Problema 8. *Calcular el siguiente máximo común divisor:*

$$\operatorname{mcd}\left(\left(2^{2009}+1\right)^{2009}, 2^{2009^{2009}}+1\right)$$

Solución. Para cualquier $x \in \mathbb{R}$ y cualquier impar $n \geq 3$, se cumple que

$$\begin{aligned} x^n+1 &= (x+1)(x^{n-1}-x^{n-2}+x^{n-3}-\ldots-x+1) \\ &= (x+1)\left((x+1)(x^{n-2}-2x^{n-3}+3x^{n-3}-\ldots+(n-2)x-(n-1))+n\right) \end{aligned}$$

igualdades que se comprueban fácilmente sin más que dividir el polinomio x^n+1 entre $x+1$ dos veces. Ahora tomemos $x = 2^{2009}$ y $n = 2009^{2008}$ (que es impar), con lo que se tiene que

$$2^{2009^{2009}}+1 = (2^{2009}+1)\left((2^{2009}+1)a + 2009^{2008}\right)$$

para cierto número natural $a \in \mathbb{N}$. De aquí deducimos que

$$\operatorname{mcd}\left(\left(2^{2009}+1\right)^{2009}, 2^{2009^{2009}}+1\right) = (2^{2009}+1)\operatorname{mcd}\left((2^{2009}+1)^{2008}, (2^{2009}+1)a + 2009^{2008}\right)$$

y el último paso consistirá en probar que el último máximo común divisor es uno, para lo que será suficiente probar que no existen primos que dividan a $(2^{2009}+1)^{2008}$ y a $(2^{2009}+1)a+2009^{2008}$ simultáneamente. Razonando por reducción al absurdo si p fuese un primo que dividiera a ambos, tendríamos que p divide a $2^{2009}+1$ por dividir a $(2^{2009}+1)^{2008}$, luego p divide a 2009^{2008} y, por tanto, a $2009 = 7^2 \cdot 41$. Deducimos que $p = 7$ o bien $p = 41$ pero ni 7 ni 41 dividen a $2^{2009}+1$ como mostramos a continuación y esta es la contradicción buscada.

- 7 no divide a $2^{2009}+1$. En efecto, tenemos que $2^3 = 8 \equiv 1$ (mód 7) luego $2^{2009}+1 = 4 \cdot 8^{669}+1 \equiv 5$ (mód 7) y $2^{2009}+1$ no es divisible por 7.
- 41 no divide a $2^{2009}+1$. En efecto, si consideramos la función φ de Euler[1], como 2 y 41 son primos entre sí y $\varphi(41) = 40$, tenemos que $2^{40} \equiv 1$ (mód 41) luego $2^{2009}+1 = 2^9(2^{40})^{50}+1 \equiv 2^9+1 \equiv 21$ (mód 41) y $2^{2009}+1$ tampoco es divisible por 41.

De todo esto se deduce que

$$\operatorname{mcd}\left(\left(2^{2009}+1\right)^{2009}, 2^{2009^{2009}}+1\right) = 2^{2009}+1$$

[1]La función φ de Euler se define sobre cualquier número natural n como el número de números entre 1 y $n-1$ que son primos relativos con n y se cumple (Teorema de Euler) que si a y n son primos entre sí, entonces $a^{\varphi(n)} \equiv 1$ (mód n).