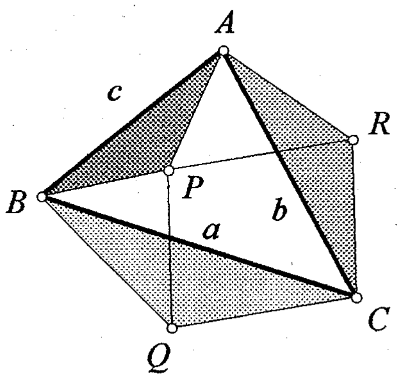
Primera sesión

1.- Prueba que la gráfica del polinomio P es simétrica respecto del punto $A(a,b)$ sí y sólo sí existe un polinomio Q tal que: $P(x)=b+(x-a)Q((x-a)^2)$, para todo $x\in R$.
Solución:
Supongamos primero que exista el polinomio P que cumple las condiciones requeridas. Sea $x-a=h$ ó $x=a+h$. Entonces :

$$\begin{cases} P(a-h)=b-hQ(h^2) \\ P(a+h)=b+hQ(h^2) \end{cases} \quad \text{y} \quad \frac{P(a-h)+P(a+h)}{2}=b,$$ para todo $h\in R$. Lo que significa que la gráfica de P es simétrica respecto del punto $A(a,b)$.

Sea $x=a+h$, $P(x)=P(a+h)=R(h)$. La condición $\dfrac{P(a-h)+P(a+h)}{2}=b$ es equivalente a $R(-h)+R(h)=2h$, porque $P(a-h)=R(-h)$. Para $R(h)=a_0+a_1h+\ldots+a_nh^n$, la condición anterior se escribe de la forma: $a_0+a_1h+\ldots+a_nh^n+a_0-a_1+a_2h^2-\ldots+(-1)^na_nh^n=2b$ es decir $a_0+a_2h^2+\ldots+a_mh^m=b$, para cada $h\in R$. $m=n$ n par, $m=n-1$ n impar.
Se deduce que $a_2=a_4=\ldots.=a_m=0$, $a_0=b$.
Por tanto ahora se tiene que $R(h)=b+a_1h+a_3h^3+\ldots$ y así existe un polinomio Q tal que $R(h)=b+hQ(h^2)$, para algún polinomio Q. Por último $P(x)=R(h)=b+(x-a)Q((x-a)^2)$.

2.- Sea P un punto, en el interior del triángulo ABC, de modo que el triángulo ABP es isósceles. Sobre cada uno de los otros dos lados de ABC se construyen exteriormente triángulos BCQ y CAR, ambos semejantes al triángulo ABP.
Probar que los puntos P, Q, C y R o están alineados o son los vértices de un paralelogramo.



Solución:
Los triángulos ABC y PBQ son semejantes pues tienen un ángulo igual $\angle ABC = \angle PBQ$ y los lados que lo forman proporcionales:

$$\frac{c}{a}=\frac{BP}{BQ}$$

De modo análogo, ABC es semejante a APR , por tanto PBQ y APR son semejantes (y al ser $PB = PA$ son iguales).
En particular: $\angle ARP = \angle ACB$ y $\angle BQP = \angle ACB$
Llamando $\alpha = \angle \mathrm{BAP} = \angle ABP$, resulta:

$$\angle QPR = 360° - (180 - 2\alpha) - (A + B) = 180° + 2\alpha - (180° - \angle ACB) = 2\alpha + \angle ACB$$

$$\angle QCR = \angle ACB + 2\alpha$$

$$\angle PRC = 180° - 2\alpha - \angle ARP = 180° - 2\alpha - \angle ACB$$

$$\angle PQC = 180° - 2\alpha - \angle BQP = 180° - 2\alpha - \angle ACB$$

Las cuatro igualdades establecen que los dos pares de ángulos opuestos del cuadrilátero $PQCR$ son iguales y es un paralelogramo.

La alineación es un caso particular y se producirá cuando $\angle ACB + 2\alpha = 180°$, es decir cuando

$$\alpha = \frac{180° - \angle ACB}{2}.$$

3.- Están dados 5 segmentos de longitudes a_1, a_2, a_3, a_4 y a_5 tales que con tres cualesquiera de ellos es posible construir un triángulo.
Demuestra que al menos uno de esos triángulos tiene todos sus ángulos agudos.
Solución:
Supongamos que $0 < a_1 \le a_2 \le a_3 \le a_4 \le a_5$. Si ningún triángulo es acutángulo, tendríamos:

$$a_1^2 + a_2^2 \le a_3^2 \quad (1)$$
$$a_2^2 + a_3^2 \le a_4^2 \quad (2)$$
$$a_3^2 + a_4^2 \le a_5^2 \quad (3)$$

Pero (desigualdad triangular):

$$a_5 < a_1 + a_2, \text{ luego } a_5^2 < a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2 \quad (4)$$

Sumando las desigualdades (1),(2),(3) y (4) tenemos:

$$a_1^2 + 2a_2^2 + 2a_3^2 + a_4^2 + a_5^2 < a_3^2 + a_4^2 + a_5^2 + a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2$$

es decir,

$$a_2^2 + a_3^2 < 2a_1a_2$$

Como $a_2 \le a_3$, resulta $2a_2^2 \le a_2^2 + a_3^2 < 2a_1a_2$, y por tanto $a_2 < a_1$, en contradicción con la ordenación inicial.

