Convocatoria Febrero 2009

Ejercicio 1. Sean $V_1 \equiv \{x + y = 0\}$ y $V_2 = \langle(4, 2, 5)\rangle$ los subespacios propios de una matriz $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{Z}_7)$ de valores propios 3 y 5 respectivamente. Entonces

a) A no es diagonalizable pues tenemos únicamente dos subespacios propios.

b) A no es diganoalizable pues la multiplicidad geométrica del valor propio 5 es menor que la multiplicidad geométrica del valor propio 3.

c) A puede ser la matriz $\begin{pmatrix} 2 & 6 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \\ 4 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

d) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 5 & 2 & 6 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 2. En S_9 sea σ la permutación $(\ 1\ 2\ 4\ )(\ 4\ 7\ 6\ 2\ )^{-1}(\ 9\ 1\ 7\ 4\ )(\ 3\ 5\ )$. Entonces σ^{273} es igual a

a) 1.

b) σ^3.

c) σ.

d) σ^2.

Ejercicio 3. Sean los conjuntos $X_1 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ y $X_2 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ y $f : X_1 \to X_2$ la aplicación dada por $f(x) = x^2 + x + 1$ mod(6). Sean $A = \{2, 4, 6, 8, 10\} \subseteq X_1$ y $B = \{1, 5\} \subseteq X_2$. Entonces

a) $f^*(f_*(A) \cap \overline{B}) = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$.

b) $B \subseteq f_*(f^*(B))$.

c) $f^*(f_*(A) \cup B) = X_1$.

d) $f^*(f_*(A)) = A$.

Ejercicio 4. En el espacio vectorial $\mathbb{Z}_3^4$ se considera la base

$$B = \{(1, 0, 0, 0), (1, 2, 0, 0), (1, 1, 1, 0), (1, 1, 1, 2)\}$$

las coordenadas del vector $(1, 2, 1, 2)$ respecto de esta base B son:

a) $(0, 1, 2, 1)$

b) $(1, 2, 0, 1)$

c) $(1, 2, 1, 2)$

d) $(1, 2, 1, 0)$

Ejercicio 5. Sea el conjunto $X = \{-5,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5\}$. Sobre $X \times X$ definimos la relación $(x,y)\ R\ (x',y') \Leftrightarrow x^2+y^2 = (x')^2+(y')^2$. La afirmación correcta es

a) R no es antisimétrica y por lo tanto no es de equivalencia.

b) R es relación de equivalencia y $X \times X/R$ tiene 15 elementos.

c) R es relación de equivalencia y $[(1,1)]$ tiene 4 elementos.

d) el elemento $(-5,0)$ pertenece a dos clases de equivalencia distintas, la del $[(0,5)]$ y la del $[(3,4)]$.

Ejercicio 6. Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ dos matrices con coeficientes en $\mathbb{Z}_7$. Entonces $(A \cdot B)^{-1}$ es

a) no existe

b) $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}$

Ejercicio 7. Dada la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ por $f(x,y,z,t) = (x+z+t, y+2t, x+y+z+t)$ ¿qué afirmación es falsa?

a) Una base del núcleo es $\{(-1,0,1,0)\}$.

b) La imagen tiene dimensión 3.

c) Es inyectiva pero no sobreyectiva.

d) Es sobreyectiva pero no inyectiva.

Ejercicio 8. Sea $U_1 \equiv \left\{ \begin{array}{rcl} 2x+y & = & 0 \\ x+y+z & = & 0 \\ 2x+3y+4z & = & 0 \end{array} \right.$ y $U_2 = \langle (2,3,2),(1,0,1) \rangle$ subespacios vectoriales de $\mathbb{Z}_5^3$.

a) Existe una única aplicación lineal $f : \mathbb{Z}_5^3 \to \mathbb{Z}_5^3$ tal que $N(f) = U_1$ e $Im(f) = U_2$.

b) No existe $f : \mathbb{Z}_5^3 \to \mathbb{Z}_5^3$ tal que $N(f) = U_2$ e $Im(f) = U_1$ porque $U_1 \subseteq U_2$.

c) $\mathbb{Z}_5^3 = U_1 \oplus U_2$.

d) Existe al menos una aplicación lineal $f : \mathbb{Z}_5^3 \to \mathbb{Z}_5^3$ tales que $N(f) = U_2$ e $Im(f) = U_1$.

