Técnicas Computacionales en la Clasificación de Ideales Cofinitos Homogéneos

Óscar Cortadellas

ocortad@ugr.es

Universidad de Granada
Departamento de Álgebra

Ceuta, 14 de mayo de 2010

Colaboradores

Trabajo realizado en colaboración con
Pascual Jara Martínez y **Javier Lobillo Borrero**.

Situando el problema

- Sea k cuerpo
- $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ conjunto finito de variables
- $k\langle X\rangle$ álgebra libre asociativa sobre el conjunto X
- $\mathcal{I}$ ideal bilátero de dicha álgebra

Situando el problema

- Sea k cuerpo
- $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ conjunto finito de variables
- $k\langle X \rangle$ álgebra libre asociativa sobre el conjunto X
- $\mathcal{I}$ ideal bilátero de dicha álgebra

Problema

- ¿Es $\mathcal{A} = k\langle X \rangle / \mathcal{I}$ un álgebra de dimensión finita?
- ¿Qué condiciones, necesarias o suficientes, debe verificar $\mathcal{I}$ para que el álgebra anterior sea finita?
- ¿Podemos elaborar algún test que nos resuelva este problema?

$$\text{Representación } \mathcal{A} \Rightarrow \begin{cases} \text{familia de generadores} \rightarrow X \\ \text{relaciones} \rightarrow \mathcal{I} \end{cases}$$

El álgebra $\mathcal{A}$

Reducciones

$$\text{Representación } \mathcal{A} \Rightarrow \begin{cases} \text{familia de generadores} \rightarrow X \\ \text{relaciones} \rightarrow \mathcal{I} \end{cases}$$

$$\sigma \in \mathcal{I} \Rightarrow W_\sigma = f_\sigma, \quad \begin{array}{l} W_\sigma \text{ es un monomio en } X \\ f_\sigma \text{ es una combinación } k\text{-lineal de monomios.} \end{array}$$

$$\text{Representación } \mathcal{A} \Rightarrow \begin{cases} \text{familia de generadores} \rightarrow X \\ \text{relaciones} \rightarrow \mathcal{I} \end{cases}$$

$$\sigma \in \mathcal{I} \Rightarrow W_\sigma = f_\sigma, \quad \begin{array}{l} W_\sigma \text{ es un monomio en } X \\ f_\sigma \text{ es una combinación } k\text{-lineal de monomios.} \end{array}$$

Proceso de reducción: $\mathcal{A} \ni a = hW_\sigma g \longrightarrow hf_\sigma g, \quad h, g \in \mathcal{A}$

$$\text{Representación } \mathcal{A} \Rightarrow \begin{cases} \text{familia de generadores} \rightarrow X \\ \text{relaciones} \rightarrow \mathcal{I} \end{cases}$$

$$\sigma \in \mathcal{I} \Rightarrow W_\sigma = f_\sigma, \quad \begin{array}{l} W_\sigma \text{ es un monomio en } X \\ f_\sigma \text{ es una combinación } k\text{-lineal de monomios.} \end{array}$$

Proceso de reducción: $\mathcal{A} \ni a = hW_\sigma g \longrightarrow hf_\sigma g, \quad h, g \in \mathcal{A}$

$\Downarrow$ Lema del Diamante, Buchberger, Teo Mora ...

Bases de Gröbner no conmutativas

El álgebra $\mathcal{A}$

Reducciones

Representación $\mathcal{A} \Rightarrow \begin{cases} \text{familia de generadores} \longrightarrow X \\ \text{relaciones} \longrightarrow \mathcal{I} \end{cases}$

$\sigma \in \mathcal{I} \Rightarrow W_\sigma = f_\sigma,$ $\quad$ W_σ es un monomio en X
f_σ es una combinación k-lineal de monomios.

Proceso de reducción: $\mathcal{A} \ni a = hW_\sigma g \longrightarrow hf_\sigma g, \quad h, g \in \mathcal{A}$

$\Downarrow$ $\quad$ Lema del Diamante, Buchberger, Teo Mora ...

Bases de Gröbner no conmutativas

- $k\langle X\rangle \equiv$ palabras en el alfabeto X
- $\mathcal{I}$ conjunto de reducciones $f, g \in \mathcal{I}$, entonces

  $f, g \in \mathcal{I} \Rightarrow f + g \in \mathcal{I}$
  $f \in \mathcal{I} \Rightarrow rfs \in \mathcal{I}$, para todo $r, s \in k\langle X\rangle$
- Orden graduado lexicográfico

- $f \in k\langle X\rangle$ es combinación de monomios $\Rightarrow \exists\ \mathrm{lm}(f)$
- $\mathcal{I}$ ideal en $k\langle X\rangle \Rightarrow I(\mathcal{I}) = \langle \mathrm{lm}(f) | f \in \mathcal{I}\rangle$
- Base de Gröbner de $\mathcal{I}$ es un conjunto $G = \{g_i\} \subseteq \mathcal{I}$ tal que $I(\mathcal{I}) = \langle \mathrm{lm}(g_i)\rangle$

- $f \in k\langle X\rangle$ es combinación de monomios $\Rightarrow \exists \operatorname{lm}(f)$
- $\mathcal{I}$ ideal en $k\langle X\rangle \Rightarrow I(\mathcal{I}) = \langle \operatorname{lm}(f) | f \in \mathcal{I}\rangle$
- Base de Gröbner de $\mathcal{I}$ es un conjunto $G = \{g_i\} \subseteq \mathcal{I}$ tal que $I(\mathcal{I}) = \langle \operatorname{lm}(g_i)\rangle$

Dado cualquier elemento en $k\langle X\rangle$ podemos calcular una forma normal única con respecto a $\mathcal{I}$ con la ayuda de la base de Gröbner.

