Métodos Computacionales y Álgebras de Dimensión Finita

- estructuras de factorización
- ideales cofinitos homogéneos

Óscar Cortadellas Izquierdo

Universidad de Granada
Departamento de Álgebra

Tesis doctoral dirigida por

Directores

Pascual Jara Martínez
Francisco Javier Lobillo Borrero

Motivación

Problemas que hemos tratado

Motivación

Problemas que hemos tratado

- clasificación de álgebras

Motivación

Problemas que hemos tratado

- clasificación de álgebras
- dimensión finita

Motivación

Problemas que hemos tratado

- clasificación de álgebras
- dimensión finita
- técnicas algebraicas

Motivación

Problemas que hemos tratado

- clasificación de álgebras
- dimensión finita
- técnicas algebraicas

- teoremas de estructuras
- teoremas de isomorfía
- rutinas por ordenador

Motivación

Problemas que hemos tratado

- clasificación de álgebras
- dimensión finita
- técnicas algebraicas

- teoremas de estructuras
- teoremas de isomorfía
- rutinas por ordenador

Estructuras de factorización
Dimensión 4

Motivación

Problemas que hemos tratado

- clasificación de álgebras
- dimensión finita
- técnicas algebraicas
- teoremas de estructuras
- teoremas de isomorfía
- rutinas por ordenador

vía ordenador

Estructuras de factorización
Dimensión 4

Ideales cofinitos
Homogéneos

familias (a, b, c)

Preliminares

Situando el problema

Estructura de Factorización

$\mathcal{X}$ y dos álgebras $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$

- $i_{\mathcal{A}} \hookrightarrow \mathcal{X}$ e $i_B \hookrightarrow \mathcal{X}$ son inyectivas
- $\varphi(a \otimes b) = i_{\mathcal{A}}(a) \cdot i_{\mathcal{B}}(b)$ es un isomorfismo lineal $(\mathcal{A} \otimes B) \equiv \mathcal{X}$

Preliminares

Situando el problema

Estructura de Factorización

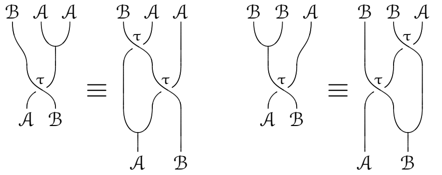
$\mathcal{X}$ y dos álgebras $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$

- $i_{\mathcal{A}} \hookrightarrow \mathcal{X}$ e $i_B \hookrightarrow \mathcal{X}$ son inyectivas
- $\varphi(a \otimes b) = i_{\mathcal{A}}(a) \cdot i_{\mathcal{B}}(b)$ es un isomorfismo lineal $(\mathcal{A} \otimes B) \equiv \mathcal{X}$

Entrelazamientos

$\tau : \mathcal{B} \otimes \mathcal{A} \to \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$

- unitaria
- asociativa
- condiciones de trenzado



Preliminares

Situando el problema

Estructura de Factorización

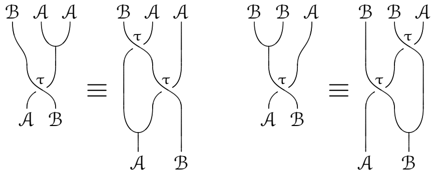
$\mathcal{X}$ y dos álgebras $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$

- $i_{\mathcal{A}} \hookrightarrow \mathcal{X}$ e $i_B \hookrightarrow \mathcal{X}$ son inyectivas
- $\varphi(a \otimes b) = i_{\mathcal{A}}(a) \cdot i_{\mathcal{B}}(b)$ es un isomorfismo lineal $(\mathcal{A} \otimes B) \equiv \mathcal{X}$

Entrelazamientos

$\tau : \mathcal{B} \otimes \mathcal{A} \to \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$

- unitaria
- asociativa
- condiciones de trenzado



Producto tensor torcido

$(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}, \mu_\tau) \cong \mathcal{A} \otimes_\tau \mathcal{B}$

Preliminares

Situando el problema

Estructura de Factorización

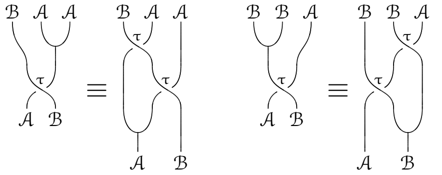
$\mathcal{X}$ y dos álgebras $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$

- $i_{\mathcal{A}} \hookrightarrow \mathcal{X}$ e $i_B \hookrightarrow \mathcal{X}$ son inyectivas
- $\varphi(a \otimes b) = i_{\mathcal{A}}(a) \cdot i_{\mathcal{B}}(b)$ es un isomorfismo lineal $(\mathcal{A} \otimes B) \equiv \mathcal{X}$

Entrelazamientos

$\tau : \mathcal{B} \otimes \mathcal{A} \to \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$

- unitaria
- asociativa
- condiciones de trenzado



correspondencia 1-1

Tambara, Majid, Cap-Schichl-Vanžura, ...