Ejercicio 9. Dadas las permutaciones

$$\sigma = (\ 2\ 5\ 3\ 6\ )(\ 3\ 4\ 1\ ) \text{ y } \tau = (\ 7\ 2\ 1\ 4\ )(\ 3\ 2\ 1\ 5\ )$$

la descomposición en ciclos disjuntos de $\sigma \circ \tau$ es

a) (1 6 2 5 3 4)

b) (1 5 3)(2 4 7)

c) (1 3 6 2)(4 7 5)

d) (1 6 2 5)(3 4)

Ejercicio 10. Sea $X = \{0,1,2,3,4,5\}$ y $A = \{1,2,3\}$. Entonces el cardinal de $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(\overline{A})$ es

a) 2^4

b) $2^6 - 1$

c) $2^4 - 1$

d) $2^3 \cdot 2^3$

Ejercicio 11. Señala la afirmación verdadera. La matriz en $\mathcal{M}_4(\mathbb{Z}_3)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

a) no tiene inversa para ningún valor de a.

b) tiene inversa para todo valor de a.

c) sólo tiene inversa para $a = 1$.

d) tiene inversa sólo cuando $a \neq 0$.

Ejercicio 12. En $\mathbb{R}^4$ un complementario del subespacio generado por:

$$\{(1,1,1,0),(0,1,0,1),(1,0,1,-1)\}$$

tiene base:

a) $\{(0,0,0,1),(0,1,0,0))\}$

b) $\{(1,1,1,-1)\}$

c) $\{(1,0,1,0)\}$

d) $\{(1,0,-1,0),(1,-1,0,1)\}$

Ejercicio 13. Sea la matriz $C = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & 5 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{Z}_7)$. Se verifica que

a) tiene valores propios $3, 1, 5$.

b) no es diagonalizable.

c) no tiene valores propios.

d) existe una matriz regular P tal que $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} = P^{-1} \cdot A \cdot P$.

Ejercicio 14. Sean los subespacios vectoriales $V_1 = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \begin{array}{rcl} 4x + 3y - 2z & = & 0 \\ 2x - 2y + 4z & = & 0 \end{array} \right\}$ y V_2 el subespacio generado por $\langle (1,2,-1), (-5,8,8), (-3,12,6) \rangle$. Una base de $V_1 + V_2$ es

a) $\{(1,2,-1),(-4,10,7)\}$

b) $\{(-5,8,8),(1,1,1),(0,0,0)\}$

c) $\{(4,3,2)\}$

d) $\{(2,-2,4),(1,2,-1)\}$

Ejercicio 15. Sea $f : \mathbb{Z}_5^3 \to \mathbb{Z}_5^4$ la aplicación dada por $f(x,y,z) = (x+3y+4z, x+2z, 2y+3z, x+y+z)$. Una base de la imagen de f es

a) $\{(1,1,1,5),(1,1,4,3)\}$

b) $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$

c) $\{(1,1,0,1),(0,1,1,4)\}$

d) $\{(4,2,3,1)\}$

Ejercicio 16. Dado el sistema de ecuaciones con coeficientes en $\mathbb{Z}_7$

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+ay+2z & = & 6 \\ 4x+5y+az & = & 1 \end{array}\right.$$

la respuesta correcta es

a) el sistema es compatible indeterminado y tiene exactamente 7 soluciones.

b) es siempre compatible, pero depende de a que sea compatible determinado o compatible indeterminado.

c) dependiendo del valor de a puede ser compatible o incompatible.

d) es compatible indeterminado, y el número de soluciones depende del valor de a.

Ejercicio 17. En $\mathbb{R}^4$ se considera el subespacio generado por

$$\{(1,2,0,0),(1,1,1,0)\}$$

¿cuál de estos sistemas de ecuaciones corresponde a unas ecuaciones cartesianas de este subespacio?

a) $\left\{\begin{array}{r} 2x-y=0 \\ x-z=0 \end{array}\right.$

b) $\left\{\begin{array}{r} 2x-y-z=0 \\ t=0 \end{array}\right.$

c) $\left\{\begin{array}{r} 2x-y=0 \\ t=0 \end{array}\right.$

d) $\left\{\ 2x-y=0\right.$

Ejercicio 18. Sea $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{N}\backslash\{0\} \to \mathbb{Q}$ la aplicación dada por $f(z,n) = \frac{z}{n}$. Entonces

a) f es una aplicación biyectiva.

b) f no es una aplicación inyectiva.

c) f no es una aplicación sobreyectiva.

d) f no es una aplicación.

Ejercicio 19. Sea $f : \mathbb{Z}_5^3 \to \mathbb{Z}_5^2$ la aplicación dada por $f(x,y,z) = (3x+2y+4z, x+4y+3z)$. Una base del núcleo de f es

a) $\{(1,1,0)\}$

b) $\{(1,1,0),(0,0,0)\}$

c) $\{(1,1,0),(0,1,2)\}$

d) $\{(0, 1, 2)\}$

Ejercicio 20. Dada la matriz en $\mathbb{R}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

señala la afirmación verdadera:

a) Tiene 3 valores propios son distintos, por tanto es diagonalizable.

b) Cuando $a = 1$ la matriz no es diagonalizable.

c) Cuando $a = 2$ la matriz no es diagonalizable.

d) Cuando $a = 0$ la matriz no es diagonalizable.