ÁLGEBRA Y ESTRUCTURAS DISCRETAS \ FINITAS

Convocatoria Febrero 2010 — Tipo 1

Ejercicio 1. Dado el sistema de ecuaciones con coeficientes en $\mathbb{Z}_3$

$$\begin{array}{ccccccc} x & & & + & z & = & 1 \\ 2x & + & y & + & az & = & 1 \\ x & + & ay & + & z & = & 2 \end{array},$$

a) depende del valor de a que sea compatible determinado o incompatible, pero nunca es compatible indeterminado.

b) según el valor de a puede ser compatible determinado, compatible indeterminado o incompatible.

c) es siempre compatible. Depende del valor de a que sea compatible determinado o indeterminado.

d) el rango de la matriz de coeficientes vale 2. Por tanto, o es compatible indeterminado o es incompatible.

Ejercicio 2. Sean $A = \{a, c, d, g, j\}$ y $B = \{a, b, d, e, f, g, h, i\}$ dos subconjuntos del conjunto X = {a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k}. El subconjunto $C = \{c, g, j, k\}$ es un subconjunto de

a) $(B^c \cup A) \cap (A \cup B)$.

b) $(A \cap B) \cup B^c$.

c) $A^c \cup B$.

d) $A \times B$.

Ejercicio 3. Sea $f : (\mathbb{Z}_3)^4 \to (\mathbb{Z}_3)^4$ la aplicación lineal definida por

$$f(x, y, z, t) = (2x + y + z,\ 2x + y + z,\ 2x + 2y + t,\ y + 2z + t)$$

Entonces:

a) $(\mathbb{Z}_3)^4 = N(f) \oplus Im(f)$.

b) el vector $(1, 2, 0, 1)$ pertenece a la imagen de f.

c) $dim(N(f) \cap Im(f)) = 1$.

d) $N(f) \subseteq Im(f)$.

Ejercicio 4. Sean los vectores $v_1 = (1, 1, 2), v_2 = (3, 2, 4)$ y $v_3 = (1, 3, 1)$ pertenecientes a $(\mathbb{Z}_5)^3$ y sea

$$\mathcal{F} = \left\{ f : (\mathbb{Z}_5)^3 \to (\mathbb{Z}_5)^3 \mid f \text{ es aplicación lineal},\ f(v_1) = v_2,\ f(v_2) = v_3 \text{ y } f(v_3) = v_1 + v_2 \right\}.$$

Entonces el número de elementos de $\mathcal{F}$ es:

a) 0.

b) 1.

c) un número entero mayor que 1.

d) infinito

Ejercicio 5. Sea $A \in M_4(\mathbb{R})$. Entonces:

a) La matriz $A - A^t$ es una matriz simétrica, mientras que $A + A^t$ depende de cual sea la matriz A.

b) La matriz $A \cdot A^t$ es una matriz simétrica.

c) No podemos saber si las matrices $A + A^t$, $A \cdot A^t$ son o no simétricas sin conocer la matriz A.

d) Las matrices $A + A^t$ y $A - A^t$ son simétricas.

Ejercicio 6. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ con coeficientes en $\mathbb{Z}_p$ es regular para

a) $p = 5$.

b) $p = 7$.

c) $p = 3$.

d) $p = 2$.

Ejercicio 7. Sean U y W dos subespacios vectoriales de $M_{2\times 3}(\mathbb{Z}_5)$ de dimensiones 3 y 4 respectivamente. Indica cuál de las siguientes afirmaciones es necesariamente falsa:

a) $\dim(U \cap W) = 0$.

b) $\dim(U \cap W) = 2$.

c) $\dim(U \cap W) = 3$.

d) $\dim(U \cap W) = 1$.

Ejercicio 8. Sea $A \in M_3(\mathbb{Z}_7)$ una matriz cuyos valores propios son 1 y 3 y cuyos subespacios propios son $V_1 \equiv x + 3y + 2z = 0$ y $V_3 = L[(2, 1, 2)]$. Entonces A es la matriz:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 6 & 0 & 5 \\ 5 & 1 & 6 \end{pmatrix}$.

b) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix}$.

c) $\begin{pmatrix} 4 & 5 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \\ 6 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

d) $\begin{pmatrix} 3 & 6 & 4 \\ 1 & 4 & 2 \\ 2 & 6 & 5 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 9. Sean las matrices $A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ y $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ pertenecientes a $\in M_2(\mathbb{R})$. Entonces:

a) A_1 es diagonalizable y A_2 también lo es.

b) A_1 es diagonalizable aunque A_2 no lo es.

c) A_1 no es diagonalizable pero A_2 sí lo es.

d) Ninguna de las dos matrices es diagonalizable.

Ejercicio 10. Sea $\alpha = [(3\,1\,5\,2)(2\,3\,8)]^{-1}(1\,2\,5\,10)(6\,8\,9\,7)$ un elemento de S_{10}. Entonces α^{225} es la permutación

a) $(1\,7)(8\,6)(9\,2)$.

b) $(1\,5\,10\,2)$.

c) $(10\,5)(2\,1)$.

d) $(1\,9\,6\,2\,8\,7)(3\,10\,5)$.