Proposición

Sea G una base de Gröbner para el ideal $\mathcal{I}$. Entonces $red(f_1, G) = red(f_2, G)$ si y sólo si $f_1 - f_2 \in \mathcal{I}$. En particular $red(f, G) = 0 \Leftrightarrow f \in \mathcal{I}$.

Sea $\mathcal{A} = k\langle X\rangle/\mathcal{I}$ un álgebra cociente, G base de Gröbner de $\mathcal{I}$.

palabras normales $\equiv \{f \in k\langle X\rangle$ tales que $red(f, G) \neq f\}$

Sea $\mathcal{A} = k\langle X\rangle/\mathcal{I}$ un álgebra cociente, G base de Gröbner de $\mathcal{I}$.

palabras normales $\equiv \{f \in k\langle X\rangle$ tales que $red(f, G) \neq f\}$

Proposición

Sea $\mathcal{I}$ un ideal de $k\langle X\rangle$. Los monomios que no pertenecen a $l(\mathcal{I})$ forman una k-base de $k\langle X\rangle/\mathcal{I}$.

El álgebra $\mathcal{A}$

Palabras normales

Sea $\mathcal{A} = k\langle X\rangle/\mathcal{I}$ un álgebra cociente, G base de Gröbner de $\mathcal{I}$.

palabras normales $\equiv \{f \in k\langle X\rangle$ tales que $red(f, G) \neq f\}$

Proposición

Sea $\mathcal{I}$ un ideal de $k\langle X\rangle$. Los monomios que no pertenecen a $l(\mathcal{I})$ forman una k-base de $k\langle X\rangle/\mathcal{I}$.

Idea

- Calculo G base de Gröbner de $\mathcal{I}$
- $l(\mathcal{I}) = \langle \mathrm{lm}(g_i)\rangle$
- Calculo palabras normales $\Rightarrow$ base de $\mathcal{A}$

PROBLEMA

$\Downarrow$

Bases de Gröbner infinitas

PROBLEMA

$\Downarrow$

Bases de Gröbner infinitas

- $k\langle X\rangle = \bigoplus_i k\langle X\rangle_i$, $k\langle X\rangle_i = \{$monomios en X de grado $i\}$
- $f = \sum_i f_i \in k\langle X\rangle$ es homogéneo si $\exists\, j$ tal que $f_i \in k\langle X\rangle_j, \forall i$
- Ideal homogéneo $\equiv$ ideal que puede ser generado por elementos homogéneos
- $\mathcal{A} = k\langle X\rangle/\mathcal{I}$ se dice homogénea si $\mathcal{I}$ es homogéneo

PROBLEMA

$\Downarrow$

Bases de Gröbner infinitas

- $k\langle X\rangle = \bigoplus_i k\langle X\rangle_i$, $k\langle X\rangle_i = \{$monomios en X de grado $i\}$
- $f = \sum_i f_i \in k\langle X\rangle$ es homogéneo si $\exists\, j$ tal que $f_i \in k\langle X\rangle_j, \forall i$
- Ideal homogéneo $\equiv$ ideal que puede ser generado por elementos homogéneos
- $\mathcal{A} = k\langle X\rangle/\mathcal{I}$ se dice homogénea si $\mathcal{I}$ es homogéneo

SOLUCIÓN

$\Downarrow$

En álgebras homogéneas podemos calcular la base de Gröbner de $\mathcal{I}$ grado a grado

Trabajar con álgebras homogéneas

- NO resuelve el problema de infinitud
- SÍ nos permite resolver el problema de pertenencia en el caso no conmutativo

Trabajar con álgebras homogéneas

- NO resuelve el problema de infinitud
- SÍ nos permite resolver el problema de pertenencia en el caso no conmutativo

Ejemplo (ideal principal)

- $B = k\langle x, y\rangle$
- $\mathcal{I} = \langle xyx - yxy\rangle$

Una base de Gröbner para $\mathcal{I}$ es
$G = \{xyx - yxy\} \cup \{xy^{i-3}xy - yxy^2x^{i-4}, i > 3\}$

El álgebra $\mathcal{A}$

Bases de Gröbner infinitas

Trabajar con álgebras homogéneas

- NO resuelve el problema de infinitud
- SÍ nos permite resolver el problema de pertenencia en el caso no conmutativo

Ejemplo (ideal principal)

- $B = k\langle x, y\rangle$
- $\mathcal{I} = \langle xyx - yxy\rangle$

Una base de Gröbner para $\mathcal{I}$ es
$G = \{xyx - yxy\} \cup \{xy^{i-3}xy - yxy^2x^{i-4}, i > 3\}$

Base de Gröbner finita $\Rightarrow$ algoritmo termina

Homogeneización

- $f \in k\langle X\rangle, f = f_d + f_{d-1} + \cdots + f_0, f_j \in k\langle X\rangle_j$
- $f^* = f_d + tf_{d-1} + \cdots + t^d f_0 \in k\langle X, t\rangle$, homogeneización de f
- $g \in k\langle X, t\rangle, \quad g_* = g(X, 1)$, dehomogeneización de g

Homogeneización

- $f \in k\langle X\rangle, f = f_d + f_{d-1} + \cdots + f_0, f_j \in k\langle X\rangle_j$
- $f^* = f_d + tf_{d-1} + \cdots + t^d f_0 \in k\langle X, t\rangle$, homogeneización de f
- $g \in k\langle X, t\rangle, \quad g_* = g(X, 1)$, dehomogeneización de g

$\mathcal{I} = \langle f_1, \dots, f_s\rangle$ ideal de $k\langle X\rangle$
$\mathcal{I}^* = \langle f_1^*, \dots, f_s^*, x_i t - tx_i, 1 \leq i \leq n\rangle$, ideal homogeneizado de $\mathcal{I}$

