# A Graded Criterion in the Classification of Cofinite Homogeneous Ideals

Óscar Cortadellas

ocortad@ugr.es

XI Jornadas de Teoría de Anillos

Granada, 31 de mayo de 2012

# Colaboradores





Notas basadas en el artículo
*"A Graded Criterion in the Classification of Cofinite Homogeneous Ideals"* (en revisión)

En colaboración con **Pascual Jara Martínez** y **Javier Lobillo Borrero**

# ¿Qué vamos a estudiar?



Álgebras cocientes del tipo $\mathcal{A} = k\langle X\rangle/\mathcal{I}$ donde

- $k$ cuerpo
- $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ conjunto finito de variables
- $k\langle X\rangle$ álgebra libre asociativa sobre el conjunto $X$
- $\mathcal{I} \trianglelefteq k\langle X\rangle$ ideal bilátero *homogéneo*

**Ejemplo**

- $k = \mathbb{R}$
- $X = \{x, y\}, x > y$
- $k\langle X\rangle$ álgebra libre en dos variables
- $\mathcal{I} = \langle x^2yx - y^2x^2, xyxy - y^3x, xy^2x - yxy^2\rangle$

# ¿Por qué escogemos esta presentación?



- Realizar operaciones con los elementos $\bar{f}, \bar{g} \in k\langle X\rangle/\mathcal{I}$
- Necesitamos elegir *adecuadamente* representantes en cada clase

$$\Downarrow$$

**Bases de Gröbner-Shirshov**

**Problema (ambiente no conmutativo)**

- Pueden ser infinitas (no lema de Dickson)
- No existe método de construcción *razonable*

Ideal homogéneo $\Rightarrow$ NO aseguramos finitud
SÍ reducciones homogéneas
SÍ trabajar hasta el grado que queramos

# Situación general del problema

$\mathcal{A} = k\langle X\rangle/\mathcal{I}$, $\mathcal{I}$ homogéneo

## Proposición

Bajo estas condiciones, $\mathcal{A}$ es un álgebra *graduada*

- $\mathcal{A} = \bigoplus \mathcal{A}_i,\, i \in \mathbb{Z}$
- $\mathcal{A}_i \cdot A_j \subseteq A_{i+j}$
- $A_0 = k$
- $k$-base de $\mathcal{A}_j = \{\text{palabras irreducibles de } \mathcal{A}_j\}$

## Parametrización ideales homogéneos

- $a$ número de indeterminadas
- $b$ longitud de los monomios
- $c$ número de relaciones que conforman cada ideal

# Cómo estudiar estas familias de ideales

## Observaciones

$(a, b, c)$ fijos $\Rightarrow$ nº finito de casos

- $(2, 2, 2) \to 45$ casos
- $(2, 3, 4) \to 58905$ casos
- $(2, 4, 3) \to 420040$ casos
- $(3, 2, 4) \to 148995$ casos

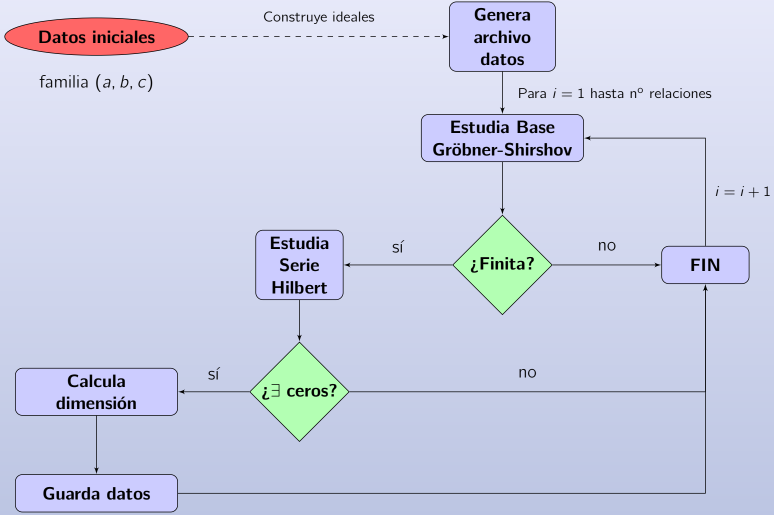
¿Cómo los estudiamos todos?

