XXXIV Olimpiada Matemática Española

Soluciones de los problemas propuestos por la Comisión de Olimpiadas de la RSME para la primera fase.

Problema 1. *Los puntos A = (a,11) y B = (b, 37) determinan, junto con el origen, un triángulo equilátero.*
Determinar el producto ab .

Solución:

Es un ejercicio eminentemente analítico, tiene muchas opciones de solución.

Sea d la longitud del lado del triángulo equilátero. Utilizando el producto escalar usual del plano, <,>, se obtiene la relación: $< A, B >= ab + 407 = d^2 \cos 60º = \frac{d^2}{2}$, de donde se deduce que $ab = \frac{d^2}{2} - 407$. Esta relación puede obtenerse por varios caminos, sin necesidad de utilizar producto escalar.
Por otra parte, igualando las longitudes de los lados resulta $d^2 = a^2 + 11^2 = b^2 + 37^2 = (b-a)^2 + (37-11)^2$: es decir,
$d^2 = a^2 + 121 = b^2 + 1369 = (b-a)^2 + 676$.
Despejando b, en función de a, sustituyendo, desarrollando y elevando al cuadrado, se obtiene una ecuación bicuadrática, del siguiente modo:
$b^2 = a^2 - 1248$; $b = \pm\sqrt{a^2 - 1248}$; $a^2 + 121 = (\pm\sqrt{a^2 - 1248} - a)^2 + 676$;
$(\pm\sqrt{a^2-1248} - a)^2 + 555 - a^2 = 0$; $(a^2 - 1248) + a^2 m2a\sqrt{a^2-1248} + 555 - a^2 = 0$;
$\pm 2a\sqrt{a^2 - 1248} = a^2 - 693$; $4a^2(a^2 - 1248) = a^4 + 480249 - 1386a^2$;
$3a^4 - 3606a^2 - 480249 = 0$, o equivalentemente: $a^4 - 1202a^2 - 160083 = 0$.
De donde se deduce que $a^2 = 601 \pm \sqrt{521284} = 601 \pm 722 = 1323$ (el signo – no puede ser, ya que a^2 es positivo).
Sustituyendo: $d^2 = a^2 + 121 = 1323 + 121 = 1444$; $ab = \frac{d^2}{2} - 407 = 722 - 407 = 315$.
Este es el valor pedido.

Problema 2. *Se consideran los puntos del plano P_1 = (1, 1000) , P_2 = (2,1000), …… , P_{1998} = (1998,1000), y el punto O = (0,0), origen de coordenadas.*
Para cada punto P_k de los anteriores, se traza el segmento OP_k únicamente si no contiene más puntos con ambas coordenadas enteras que O y P_k .
¿Cuántos segmentos se dibujan?

Solución:
Si a,b son enteros, el punto Q(a,b) está en el segmento OP_k si y solo si $\frac{1000}{b} = \frac{k}{a}$, o lo que es equivalente, si $b = \frac{1000a}{k}$ es entero.
Si k es primo con 1000 debe dividir a a, lo que es imposible pues a<k (a=k cuando Q=P_k), y el segmento se puede dibujar

Si mcd (k,1000) = d>1, 1000=dn,k=dm, y el punto Q(m,n) de coordenadas enteras está en el segmento, que no se dibuja.
El problema se reduce por tanto a contar cuántos números del conjunto {1,2,….,1998} son primos con 1000. Bastará descontar los pares y los múltiplos de 5, que son:
|pares|+|múltiplos de 5|-|múltiplos de 10|=999+399-199=1119.
Se dibujan 1998-1119 segmentos

Problema 3. *Determinar el menor valor de k para el que no existe ningún número real x verificando*

$$k < \frac{2x-7}{2x^2-2x-5} < 1$$

Solución:

Para determinar el menor k con k<f(x)<1, basta representar la curva y=f(x), que tiene un máximo local en A(6,1/11) y un mínimo local en B (1,1). En la franja (1/11,1) no hay solución. Para k'<1/11 la ecuación k'=f(x) tiene solución.
Sin representar la función también tiene solución fácil

Problema 4. *Sea A = {1,2,3,4,5,6}. Se consideran las funciones f de A en A. ¿Cuántas de ellas verifican $f^2(x) = x$, para todo x de A? ¿Cuántas verifican $f^3(x) = x$ para todo x de A?*
[$f^2(x) = f(f(x))$ y $f^3(x) = f(f(f(x)))$]

Solución:
a) Se trata de ver de cuántas formas es posible expresar una permutación de S_6 como producto de trasposiciones disjuntas (con 1,2 o 3)
Si f no es la identidad, y f(a)=b (a distinto de b), entonces f(b)=a. Así que f no puede tener un número impar de puntos fijos.
- Si tiene 6 ptos fijos, es la identidad
- Con 4 ptos fijos (trasposición), hay $\binom{6}{2}$ =15 aplicaciones distintas
- Con 2 ptos fijos hay ½ $\binom{6}{2} \cdot \binom{4}{2}$ =45 aplicaciones distintas
- Sin puntos fijos hay 1/6 $\binom{6}{2} \cdot \binom{4}{2} \binom{2}{2}$ =15 aplicaciones distintas

En total habrá 1+15+45+15 = 76 permutaciones de orden 2

b) Es análogo, pero ahora se trata de contar las permutaciones de orden 3, es decir, las que pueden expresarse como producto de 3-ciclos disjuntos. Si f(a)=b con b y a distintos, entonces f(b)=c, y a,b,c deben ser némeros distintos del conjunto A
- Con puntos fijos, o f es la identidad, o tiene 3 puntos fijos. De este tipo las posibles son 2. $\binom{6}{3}$ =40
- Sin puntos fijos habrá ½ .2 $\binom{6}{3}$ 2. . $\binom{3}{3}$ = 40

En total son 1+40+40=81.

