Problema 3. *Definamos la función* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *como*

$$f(x) = \begin{cases} x & si\ x \leq e \\ x f(\log(x)) & si\ x \geq e \end{cases}$$

donde $\log(x)$ *representa el logaritmo neperiano de* x.
Determinar si la siguiente serie es o no convergente:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{f(n)}$$

Solución (L.L. Salcedo, Dpto. Física Atómica, Molecular y Nuclear). La serie es divergente. Usamos la notación $\log^k(x)$ para indicar que se toma k veces el logaritmo de x:

$$\log^0(x) = x, \qquad \log^k(x) = \log(\log^{k-1}(x)), \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$

Igualmente definimos

$$f_0(x) = x, \quad f_k(x) = f_{k-1}(x) \log^k(x), \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$

y

$$x_0 = 1, \quad x_k = e^{x_{k-1}}, \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$

Con estas definiciones es obvio que la función dada satisface

$$f(x) = f_k(x) \quad \text{para} \quad x_k \leq x \leq x_{k+1}\,.$$

Puesto que cada nuevo factor $\log^k(x)$ es positivo, creciente y 1 al principio del intervalo, $f(x)$ es positiva y monótonamente creciente para $x > 0$ y por tanto $1/f(x)$ es positiva y decreciente en para $x > 0$. Se deduce entonces que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{f(n)} \geq \int_1^{\infty} \frac{dx}{f(x)}\,.$$

La serie diverge ya que la integral diverge:

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{f(x)} = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{dx}{f(x)} = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{dx}{f_k(x)} := \sum_{k=0}^{\infty} I_k,$$

$$I_k = \int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{dx}{x \log(x) \cdots \log^k(x)}\,.$$

Haciendo el cambio de variable $t = \log(x)$ es inmediato que $t(x_k) = x_{k-1}$, $t(x_{k+1}) = x_k$, $dx/x = dt$, $\log^j(x) = \log^{j-1}(t)$ y en consecuencia

$$I_k = I_{k-1} = \cdots = I_0 = \int_1^e \frac{dx}{x} = 1\,,$$

y la integral y la serie son propiamente divergentes.