## Solución

- Programar una rutina en `C++`
- Poder de cálculo del sistema `Bergman`

(Software libre y disponible para todos los usuarios)

# Flujo del programa



# Pequeño ejemplo

**FAMILIA** $(2, 3, 4)$

58905 casos $\Rightarrow$ 10142 ideales cofinitos

dimensión finita máxima $\Rightarrow$ 25

- 288 ideales que generan álgebras de dimensión 11
- 2446 ideales que generan álgebras de dimensión 12
- 3578 ideales que generan álgebras de dimensión 13
- 1246 ideales que generan álgebras de dimensión 14
- 2146 ideales que generan álgebras de dimensión 15
- 92 ideales que generan álgebras de dimensión 16
- 174 ideales que generan álgebras de dimensión 17
- 88 ideales que generan álgebras de dimensión 18
- 8 ideales que generan álgebras de dimensión 19
- 72 ideales que generan álgebras de dimensión 21
- 4 ideales que generan álgebras de dimensión 25

$$\mathcal{J}_1 = \langle xxx, xyx, xxx - xyx, xyy - yyy \rangle$$
$$\mathcal{J}_2 = \langle xxx, xyx, xxx - xyx, yyx - yyy \rangle$$
[illegible]

# Buscando isomorfismos



Ejecutamos programa $\Rightarrow$ $L$ dimensión finita máxima en cada familia

**Primer *resultado***

Si un álgebra de la familia $(a, b, c)$ tiene dimensión superior a $L$, es infinito dimensional

| OBJETIVO | | SOLUCIÓN |
|---|---|---|
| Quién (o quiénes) es el álgebra maximal en cada familia | $\Rightarrow$ | Estudiar cuándo dos de estas álgebras son isomorfas |

# Primeros filtros



- Dimensión
- Serie de Hilbert (invariante álgebras graduadas)

**¿Cómo buscamos isomorfismos entre dos álgebras? (Shirayanagi,91)**

$\mathcal{A} = k\langle X\rangle/\mathcal{I}_{\mathcal{A}}, \mathcal{B} = k\langle X\rangle/\mathcal{I}_{\mathcal{B}}$. Construyo $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$

- $X = \{x, y\}$ generadores
- Base de $\mathcal{B} = \{b_1, b_2, \dots, b_m\}$
- $$\begin{array}{lcl} x & \mapsto & \alpha_1 b_1 + \cdots + \alpha_m b_m \\ y & \mapsto & \beta_1 b_1 + \cdots + \beta_m b_m \end{array}$$
- Calculo $M = M_\varphi$ y el determinante asociado $\det(M_\varphi)$
- Comprobar que $\varphi$ sea compatible con $\mathcal{I}_{\mathcal{A}}$ y $det(M_\varphi) \neq 0$

Y, ¿qué hacemos si $\dim(\mathcal{A}) = \dim(\mathcal{B}) = 24$?

# Isomorfismos graduados

## IDEA

Simplificar un poco la situación $\Rightarrow$ buscar isomorfismo graduado

$$\begin{array}{cccc} \tilde{\varphi} : & \mathcal{A} & \to & \mathcal{B} \\ & x & \mapsto & ax + by \\ & y & \mapsto & cx + dy \end{array}$$

$$\boxed{\mathcal{A}_1 \cong \mathcal{B}_1} + \boxed{\mathcal{A}_2 \cong \mathcal{B}_2} + \cdots + \boxed{\mathcal{A}_n \cong \mathcal{B}_n} = \boxed{\mathcal{A} \cong \mathcal{B}}$$

## Comprobación en grado $n$

- Calculo elementos irreducibles en $\mathcal{A}_n$
- Calculo la matriz de $\tilde{\varphi}_n$
- $\det(M_{\tilde{\varphi}_n}) \neq 0 \Rightarrow$ condiciones sobre $\{a, b, c, d\}$
- Calculo $\tilde{\varphi}(\mathcal{I}_{\mathcal{A}n}) \Rightarrow$ condiciones sobre $\{a, b, c, d\}$
- Compruebo compatibilidades

**Ideales**

$\mathcal{I}_{\mathcal{A}} = \langle xxx, xyx, xxx - xyx, xyy - yyy \rangle$

$\mathcal{I}_{\mathcal{B}} = \langle yxy, yyy, xxx - yxx, yxy - yyy \rangle$

Comprobación grado 1

Comprobación grado 2

Comprobación grado 3

Relaciones del ideal

- $\mathrm{Dim}(\mathcal{A}_1) = \mathrm{Dim}(\mathcal{B}) = 25$
- $\mathcal{H} = 1 + 2x + 4x^2 + 5x^3 + 5x^4 + 4x^5 + 3x^6 + x^7$

$$\begin{cases} \varphi(x) = ax + by \\ \varphi(y) = cx + dy \end{cases}$$

elementos normales $\Rightarrow \{xx, xy, yx, yy\}$

matriz asociada $\tilde{M}_2 = \begin{pmatrix} aa & ab & ab & bb \\ ac & ad & bc & bd \\ ac & bc & ad & bd \\ cc & cd & cd & dd \end{pmatrix}$