Ejercicio 11. Sean $u = (0,1,3,3)$, $v = (2,2,1,2)$ y $w = (3,4,2,2)$ vectores de $(\mathbb{Z}_5)^4$. El conjunto formado por los vectores $\{2u, v, 4w, u+2v\}$

a) genera un subespacio de dimensión 3 dentro de $(\mathbb{Z}_5)^4$.

b) es linealmente indepedendiente.

c) es una base de $(\mathbb{Z}_5)^4$.

d) es linealmente dependiente, pues el tercer vector es combinación lineal de los otros tres.

Ejercicio 12. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in M_{3\times 4}(\mathbb{Z}_7)$, su forma normal de Hermite por filas es:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 13. Dada $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal $f(x,y,z) = (x-y+z, 2x+y+z, x-z)$ y U el subespacio de $\mathbb{R}^3$ de ecuación $x+y+z=0$, entonces:

a) $\{(2,1,1);\ (0,1,2);\ (2,0,-1)\}$ es una base de $f_*(U)$.

b) $f_*(U)$ es el subespacio generado por $(1,-1,0)$ y $(1,-2,1)$.

c) $f_*(U)$ es el subespacio de $\mathbb{R}^3$ de ecuación $x-4y+2z=0$.

d) $f_*(U)$ es el subespacio de $\mathbb{R}^3$ generado por el vector $(0,1,2)$.

Ejercicio 14. La aplicación $f : \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ definida por $f(x,y) = (y+2, 3x-y+1)$ es

a) inyectiva y no sobreyectiva.

b) sobreyectiva y no inyectiva.

c) inyectiva y sobreyectiva.

d) no inyectiva y no sobreyectiva.

Ejercicio 15. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la aplicación lineal $f(x, y) = (x + y, x + 2y)$. Sea $B = \{(1, 1)\ ,\ (3, 2)\}$ una base de $\mathbb{R}^2$. Entonces la matriz de f en la base B es:

a) $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$.

b) $\begin{pmatrix} -1 & 5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$.

c) $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$.

d) $\begin{pmatrix} 5 & 11 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 16. Sean $U = \left\{(x, y, z) \in (\mathbb{Z}_{11})^3 \mid 3x + 4y + 7z = 0\right\}$ y $W = \langle(1, 4, 6), (7, 10, 4)\rangle$ dos subespacios vectoriales de $(\mathbb{Z}_{11})^3$. El vector $v = (7, 5, 6)$

a) pertenece a $U \cap W$.

b) pertenece a W, pero no a U.

c) se puede expresar de forma única como suma de un vector de U y un vector de W.

d) se puede expresar como suma de un vector de U y un vector de W, aunque no de forma única.

Ejercicio 17. Sea X un conjunto con 5 elementos e Y un conjunto de cardinal 4. En el conjunto de las aplicaciones de X en Y definimos la relación:

$$f\ R\ g \text{ si existe } a \in X \text{ tal que } f(a) = g(a)$$

Entonces:

a) R es una relación que no es reflexiva.

b) R es una relación de equivalencia y el conjunto cociente tiene cardinal 4^5.

c) R es una relación que no es transitiva.

d) R es una relación que no es simétrica.

Ejercicio 18. Sean $\sigma = (1\,3\,4\,2\,7)(4\,5\,2)^{-1}(5\,8\,1)$ y $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 2 & 3 & 8 & 1 & 5 & 7 & 4 \end{pmatrix}$ dos elementos de S_8. La permutación α que verifica que

$$\alpha\sigma^{-1}\tau^2\alpha^2 = \alpha\tau\sigma\alpha$$

es:

a) $\alpha = (4\,5\,6\,7\,8)$.

b) $\alpha = (8\,6\,4)(5\,7)$.

c) $\alpha = (4\,6)(5\,7)(6\,8)$.

d) $\alpha = (4\,6\,8\,5\,7)$.

Ejercicio 19. Sea X un conjunto y A, B subconjuntos de X. Entonces $(X \times X) \setminus (A \times B)$ es

a) $(X \setminus A) \times (X \setminus B)$.

b) $((X \setminus A) \times X) \cup (X \times (X \setminus B))$.

c) $((X \setminus A) \times B) \cup (A \times (X \setminus B))$.

d) $((X \setminus A) \times B) \cap (A \times (X \setminus B))$.

Ejercicio 20. Sean $B = \{(1,3,2),(3,0,5),(2,1,6)\}$ y $B' = \{(3,4,1),(4,5,0),(4,6,1)\}$ dos bases de $(\mathbb{Z}_7)^3$. Sea x el vector cuyas coordenadas en la base B' son $(3,2,3)$. Entonces, las coordenadas del vector x en la base B son:

a) $(6,1,3)$.

b) $(3,2,3)$.

c) $(1,5,6)$.

d) $(5,3,5)$.