Homogeneización

Relaciones no homogéneas

Homogeneización

- $f \in k\langle X\rangle, f = f_d + f_{d-1} + \cdots + f_0, f_j \in k\langle X\rangle_j$
- $f^* = f_d + tf_{d-1} + \cdots + t^d f_0 \in k\langle X, t\rangle$, homogeneización de f
- $g \in k\langle X, t\rangle, \quad g_* = g(X, 1)$, dehomogeneización de g

$\mathcal{I} = \langle f_1, \ldots, f_s\rangle$ ideal de $k\langle X\rangle$
$\mathcal{I}^* = \langle f_1^*, \ldots, f_s^*, x_i t - tx_i, 1 \leq i \leq n\rangle$, ideal homogeneizado de $\mathcal{I}$

Teorema

Sea G una base de Gröbner reducida para $\mathcal{I}^*$. Entonces $G_* = \{g_* | g \in G\}$ es una base de Gröbner para $\mathcal{I}$.

Ejemplo

$\mathcal{I} = \langle x^2 - yx, xy - y \rangle \in k\langle x, y \rangle$.
$\mathcal{I}^* = \langle x^2 - xy, xy - ty, xt - tx, yt - ty \rangle \in k\langle x, y, t \rangle$
$G = \{y^2x - tyx, ty^2 - t^2y, x^2 - yx, xy - ty, xt - tx, yt - yt\}$ base de Gröbner de $\mathcal{I}^*$.

Ejemplo

$\mathcal{I} = \langle x^2 - yx, xy - y \rangle \in k\langle x, y \rangle$.
$\mathcal{I}^* = \langle x^2 - xy, xy - ty, xt - tx, yt - ty \rangle \in k\langle x, y, t \rangle$
$G = \{y^2x - tyx, ty^2 - t^2y, x^2 - yx, xy - ty, xt - tx, yt - yt\}$ base de Gröbner de $\mathcal{I}^*$.

$\stackrel{\textit{Teorema}}{\Longrightarrow} G_* = \{y^2x - yx, y^2 - y, x^2 - yx, xy - y\}$ es una base de Gröbner para $\mathcal{I}$.

Ejemplo

$\mathcal{I} = \langle x^2 - yx, xy - y\rangle \in k\langle x, y\rangle$.
$\mathcal{I}^* = \langle x^2 - xy, xy - ty, xt - tx, yt - ty\rangle \in k\langle x, y, t\rangle$
$G = \{y^2x - tyx, ty^2 - t^2y, x^2 - yx, xy - ty, xt - tx, yt - yt\}$ base de Gröbner de $\mathcal{I}^*$.

$\overset{Teorema}{\Longrightarrow}$ $G_* = \{y^2x - yx, y^2 - y, x^2 - yx, xy - y\}$ es una base de Gröbner para $\mathcal{I}$.

Otros problemas:

- Aumentamos el número de variables
- Nuevo orden, ya que t tiene un comportamiento singular
- No obtenemos base de Gröbner reducida de $\mathcal{I}$
- $\mathcal{I}$ tiene base de Gröbner finita pero $\mathcal{I}^*$ infinita

Homogeneización

Estrategia del conejo

- Calculamos elementos base Gröbner grado a grado
- Si algún elemento es múltiplo de t, podemos simplificarlo
  - Rebajamos el grado de la relación
  - Debemos "saltar" a graduaciones inferiores por si esta nueva relación reduce alguna de las anteriores

Homogeneización

Estrategia del conejo

- Calculamos elementos base Gröbner grado a grado
- Si algún elemento es múltiplo de t, podemos simplificarlo
  - Rebajamos el grado de la relación
  - Debemos "saltar" a graduaciones inferiores por si esta nueva relación reduce alguna de las anteriores

Ésta es la estrategia del conejo. Así

- Evitamos posibles familias infinitas que involucren a t
- Obtenemos base de Gröbner reducida de $\mathcal{I}$ tras dehomogeneización

(Se puede hacer para al caso anterior y obtenemos la base de Gröbner minimal)

*

Aviso

Durante el resto de la exposición

$$\Downarrow$$

ÁLGEBRAS HOMOGÉNEAS

Dimensión de Gelfand-Kirillov

- k cuerpo, A álgebra finitamente generada
- $V \subseteq A$ tal que A es generada como álgebra sobre k por V
- $k \subseteq V \subseteq V^2 \subseteq \cdots \subseteq V^n \subseteq \bigcup_{n=0}^{\infty} V^n = A$

Dimensión de Gelfand-Kirillov

- k cuerpo, A álgebra finitamente generada
- $V \subseteq A$ tal que A es generada como álgebra sobre k por V
- $k \subseteq V \subseteq V^2 \subseteq \cdots \subseteq V^n \subseteq \bigcup_{n=0}^{\infty} V^n = A$

$$\mathrm{GKdim}_k(A) = \overline{\lim} \frac{\log \dim_k(V^n)}{\log n}$$

Dimensión de Gelfand-Kirillov

- k cuerpo, A álgebra finitamente generada
- $V \subseteq A$ tal que A es generada como álgebra sobre k por V
- $k \subseteq V \subseteq V^2 \subseteq \cdots \subseteq V^n \subseteq \bigcup_{n=0}^{\infty} V^n = A$

$$\mathrm{GKdim}_k(A) = \overline{\lim} \frac{\log \dim_k(V^n)}{\log n}$$

Resultado

$$\dim_k(A) < \infty \Leftrightarrow \mathrm{GKdim}_k(A) = 0$$

$$\Downarrow$$

GKdim "mide" lo lejos que está A de tener dimensión finita

Estudiar GKdim álgebras homogéneas $\Rightarrow$ Grafos de Ufnarovskii

Estudiar GKdim álgebras homogéneas $\Rightarrow$ Grafos de Ufnarovskii.