Problema 5. *Un polinomio p(x) tiene coeficientes enteros, y para cierto entero a, se verifica p(a) = p(a+1) = p(a+2) = 1.*
¿Existe algún entero k tal que p(k) = 8?

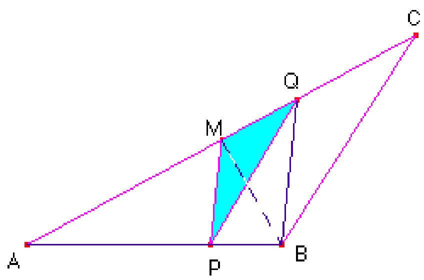
Solución:

El polinomio q(x)=p(x)-1 tiene al menos 3 raices enteras, y se factoriza como q(x)=(x - a) (x - (a+1)) (x - (a+2)) r(x), donde r(x) es otro polinomio que también tiene coeficientes enteros.
Si k es un entero, los números (k - a) (k - (a+1)) y (k - (a+2)) son tres enteros consecutivos, uno de ellos es multiplo de 3. así que q(k) será múltiplo de 3, y p(k) será, para todo entero k, múltiplo de 3 más 1. Pero 8 es múltiplo de 3 más 2.

Problema 6. *En el triángulo ABC, de área 100, M es el punto medio del lado AC, y P es un punto del lado AB tal que el triángulo AMP tiene área 36. La paralela a PM por B corta al lado AC en Q. Determinar el área del triángulo MPQ.*

Solución:

(ABM)=50, porque M es el punto medio de AC
(ABM)-(APM) = 50-36 =14 = (BPM). Pero los triángulos BPM y QPM tienen igual base PM e igual altura, ya que B y Q están en una misma recta paralela a PM. Así (QPM)=14



Problema 7. *Se considera $f(x) = x^{1997} - x + 1$. Sea n>1, un número entero. Demostrar que, para todo número entero x, los números f(x) y $f^n(x)$ son primos entre sí.*
[$f^2(x) = f(f(x))$; $f^3(x) = f(f^2(x)) = f(f(f(x)))$, y en general, $f^n(x) = f(f^{n-1}(x)) = f(f(\ldots f(x))\ldots))$ n veces]

Solución:

Basta expresar, por iteración, $f^2(x) = (f(x))^{1997} - f(x) + 1 = f(x)\,[f(x)^{1996} - 1] + 1 = f(x)\, g_2(x) + 1$; … ; $f^n(x) = f^{n-1}(f(x)) = \ldots = f(x)\, g_n(x) + 1$, donde $g_n(x)$ es, para cada n, otro polinomio. Ningún divisor de f(x) (distinto de 1) es divisor de $f^n(x)$.

Problema 8.

(a) *Los vértices de un polígono regular de 8 lados se emparejan, y se trazan los segmentos - lado o diagonal - que cada pareja determina. ¿Es posible emparejarlos de forma que los cuatro segmentos determinados tengan distintas longitudes?*

(b) *Demostrar que si se emparejan los vértices de un polígono regular de 12 lados, y se trazan los segmentos que cada pareja determina, siempre habrá al menos dos con la misma longitud.*

Solución:

Consideremos un polígono regular de 2n lados. Se pueden formar n parejas distintas. Digamos que un segmento tiene *longitud* k si abarca k lados. Si los n segmentos que se determinan tienen longitudes distintas, tendremos exactamente un segmento con cada una de las *longitudes* 1,2, … , n.
Numeremos los vértices en sentido horario, P_1, P_2 , …. , P_{2n}. Observemos que la *longitud* del segmento P_kP_{k+l} es l, y tendrá *longitud* par si y sólo si k, k+l tienen la misma paridad.

- Supongamos **n par.** Entonces n=2m, y habrá m segmentos con *longitud* impar y m segmentos con *longitud* par. Necesitaremos m puntos con subíndice par y m puntos con subíndice impar para formar los de *longitud* impar. Para formar los m de *longitud* par, hay que emparejar los m pares y los m impares restantes entre sí, luego es necesario que m sea par . Entonces, n=2m= 2.2k = 4k, hay 8k vértices
- Análogamente, si **n=2m+1**, tendremos m+1 segmentos impares, que se trazan uniendo m+1 puntos pares y m+1 puntos impares, y m segmentos de *longitud* par, que se trazan emparejando entre si los m pares y los m impares restantes. Es necesario por tanto que m sea par: m=2k, n=4k+1, 2n=8k+2.

Por tanto, es seguro que en el polígono de 12 lados se formarán al menos dos segmentos con igual longitud
Para el polígono de 8 lados el emparejamiento en las condiciones del problema es posible: