
ÁLGEBRA Y ESTRUCTURAS FINITAS/DISCRETAS

Convocatoria Septiembre 2010

Tipo 1

Ejercicio 1. Dada $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Z}_7)$, entonces A^{13} vale:

- (a) $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$.
- (b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- (c) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.
- (d) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 2. Sea U el subespacio vectorial de \mathbb{R}^3 de ecuaciones $\begin{cases} 2x - y - 2z = 0 \\ 4x + y - z = 0 \end{cases}$.
Entonces $\mathbb{R}^3 = U \oplus V$

- (a) Si V es el subespacio generado por los vectores $(1, 2, 1)$, $(2, 1, 1)$, $(-1, -1, 1)$.
- (b) Si V es el subespacio de ecuación $2x + 2y + z = 0$.
- (c) Si V es el subespacio generado por los vectores $(1, -2, 2)$, $(2, 1, 3)$.
- (d) Si V es el subespacio generado por $(1, 1, 1)$, $(2, -1, 1)$.

Ejercicio 3. En el conjunto $M_2(\mathbb{Z}_2)$ definimos la relación de equivalencia $A \sim B \iff A^2 = B^2$. Entonces:

- (a) La matriz $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ pertenece a la clase de equivalencia de la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- (b) El conjunto cociente está formado por un solo elemento.
- (c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right]$.
- (d) La clase $\left[\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right]$ tiene cardinal uno.

Ejercicio 4. Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ una aplicación lineal tal que $f(1, 1) = (5, -2)$ y $f(2, 3) = (8, -3)$. Entonces $f(3, 5)$ es igual a

- (a) $(11, -4)$. (b) $(13, -5)$. (c) $(15, -1)$. (d) $(16, -7)$.

Ejercicio 5. Sean en \mathbb{R}^3 los conjuntos $B_1 = \{(1, 0, 1); (0, 1, 1); (1, 1, 1)\}$ y $B_2 = \{(1, -1, 0); (2, 1, 1); (1, 1, 2)\}$.
Entonces:

- (a) La matriz del cambio de base de B_2 a B_1 es $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.
- (b) La matriz del cambio de base de B_2 a B_1 es $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.
- (c) No existe matriz del cambio de base de B_2 a B_1 .
- (d) La matriz del cambio de base de B_2 a B_1 es $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 6. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Z}_5)$, y sea $U = \{B \in M_2(\mathbb{Z}_5) : A \cdot B = B \cdot A\}$. Entonces:

- (a) U es un subespacio vectorial de $M_2(\mathbb{Z}_5)$ de dimensión 2.
- (b) U es un subespacio vectorial de $M_2(\mathbb{Z}_5)$ de dimensión 1.
- (c) U es un subespacio vectorial de $M_2(\mathbb{Z}_5)$ de dimensión 3.
- (d) U no es subespacio vectorial.

Ejercicio 7. Dado el sistema de ecuaciones con coeficientes en \mathbb{Z}_7

$$\begin{cases} 3x + y + 5z = 6 \\ 2x + 3y + z = \alpha^2 + 1 \end{cases}$$

- (a) El sistema es compatible indeterminado para cualquier valor de α , pero el número de soluciones depende de α .
- (b) El sistema es incompatible, independientemente del valor de α .
- (c) El sistema es compatible indeterminado para cualquier valor de α , y tiene 7 soluciones.
- (d) Según el valor de α el sistema puede ser compatible indeterminado o incompatible.

Ejercicio 8. Dados U el subespacio de \mathbb{Z}_3^3 generado por los vectores $(3, 1, 4)$ y $(4, 3, 2)$ y V el subespacio de ecuaciones $\begin{cases} x + y + 4z = 0 \\ 3x + y + 3z = 0 \end{cases}$, una base de $U + V$ es

- (a) $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$.
- (b) $\{(1, 2, 4), (4, 3, 2)\}$.
- (c) $\{(1, 1, 2)\}$.
- (d) $\{(4, 2, 1), (2, 3, 0)\}$.