- $k\langle X\rangle$, álgebra libre en alfabeto X
- $\mathcal{I}$ ideal homogéneo
- $\mathcal{A} = k\langle X\rangle/\mathcal{I}$, G base de Gröbner finita de $\mathcal{I}$ y d grado máximo elementos de G

Estudiar GKdim álgebras homogéneas $\Rightarrow$ Grafos de Ufnarovskii.

- $k\langle X\rangle$, álgebra libre en alfabeto X
- $\mathcal{I}$ ideal homogéneo
- $\mathcal{A} = k\langle X\rangle/\mathcal{I}$, G base de Gröbner finita de $\mathcal{I}$ y d grado máximo elementos de G

Construcción grafo de Ufnarovskii

- El conjunto de vértices lo forman las palabras normales de grado $d-1$
- Existe una flecha entre v_i y v_j si existen un $x_i, x_j \in \langle X\rangle$ tal que $v_i x_i = x_j v_j$ y $v_i x_i$ es una palabra normal. Si tal flecha existe, lleva por etiqueta x_i.

Teorema (Ufnarovskii)

El crecimiento del número de caminos de un grafo finito es uno de los siguientes:

- *es exponencial si y sólo si existen dos ciclos que comparten algún vértice;*
- *es polinomial de grado m, donde m es el número máximo de ciclos distintos que pueden recorrerse en un camino simple.*

Teorema (Ufnarovskii)

El crecimiento del número de caminos de un grafo finito es uno de los siguientes:

- *es exponencial si y sólo si existen dos ciclos que comparten algún vértice;*
- *es polinomial de grado m, donde m es el número máximo de ciclos distintos que pueden recorrerse en un camino simple.*

Teorema (Ufnarovskii)

Sea $\mathcal{A} = k\langle X\rangle/\mathcal{I}$. El crecimiento del grafo de Ufnarovskii asociado se corresponde con el crecimiento del álgebra $\mathcal{A}$ y el teorema anterior nos da un criterio para ese crecimiento.

Sea $\mathcal{I} = \langle x^2y - xyx, xyx - y^3 \rangle \subset k\langle x, y \rangle$. Su base de Gröbner es $\{xyx - y^3, x^2y - y^3, xy^3 - y^3x, y^3xy - y^4x, y^3x^2 - y^5\}$.

Clasificación de Ideales Cofinitos Homogéneos

Óscar Cortadellas

Notas Iniciales
- Ejemplo
- El álgebra $\mathcal{A}$
- Homogeneización

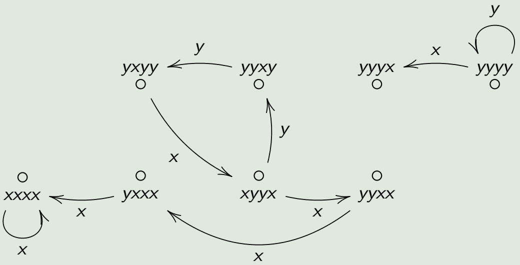
Crecimiento de álgebras
- Dimensión de Gelfand-Kirillov
- Grafos de Ufnarovskii
- Series de Hilbert

Técnicas Computacionales
- Programa Bergman
- Familias de ejemplos
- Resultados teóricos

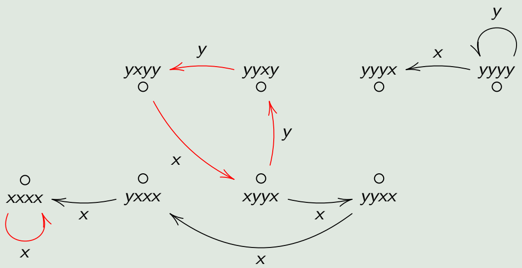
Problemas abiertos

Referencias

Sea $\mathcal{I} = \langle x^2y - xyx, xyx - y^3 \rangle \subset k\langle x, y \rangle$. Su base de Gröbner es $\{xyx - y^3, x^2y - y^3, xy^3 - y^3x, y^3xy - y^4x, y^3x^2 - y^5\}$. El grafo de Ufnarovskii que le corresponde es:



Sea $\mathcal{I} = \langle x^2y - xyx, xyx - y^3 \rangle \subset k\langle x, y \rangle$. Su base de Gröbner es $\{xyx - y^3, x^2y - y^3, xy^3 - y^3x, y^3xy - y^4x, y^3x^2 - y^5\}$. El grafo de Ufnarovskii que le corresponde es:



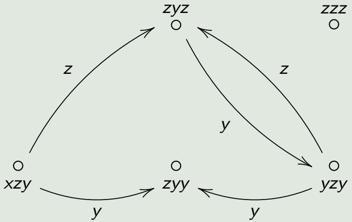
Por lo tanto el crecimiento de este álgebra es polinomial de grado 2.

Sea $\mathcal{I} = \langle x^2 - z^2, xy + zx, xyz, z^2 - yx, x^2y - xyx, y^2z - z^3, y^3 \rangle$ que tiene por base de Gröbner $\{yx - z^2, xy + zx, x^2 - z^2, -z^2y - z^3, zxz, -yz^2 - z^3, yzx - z^3, y^2z + z^3, y^3, xz^2 + z^3, -xzx + z^3, z^4\}$.