Segunda sesión

4.- Los números enteros desde 1 hasta 9 se distribuyen en las casillas de una tabla 3x3.
Después se suman seis números de tres cifras: los tres que se leen en filas y los tres que se leen en columnas.
¿Hay alguna distribución para la cual el valor de esa suma sea 2001?
Solución
Consideremos la distribución:

a	b	c
d	e	f
g	h	i

Resulta:

$$S = abc + def + ghi + adg + beh + cfi =$$

$$100\,(a + c + f + b + a + d + g) + 10(d + e + f + b + e + h) + (g + h + i + c + f + i) =$$

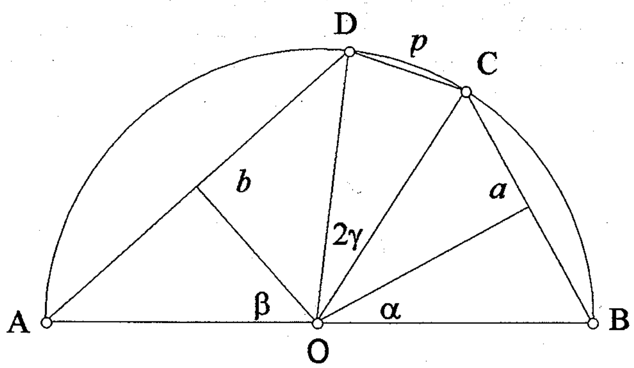
$$200\,a + 110b + 101c + 110d + 20e + 11f + 101g + 11h + 2i$$

Módulo 9 tenemos:

$$S = 2(a + b + c + \ldots h + i) = 2.45 = 0$$

Como 2001 no es múltiplo de 9, no habrá ninguna distribución para la que la suma indicada tome el valor 2001.

5.- *ABCD* es un cuadrilátero inscrito en una circunferencia de radio 1 de modo que *AB* es un diámetro y el cuadrilátero admite circunferencia inscrita.
Probar que: $CD \leq 2\sqrt{5} - 4$



Solución:
Sea O el centro de la semicircunferencia.
Pongamos a = BC; b = AD; p = CD;
$2\alpha = \angle BOD$; $2\beta = \angle AOD$; $2\gamma = \angle COD$.
La condición necesaria y suficiente para que ABCD admita una circunferencia inscrita es:

$$p + 2 = a + b \quad (1)$$

Como $2\alpha + 2\beta + 2\gamma = 180°$, entonces

$$\beta = 90 - (\alpha + \beta)$$

y además:

$$a = 2sen\alpha; \quad p = 2sen\gamma; \quad b = 2sen\beta = 2\cos(\alpha + \gamma) = 2\cos\alpha\cos\gamma - 2sen\alpha\ sen\gamma$$

Vamos a expresar la condición (1) en función del ángulo α y el dato p que determina por completo el cuadrilátero.

$$\cos\gamma = \sqrt{1 - \frac{p^2}{4}} = \frac{\sqrt{4 - p^2}}{2},$$

de donde:

$$b = \sqrt{4 - p^2}\cos\alpha - psen\alpha$$

sustituyendo en (1), queda:

$$p+2=2sen\alpha+\sqrt{4-p^2}\cos\alpha-psen\alpha$$

o lo que es lo mismo:

$$\sqrt{4-p^2}\cos\alpha+(2-p)sen\alpha=p+2 \quad (2)$$

Por tanto, existirá circunferencia inscrita para los valores de p que hagan compatible la ecuación (2) en la incógnita α.

Puede expresarse el seno en función del coseno y estudiar el discriminante de la ecuación de segundo grado que se obtiene, pero es más rápido interpretar la ecuación (2) como el producto escalar de los vectores $\vec{u}(\cos\alpha, sen\alpha)$de módulo 1 y $\vec{v}\left(\sqrt{4-p^2}, 2-p\right)$. La condición (2) queda:

$$|\vec{v}|\cos\delta=p+2 \quad (3)$$

siendo δ el ángulo formado por los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

Para que (3) sea compatible debe cumplirse $p+2\le|\vec{v}|=\sqrt{4-p^2+(2-p)^2}$, elevando al cuadrado y operando queda:

$$p^2+8p-4\le 0$$

Las raíces de la ecuación son $p=\pm2\sqrt{5}-4$.

Como p es positivo la condición final es:

$$0\le p\le 2\sqrt{5}-4$$

6.- Determinar la función $f: N\rightarrow N$ (siendo $N=\{1,2,3,...\}$ el conjunto de los números naturales) que cumple, para cualesquiera $s, n\in N$, las dos siguientes condiciones:

a) $f(1)=1, f(2^s)=1$.

b) Si $n<2^s$, entonces $f(2^s+n)=f(n)+1$.

Calcular el valor máximo de $f(n)$ cuando $n\le 2001$.

Hallar el menor número natural n tal que $f(n)=2001$.

Solución

Para cada número natural n definimos $f(n)$ como la suma de las cifras de la expresión de n escrito en base 2. Está claro que esta función f cumple las condiciones a) y b). Además, es la única función que las cumple, porque el valor de $f(n)$ viene determinado por las condiciones a) y b). Probamos esa afirmación por inducción sobre n. Si $n=1$ o $n=2^s$, $f(n)=1$. Supongamos $n>1$, $n\neq 2^s$ y que es conocido $f(m)$ para todo $m<n$; se puede escribir $n=2^s+m$ con $m<2^s$ tomando 2^s la mayor potencia de 2 que es menor que n; entonces $f(n)=f(m)+1$.

Ahora, es fácil resolver las dos cuestiones que nos plantean:

En el primer caso, se trata de ver cuántos unos puede tener como máximo un número menor o igual que 2001 escrito en base 2. Ese número, escrito en base 2, es, obviamente, 1111111111, que corresponde a n = 1023 = 2^{10} - 1. Es $f(n)=10$.

En el segundo caso, razonando de manera análoga, se observa que la respuesta es $n=2^{2001}-1$.