Ejercicio 9. Sea $f : \mathbb{Z}_3^2 \rightarrow \mathbb{Z}_3^2$ la aplicación lineal cuya matriz en la base $B = \{(1, 2), (1, 1)\}$ es $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Entonces, la matriz de f en la base canónica de \mathbb{Z}_3^2 es:

- (a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.
- (b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

(c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(d) $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 10. ¿Cuál de las siguientes matrices de $M_3(\mathbb{R})$ no es diagonalizable?

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. (b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. (c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. (d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 11. Sea A el conjunto de todas las aplicaciones lineales $f : \mathbb{Z}_7^3 \rightarrow \mathbb{Z}_7^3$ que verifican que $N(f) = \text{Im}(f)$. Entonces el cardinal del conjunto A es:

- (a) 1.
- (b) 7.
- (c) 49.
- (d) 0.

Ejercicio 12. La permutación $\alpha = (1\ 4\ 8)(2\ 3\ 5)$ es igual a

- (a) $(3\ 5)(4\ 8)(2\ 5)(1\ 4)$.
- (b) $(1\ 4)(4\ 8)(3\ 5)(2\ 3)$.
- (c) $(1\ 8)(1\ 4)(2\ 3)(3\ 5)$.
- (d) $(2\ 5)(2\ 3)(1\ 4)(1\ 8)$.

Ejercicio 13. Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha & 1 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{R})$. Entonces

- (a) Existe un número real α para el que el rango de A vale 1.
- (b) Existe $\alpha \in \mathbb{R}$ para el que el rango de A vale 2.
- (c) El rango de A vale 4 para cualquier valor real del parámetro α .
- (d) Para cualquier $\alpha \in \mathbb{R}$, el rango de A vale 3.

Ejercicio 14. Sean $U = L[(1, 2, 1)]$ y $V \equiv x + 2y + z = 0$ dos subespacios de \mathbb{Z}_5^3 . Sea $A \in M_3(\mathbb{Z}_5)$ una matriz para la que U es el subespacio propio de valor propio 3, y V el subespacio propio de valor propio 4. Entonces:

- (a) A no es diagonalizable.
- (b) A es diagonalizable, y una matriz de paso a una forma diagonal es $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.
- (c) A es diagonalizable, y una matriz de paso a una forma diagonal es $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$.

(d) A es diagonalizable, y una matriz de paso a una forma diagonal es $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & 4 & 4 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 15. Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \in M_{3 \times 4}(\mathbb{Z}_5)$. Sea $f : \mathbb{Z}_5^4 \rightarrow \mathbb{Z}_5^3$ la aplicación lineal cuya matriz en las bases canónicas de \mathbb{Z}_5^4 y \mathbb{Z}_5^3 es la matriz A . Entonces:

- (a) El núcleo de f es el subespacio de ecuación $x + y + 2z + t = 0$.
- (b) f es sobreyectiva.
- (c) La imagen de f es el subespacio generado por $(2, 3, 2)$ y $(3, 1, 2)$.
- (d) f es inyectiva.

Ejercicio 16. Sean A, B, C subconjuntos no vacíos de una conjunto X , tales que $A \not\subseteq B$ y $B \cap C = \emptyset$. ¿Cuál de las afirmaciones siguientes es falsa?

- (a) $\overline{A} \cup \overline{C} = X$
- (b) $C \subseteq \overline{B}$
- (c) $B \subseteq \overline{A}$
- (d) $\overline{A} \cap \overline{C} \neq \emptyset$

Ejercicio 17. Dada la matriz $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \in M_{3 \times 4}(\mathbb{Z}_7)$, su forma normal de Hermite por filas es:

- (a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- (b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
- (c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
- (d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 18. En S_{10} no existen permutaciones de orden:

- (a) 20.
- (b) 30.
- (c) 25.
- (d) 15.

Ejercicio 19. Si $A \in M_3(\mathbb{R})$ verifica que

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

entonces A^{-1} es igual a:

- (a) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -3 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.
- (b) $\begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.
- (c) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.
- (d) $\begin{pmatrix} 4 & -2 & -5 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 20. Sea la aplicación $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 1, & \text{si } x < 0 \\ x^2 + x - 2, & \text{si } x \geq 0 \end{cases} .$$

Entonces

- (a) f es inyectiva pero no es sobreyectiva.
- (b) f es sobreyectiva pero no es inyectiva.
- (c) f no es inyectiva ni sobreyectiva.
- (d) f es biyectiva.