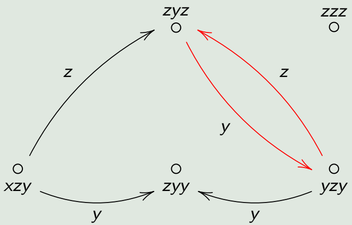
Grafos de Ufnarovskii

Ejemplos II

Sea $\mathcal{I} = \langle x^2 - z^2, xy + zx, xyz, z^2 - yx, x^2y - xyx, y^2z - z^3, y^3 \rangle$ que tiene por base de Gröbner $\{yx - z^2, xy + zx, x^2 - z^2, -z^2y - z^3, zxz, -yz^2 - z^3, yzx - z^3, y^2z + z^3, y^3, xz^2 + z^3, -xzx + z^3, z^4\}$. Su grafo de Ufnarovskii es



Sea $\mathcal{I} = \langle x^2 - z^2, xy + zx, xyz, z^2 - yx, x^2y - xyx, y^2z - z^3, y^3 \rangle$ que tiene por base de Gröbner $\{yx - z^2, xy + zx, x^2 - z^2, -z^2y - z^3, zxz, -yz^2 - z^3, yzx - z^3, y^2z + z^3, y^3, xz^2 + z^3, -xzx + z^3, z^4\}$. Su grafo de Ufnarovskii es



El álgebra cociente tiene crecimiento polinomial y tiene dimensión de Gelfand-Kirillov uno.

Grafos de Ufnarovskii

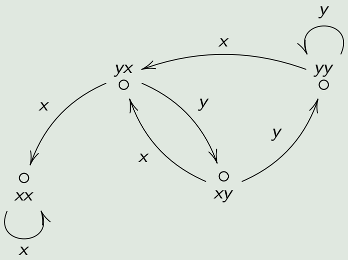
Ejemplos III

Sea $\mathcal{I} = \langle x^2y - y^3 \rangle \subset k\langle x, y \rangle$ que tiene por base de Gröbner $\{x^2y - y^3\}$.

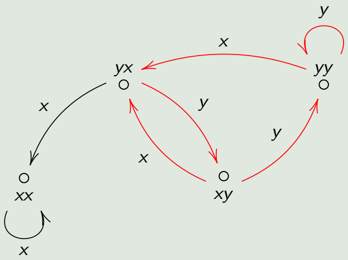
Grafos de Ufnarovskii

Ejemplos III

Sea $\mathcal{I} = \langle x^2y - y^3 \rangle \subset k\langle x, y \rangle$ que tiene por base de Gröbner $\{x^2y - y^3\}$. Su grafo de Ufnarovskii es



Sea $\mathcal{I} = \langle x^2y - y^3 \rangle \subset k\langle x, y \rangle$ que tiene por base de Gröbner $\{x^2y - y^3\}$. Su grafo de Ufnarovskii es



El álgebra cociente correspondiente es exponencial y tiene dimensión de Gelfand-Kirillov infinita.

- $\mathcal{A} = k\langle X\rangle/\mathcal{I}$ álgebra homogénea
- $\mathcal{A} = \bigoplus_{i\geq 0} \mathcal{A}_i$, donde $\mathcal{A}_i$ es k-espacio vectorial de elementos homogéneos de grado i en $\mathcal{A}$
- $\dim_k(\mathcal{A}_i) < \infty$, ya que existe un número finito de monomios de grado i

- $\mathcal{A} = k\langle X \rangle / \mathcal{I}$ álgebra homogénea
- $\mathcal{A} = \bigoplus_{i \geq 0} \mathcal{A}_i$, donde $\mathcal{A}_i$ es k-espacio vectorial de elementos homogéneos de grado i en $\mathcal{A}$
- $\dim_k(\mathcal{A}_i) < \infty$, ya que existe un número finito de monomios de grado i

$h(i) = \dim_k(\mathcal{A}_i)$ se llama función de Hilbert de $\mathcal{A}$

$H_{\mathcal{A}}(Z) = \sum_{i \geq 0} h(i) Z^i$ se llama serie de Hilbert de $\mathcal{A}$

Series de Hilbert
Definición

- $\mathcal{A} = k\langle X\rangle/\mathcal{I}$ álgebra homogénea
- $\mathcal{A} = \bigoplus_{i\geq 0} \mathcal{A}_i$, donde $\mathcal{A}_i$ es k-espacio vectorial de elementos homogéneos de grado i en $\mathcal{A}$
- $\dim_k(\mathcal{A}_i) < \infty$, ya que existe un número finito de monomios de grado i

$h(i) = \dim_k(\mathcal{A}_i)$ se llama función de Hilbert de $\mathcal{A}$

$H_{\mathcal{A}}(Z) = \sum_{i\geq 0} h(i)Z^i$ se llama serie de Hilbert de $\mathcal{A}$

Condición de finitud

$$\dim_k(\mathcal{A}) < \infty \Leftrightarrow \exists i \text{ tal que } h(i) = 0$$

Corolario

Sea $\mathcal{A}$ un álgebra homogénea. $\mathrm{GKdim}(\mathcal{A}) \leq 1 \Leftrightarrow$ los coeficientes de la serie de Hilbert son eventualmente periódicos.

- $\mathrm{GKdim}(\mathcal{A}) = 1$ si la serie de Hilbert estabiliza en un valor distinto de cero
- $\mathrm{GKdim}(\mathcal{A}) = 0$ (por lo tanto finita) si los coeficientes se hacen cero

Series de Hilbert
Resultados y ejemplos

Corolario

Sea $\mathcal{A}$ un álgebra homogénea. $\mathrm{GKdim}(\mathcal{A}) \leq 1 \Leftrightarrow$ los coeficientes de la serie de Hilbert son eventualmente periódicos.