$det(\tilde{M}_2) \neq 0 \Leftrightarrow ad - bc \neq 0$

elementos normales $\{xxy, yxx, yxy, yyx, yyy\}$

matriz asociada

$aad \quad abc \quad abd \quad aac + abc \quad bbc$

**Condición Grado 123+ RelacionesFINAL**

$$ad - bc$$

$$bc(c + d)(bc - ad) \neq 0$$

$det(\tilde{M}_3) \neq 0 \Leftrightarrow bc(c + d)(bc - ad) \neq 0$

$$a = 0, \quad b = c \neq 0, \quad d = 0$$

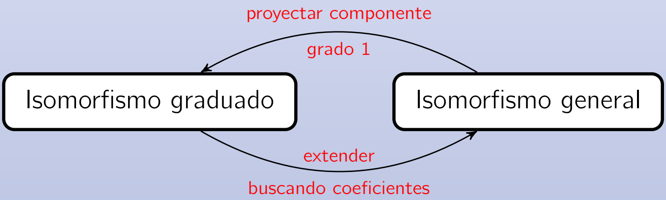
# ¿Es suficiente con esto?

¿isomorfismos graduados $<<$ isomorfismos en general?

**Teorema (CJL11)**

$\mathcal{A} = k\langle X\rangle/\mathcal{I}, \mathcal{B} = k\langle X\rangle/\mathcal{I}'$

*Si* $\exists\, \varphi : \mathcal{A} \overset{\cong}{\to} \mathcal{B} \Rightarrow \tilde{\varphi} = \pi_1 \circ \varphi$ *define un isomorfismo graduado entre* $\mathcal{A}$ *y* $\mathcal{B}$



# Comparación procedimientos

## Álgebras de la familia $(2,3,3)$ de dimensión 21



$$\mathcal{I}_{\mathcal{A}} = \langle xxx, yxy, yxx - yyy \rangle$$

### Isomorfismo graduado

- 4 coeficientes

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= ax + by \\ \varphi(y) &= cx + dy \end{aligned}$$

- Determinante grado 15

  $-bc^4(bc - ad)^5$

- 11 elementos en el ideal

  $\{a^2b, ab^2, a^3 + ab^2, acd, bcd, ad^2, ac^2 + bcd, abc - c^2d, a^2d - c^2d, a^2c + b^2c - c^3 - cd^2, abd - cd^2\}$

$a = 0 \quad b = \pm c \neq 0 \quad d = 0$

$\Downarrow$

$$\mathcal{I}_{\mathcal{B}} = \langle xyx, yyy, xxx - xyy \rangle$$

### Isomorfismo general

- 42 coeficientes

$$\begin{aligned} \varphi(x) = {} & a_1 + a_2x + a_3y + a_4xx + a_5xy + a_6yx + \\ & a_7yy + a_8xxy + a_9xyy + a_{10}yxx + \\ & a_{11}yxy + a_{12}yyx + a_{13}xyyx + a_{14}yxxy + \\ & a_{15}yxyy + a_{16}yyxx + a_{17}yyxy + a_{18}yxyyx + \\ & a_{19}yyxxy + a_{20}yyxyy + a_{21}yyxyyx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi(y) = {} & b_1 + b_2x + b_3y + b_4xx + b_5xy + b_6yx + \\ & b_7yy + b_8xxy + b_9xyy + b_{10}yxx + \\ & b_{11}yxy + b_{12}yyx + b_{13}xyyx + b_{14}yxxy + \\ & b_{15}yxyy + b_{16}yyxx + b_{17}yyxy + b_{18}yxyyx + \\ & b_{19}yyxxy + b_{20}yyxyy + b_{21}yyxyyx \end{aligned}$$

- Determinante grado 76

  $-a_3^{10}b_2^{16}(a_3b_2 - a_2b_3)^{17}\left(b_2^2 + 2b_3^2\right)^3$

- 63 elementos en el ideal

  $\{2a_1a_2b_1 + a_1^2b_2 - 3b_1^2b_2, a_1^2b_1 - b_1b_2^2, 2a_1a_3b_1 + a_1^2b_3 - 3b_1^2b_3, a_2^2b_1 + 2a_1a_4b_1 + 2a_1a_2b_2 - 3b_1b_2^2 + a_1^2b_4 -$

# Referencias

G. Bergman
*The diamond lemma for ring theory*, Adv. Math. 29, 178-218, 1978.

F. Mora
*Gröbner bases for non-commutative rings*, AAECC3, 229, 353-362, 1986.

K. Shirayanagi
*A classification of finite-dimensional monomial algebras*, Effective Methods in Algebraic Geometry, vol. 94, 469-482, 1991.

O. Cortadellas, P. Jara, F. J. Lobillo
*A graded criterion in the classification of cofinite homogeneous ideals*, preprint, 2011.

Programa Bergman

`http://servus.math.su.se/bergman/`

Inicio

# GRACIAS POR SU ASISTENCIA