- $\mathrm{GKdim}(\mathcal{A}) = 1$ si la serie de Hilbert estabiliza en un valor distinto de cero
- $\mathrm{GKdim}(\mathcal{A}) = 0$ (por lo tanto finita) si los coeficientes se hacen cero

Ejemplo

Sea $\mathcal{I} = \langle x^2 - z^2, xy + zx, xyz, z^2 - yx, x^2y - xyx, y^2z - z^3, y^3 \rangle$ (ejemplo de grafos), con crecimiento polinomial de grado 1.
Su serie de Hilbert es
$1 + 3z + 6z^2 + 5z^3 + 5z^4 + 4z^5 + 5z^6 + 4z^7 + \cdots + 5z^{24} + 4z^{25} + \cdots$,
que es eventualmente periódica

El Programa Bergman

Introducción I

Seguimos arrastrando nuestro problema principal, la ausencia de algoritmo para la finitud de la base de Gröbner. Podemos calcular los elementos hasta grado 3000 y que la base de Gröbner termine en el grado 3010 sin tener ninguna prueba antes

El Programa Bergman

Introducción I

Seguimos arrastrando nuestro problema principal, la ausencia de algoritmo para la finitud de la base de Gröbner. Podemos calcular los elementos hasta grado 3000 y que la base de Gröbner termine en el grado 3010 sin tener ninguna prueba antes

¿Podemos encontrar alguna cota a partir de la cual podamos asegurar que el álgebra que estamos estudiando es infinita?

Seguimos arrastrando nuestro problema principal, la ausencia de algoritmo para la finitud de la base de Gröbner. Podemos calcular los elementos hasta grado 3000 y que la base de Gröbner termine en el grado 3010 sin tener ninguna prueba antes

¿Podemos encontrar alguna cota a partir de la cual podamos asegurar que el álgebra que estamos estudiando es infinita?

Plan de trabajo:

- estudiar grandes familias de ejemplos en busca de esas cotas
- usar series de Hilbert y su relación con las bases de Gröbner

Y ahora entra en acción el programa Bergman

- Desarrollado por Jörgen Backelin (Universidad de Estocolmo)
- Estudio de álgebras conmutativas y no conmutativas

  Bases de Gröbner (estrategia del conejo)
  Número de S-polinomios resueltos
  Reducciones y formas normales
  Series de Hilbert
  . . .

El Programa Bergman

Introducción II

Y ahora entra en acción el programa Bergman ↩

- Desarrollado por Jörgen Backelin (Universidad de Estocolmo)
- Estudio de álgebras conmutativas y no conmutativas

  Bases de Gröbner (estrategia del conejo)
  Número de S-polinomios resueltos
  Reducciones y formas normales
  Series de Hilbert
  ...

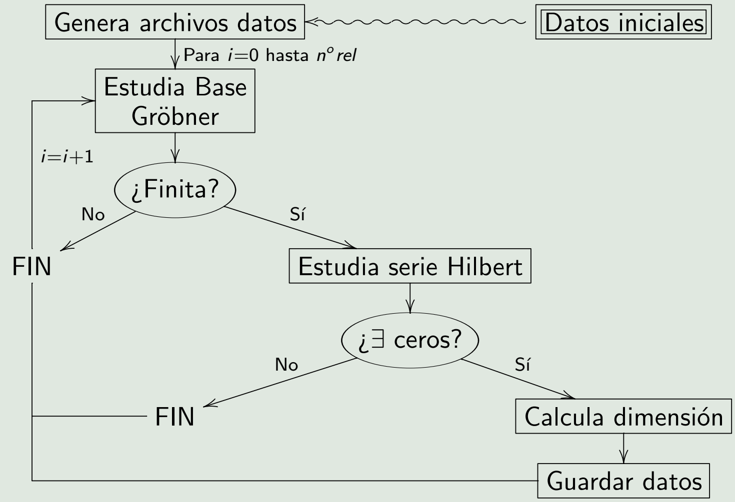
Dividiremos nuestro estudio atendiendo a los siguientes estados:

- número de variables
- longitud de las monomios $\Leftarrow$ Datos iniciales
- número de relaciones

Una vez fijada cada una de estas variables, el número de álgebras a estudiar es finito

Familias de ejemplos

Flujo del programa



Caso (2v, 2l, 2r) $\Leftarrow$ Casos base

Hay 45 casos de los cuales 6 generan cocientes finitos. La dimensión máxima se alcanza en 4 de ellos, que son

- $\mathcal{I} = \langle xx, xy - yy \rangle$
- $\mathcal{I} = \langle xx, yx - yy \rangle$
- $\mathcal{I} = \langle yy, xx - xy \rangle$
- $\mathcal{I} = \langle yy, xx - yx \rangle$

La dimensión máxima de las respectivas álgebras cocientes es 6 y la base de Gröbner alcanza grado alcanza términos de grado 3.

Caso (2v, 2l, 2r) $\Leftarrow$ Casos base

Hay 45 casos de los cuales 6 generan cocientes finitos. La dimensión máxima se alcanza en 4 de ellos, que son

- $\mathcal{I} = \langle xx, xy - yy \rangle$
- $\mathcal{I} = \langle xx, yx - yy \rangle$
- $\mathcal{I} = \langle yy, xx - xy \rangle$
- $\mathcal{I} = \langle yy, xx - yx \rangle$

La dimensión máxima de las respectivas álgebras cocientes es 6 y la base de Gröbner alcanza grado alcanza términos de grado 3.

Caso (2v, 2l, 3r)

Hay 120 casos de los cuales 62 son cofinitos. Todos son de dimensión máxima. En estos casos la dimensión es 4.

Caso (2v, 3l, 3r)

Hay 7140 casos de los cuales 300 son finitos. La dimensión finita máxima se alcanza en 4 casos:

- $\mathcal{I} = \langle xxx, xyx - xyy, yxy - yyy \rangle$
- $\mathcal{I} = \langle xxx, xyx - yyx, yxy - yyy \rangle$
- $\mathcal{I} = \langle yyy, xxx - xyx, xxy - yxy \rangle$
- $\mathcal{I} = \langle yyy, xxx - xyx, yxx - yxy \rangle$

La dimensión de las álgebras cocientes es 36 y la base de Gröbner alcanza grado 7 (en el último caso).

Caso (2v, 3l, 4r)

En este caso hay 58905 casos de los cuales 10142 son cofinitos. La dimensión finita máxima se alcanza en 4 casos, que son;

- $\mathcal{I} = \langle xxx, xyx, xxx - xyx, xyy - yyy \rangle$
- $\mathcal{I} = \langle xxx, xyx, xxx - xyx, yyx - yyy \rangle$
- $\mathcal{I} = \langle yxy, yyy, xxx - xxy, yxy - yyy \rangle$
- $\mathcal{I} = \langle yxy, yyy, xxx - yxx, yxy - yyy \rangle$

La dimensión finita máxima es 25.

Caso (2v, 3l, 4r)

En este caso hay 58905 casos de los cuales 10142 son cofinitos. La dimensión finita máxima se alcanza en 4 casos, que son;

- $\mathcal{I} = \langle xxx, xyx, xxx - xyx, xyy - yyy \rangle$
- $\mathcal{I} = \langle xxx, xyx, xxx - xyx, yyx - yyy \rangle$
- $\mathcal{I} = \langle yxy, yyy, xxx - xxy, yxy - yyy \rangle$
- $\mathcal{I} = \langle yxy, yyy, xxx - yxx, yxy - yyy \rangle$

La dimensión finita máxima es 25.

Caso (2v, 3l, 5r)

Hay 376992 casos de los cuales 123780 son cofinitos. La dimensión máxima se alcanza en 60 casos. Esta dimensión es 21.

Resultados teóricos

Primeras conclusiones

Notemos que como mínimo en la base de Gröbner tiene que haber tres elementos:

- uno que controle las potencias de x,
- otro para las potencias de y,
- y por lo menos otro que controle los productos mixtos de x e y.

Resultados teóricos

Primeras conclusiones

Notemos que como mínimo en la base de Gröbner tiene que haber tres elementos:

- uno que controle las potencias de x,
- otro para las potencias de y,
- y por lo menos otro que controle los productos mixtos de x e y.

Observación

Los ideales que generan las álgebras de dimensión máxima aparecen en grupos de cuatro

- una "original"
- su imagen a través del isomorfismo que cambia x por y
- las dos opuestas para el producto de cada una de éstas

Es importante notar que todos los ideales que generan álgebras máximas de cada clase están contenidos en alguno de los ideales del caso base (2v,2l,2r)

Podemos organizar el siguiente esquema

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{J} \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] & k\langle x, y\rangle \arrow[r] \arrow[d, equal] & k\langle x, y\rangle/\mathcal{J} \\
\mathcal{I} \arrow[r, hook] & k\langle x, y\rangle \arrow[r] & k\langle x, y\rangle/\mathcal{I}
\end{tikzcd}$$

donde $\mathcal{I}$ es uno de los ideales del caso base y $\mathcal{J}$ es el ideal que queremos estudiar.

Podemos organizar el siguiente esquema

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{J} \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] & k\langle x, y\rangle \arrow[r] \arrow[d, equal] & k\langle x, y\rangle/\mathcal{J} \\
\mathcal{I} \arrow[r, hook] & k\langle x, y\rangle \arrow[r] & k\langle x, y\rangle/\mathcal{I}
\end{tikzcd}
$$

donde $\mathcal{I}$ es uno de los ideales del caso base y $\mathcal{J}$ es el ideal que queremos estudiar.

Podemos deducir entonces

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{I}/\mathcal{J} \arrow[r, hook] & k\langle x, y\rangle/\mathcal{J} \arrow[r] & k\langle x, y\rangle/\mathcal{I} \cong \frac{k\langle x,y\rangle/\mathcal{J}}{\mathcal{I}/\mathcal{J}}
\end{tikzcd}
$$

finita $\Longleftrightarrow$ finita $\qquad$ 3^{er} TISO

Tenemos las siguientes relaciones:

- $k\langle x, y\rangle/\mathcal{I}$ es finita (lo tenemos demostrado del primer caso)
- $k\langle x, y\rangle/\mathcal{J}$ finita $\Leftrightarrow \mathcal{I}/\mathcal{J}$ es finita.

Esto nos da un nuevo criterio de finitud. El álgebra cociente asociada al ideal $\mathcal{J}$ será finita si el anillo $\mathcal{I}/\mathcal{J}$ es finito.

Tenemos las siguientes relaciones:

- $k\langle x, y\rangle/\mathcal{I}$ es finita (lo tenemos demostrado del primer caso)
- $k\langle x, y\rangle/\mathcal{J}$ finita $\Leftrightarrow$ $\mathcal{I}/\mathcal{J}$ es finita.

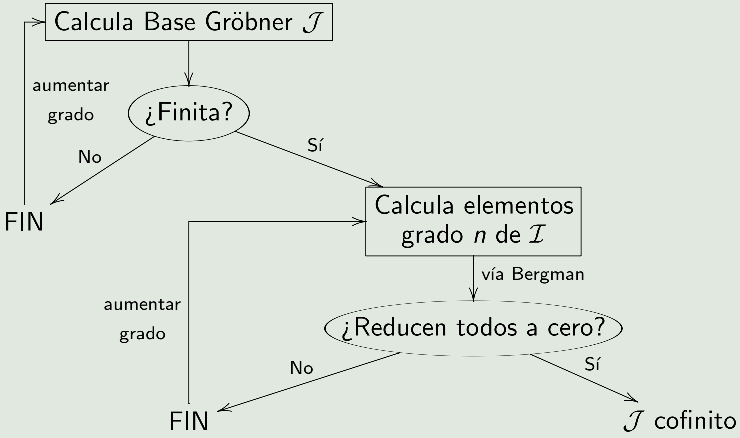
Esto nos da un nuevo criterio de finitud. El álgebra cociente asociada al ideal $\mathcal{J}$ será finita si el anillo $\mathcal{I}/\mathcal{J}$ es finito.

Una forma de hacer esto usando el Bergman podría ser la siguiente:

- calculamos G base de Gröbner de $\mathcal{J}$
- calculamos elementos grado n de $\mathcal{I}$
- reducimos estos elementos en G y comprobamos si son cero

Resultados teóricos

Flujo programa anterior



Sea $\mathcal{I} = \langle xx, xy - yy \rangle$ y $\mathcal{J} = \langle xxx, xyx - yyx, yxy - yyy \rangle$. Los elementos de grado 5 son

$$\begin{array}{cccc}
\text{xxxxy-xxxyy} & \text{xxyxy-xxyyy} & & \text{yyyxy-yyyyy} \\
\text{xxxyx-xxyyx} & \text{xxxyy-xxyyy} & & \text{yyxyy-yyyyy} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\text{xyxxx-yyxxx} & \text{xyxxy-yyxxy} & & \text{xyyyy-yyyyy}
\end{array}$$

Sea $\mathcal{I} = \langle xx, xy - yy \rangle$ y $\mathcal{J} = \langle xxx, xyx - yyx, yxy - yyy \rangle$. Los elementos de grado 5 son

$$
\begin{array}{cccc}
\text{xxxxy-xxxyy} & \text{xxyxy-xxyyy} & & \text{yyyxy-yyyyy} \\
\text{xxxyx-xxyyx} & \text{xxxyy-xxyyy} & & \text{yyxyy-yyyyy} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\text{xyxxx-yyxxx} & \text{xyxxy-yyxxy} & & \text{xyyyy-yyyyy}
\end{array}
$$

Condición:

$$
\{\text{Conjunto de elementos grado } n \text{ de } \mathcal{I}\} \xrightarrow{G(\mathcal{J})} 0
$$

En grado 8 todos reducen a cero $\Rightarrow \mathcal{J}$ cofinito

Dificultades en los cálculos

Sin embargo no todo funciona tan bien. En la familia (2v, 4l, t3)

- existen 410040 casos
- en 40 días sólo ha podido analizar 230000 de ellos
- ninguno finito
- en obtener la serie de Hilbert de algunas álgebras ha empleado más de 20 horas

Dificultades en los cálculos

Sin embargo no todo funciona tan bien. En la familia (2v, 4l, t3)

- existen 410040 casos
- en 40 días sólo ha podido analizar 230000 de ellos
- ninguno finito
- en obtener la serie de Hilbert de algunas álgebras ha empleado más de 20 horas

Tenemos dos objetivos al respecto

- detectar los grupos de álgebras isomorfas para rebajar el número de casos a estudiar
- estudiar los casos que retrasan los cálculos y encontrar la razón por la cual tarda tanto

Procesos en curso

Estamos en estos momentos estudiando la familia (2v, l4, t4)

- son más de 13000000 de casos
- vamos por 1400000 casos analizados
- existen 8446 casos finitos
- la dimensión máxima por ahora es 324, y se alcanza en dos álgebras
- tarda unas 20 horas en estudiar 100000 casos

Procesos en curso

Estamos en estos momentos estudiando la familia (2v, l4, t4)

- son más de 13000000 de casos
- vamos por 1400000 casos analizados
- existen 8446 casos finitos
- la dimensión máxima por ahora es 324, y se alcanza en dos álgebras
- tarda unas 20 horas en estudiar 100000 casos

Estudio de grafos de Ufnarovskii generalizados para los casos de bases de Gröbner no finitas.

Referencias

Clasificación de Ideales Cofinitos Homogéneos

Óscar Cortadellas

G. Bergman
The diamond lemma for ring theory, Adv. Math. 29, 178-218, 1978.

E. Green, T. Mora, V. A. Ufnarovskii
The non-commutative Gröbner freaks, Symbolic Rewriting Techniques, Birkhäuser, 93-104, 1998.

R. Fröberg
An introduction to Gröbner bases, John Wiley and Sons Ltd, Chichester, 1997.

G. R. Krause, T. H. Lenagan
Growth of algebras and Gelfand-Kirillov dimension, Graduate Studies in Mathematics, volume 22, 2000.

J. Mansson and P. Nordbeck
A generalized Ufnarovski graph, AAECC 16: 293-306, 2005.

F. Mora
Gröbner bases for non-commutative rings, AAECC3, 229, 1986.

T. Mora
An introduction to commutative and non-commutative Groebner bases, Theor. Comp. Sci. 134, 131-173, 1994.

Referencias

P. Nordbeck
On some basic applications of Gröbner bases in non-commutative polynomial rings, Cambridge University Press. pp. 463-472, 1998.

F. L. Pritchard
The ideal membership problem in non-commutative polynomial rings, J. Simbolic Computation, Vol. 22, 27-48, 1996.

V. A. Ufnarovskii
Poincaré series of graded algebras, Matematicheski Zametki, Vol 27, No 1, 21-32, 1980.

V. A. Ufnarovskii
A growth criterion for graphs and algebras defined by words, Matematicheski Zametki, Vol. 31, no 3, 465-472, 1982.

V. A. Ufnarovskii
On the use of graphs for computing a basis, growth and Hilbert series of associative algebras, Math. USSR Sbornik Vol. 68, No 2, 1991.

V. A. Ufnarovskii
On the cancellation rule in the homogenization, Computer Science Journal of Moldova, Vol. 16, No 1, 2008.

- Programa Bergman
  `http://servus.math.su.se/bergman/`

Inicio