Producto tensor torcido

$(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}, \mu_\tau) \cong \mathcal{A} \otimes_\tau \mathcal{B}$

Preliminares

Caracterización entrelazamientos

- estructura no trivial $\Rightarrow$ factores de dimensión 2

Preliminares

Caracterización entrelazamientos

- estructura no trivial $\Rightarrow$ factores de dimensión 2
- $dim_k(\mathcal{B}) = 2 \Rightarrow \mathcal{B} = k[x]/\langle p(x)\rangle$, con $p(x) = x^2 - \alpha x + \beta$

Preliminares

Caracterización entrelazamientos

- estructura no trivial $\Rightarrow$ factores de dimensión 2
- $dim_k(\mathcal{B}) = 2 \Rightarrow \mathcal{B} = k[x]/\langle p(x) \rangle$, con $p(x) = x^2 - \alpha x + \beta$
- $\mathcal{A} \otimes_\tau \mathcal{B}, dim(\mathcal{B}) = 2 \Rightarrow$ Duplicado cuántico de $\mathcal{A}$

Preliminares

Caracterización entrelazamientos

- estructura no trivial $\Rightarrow$ factores de dimensión 2
- $dim_k(\mathcal{B}) = 2 \Rightarrow \mathcal{B} = k[x]/\langle p(x)\rangle$, con $p(x) = x^2 - \alpha x + \beta$
- $\mathcal{A} \otimes_\tau \mathcal{B}, dim(\mathcal{B}) = 2 \Rightarrow$ Duplicado cuántico de $\mathcal{A}$

Correspondencia entrelazamiento-pares (f, δ)

$$
\begin{tikzcd}
\boxed{\tau : k[x]/\langle p(x)\rangle \otimes \mathcal{A} \to \mathcal{A} \otimes k[x]/\langle p(x)\rangle} \arrow[r, bend left] & \boxed{(f, \delta)} \arrow[l, bend left]
\end{tikzcd}
$$

Caracterización entrelazamientos

- estructura no trivial $\Rightarrow$ factores de dimensión 2
- $dim_k(\mathcal{B}) = 2 \Rightarrow \mathcal{B} = k[x]/\langle p(x)\rangle$, con $p(x) = x^2 - \alpha x + \beta$
- $\mathcal{A} \otimes_\tau \mathcal{B}, dim(\mathcal{B}) = 2 \Rightarrow$ Duplicado cuántico de $\mathcal{A}$

Correspondencia entrelazamiento-pares (f, δ)

$$\begin{tikzcd} \boxed{\tau : k[x]/\langle p(x)\rangle \otimes \mathcal{A} \to \mathcal{A} \otimes k[x]/\langle p(x)\rangle} \arrow[r, bend left] & \boxed{(f, \delta)} \arrow[l, bend left] \end{tikzcd}$$

$f \in End_k(\mathcal{A})$
$\delta \in Der_k({}^f\mathcal{A})_{\to \delta(a \cdot b) = \delta(a) \cdot b + f(a) \cdot \delta(b)}$

$$\begin{cases} \delta^2 - \alpha\delta + \beta = \beta f^2 \\ f\delta + \delta f = \alpha(f - f^2) \end{cases}$$

Duplicados cuánticos álgebras finitas

Teorema (CLPN10)

Cualquier duplicado cuántico de k^n, dado por $k^n \otimes_{(f,\delta)} k[x]/\langle p(x)\rangle$, es isomorfo a una de las siguientes álgebras

Preliminares

Duplicados cuánticos álgebras finitas

Teorema (CLPN10)

Cualquier duplicado cuántico de k^n, dado por $k^n \otimes_{(f,\delta)} k[x]/\langle p(x)\rangle$, es isomorfo a una de las siguientes álgebras

- *$p(x)$ es un polinomio irreducible*

$$(M_2(k))^t \times (k[x]/\langle p(x)\rangle)^r$$

t número de 2-ciclos y r el número de 1-ciclos estrictos en Q_f

Preliminares

Duplicados cuánticos álgebras finitas

Teorema (CLPN10)

Cualquier duplicado cuántico de k^n, dado por $k^n \otimes_{(f,\delta)} k[x]/\langle p(x) \rangle$, es isomorfo a una de las siguientes álgebras

- *$p(x)$ es un polinomio irreducible*

$$(M_2(k))^t \times (k[x]/\langle p(x) \rangle)^r$$

t número de 2-ciclos y r el número de 1-ciclos estrictos en Q_f

- *$p(x)$ es un polinomio reducible*

$$(M_2(k))^t \times kQ_{<2}$$

t número natural y Q un grafo adeducado

Presentación problema

Objetivo

Obtener clasificación, salvo isomorfismo, de las álgebras de dimensión 4 que se factorizan como producto de dos factores no triviales

Presentación problema

Objetivo

Obtener clasificación, salvo isomorfismo, de las álgebras de dimensión 4 que se factorizan como producto de dos factores no triviales

IMPORTANCIA CUERPO BASE

Presentación problema

Objetivo

Obtener clasificación, salvo isomorfismo, de las álgebras de dimensión 4 que se factorizan como producto de dos factores no triviales

IMPORTANCIA CUERPO BASE

k algebraicamente cerrado

- Factores: k^2 y $k[\xi]$
- Estructuras de factorización
  - $k^2 \otimes_\tau k^2$
  - $k[\xi] \otimes_\tau k^2$
  - $k[\xi] \otimes_\tau k[\zeta]$

Objetivo

Obtener clasificación, salvo isomorfismo, de las álgebras de dimensión 4 que se factorizan como producto de dos factores no triviales

IMPORTANCIA CUERPO BASE

k algebraicamente cerrado

- Factores: k^2 y $k[\xi]$
- Estructuras de factorización
  - $k^2 \otimes_\tau k^2$
  - $k[\xi] \otimes_\tau k^2$
  - $k[\xi] \otimes_\tau k[\zeta]$

k extensiones propias

- Factores: l, extensión de Galois de grado 2
- Estructuras de factorización
  - $k^2 \otimes_\tau l$
  - $k[\xi] \otimes_\tau l$
  - $l \otimes_\tau l'$

Presentación problema

Objetivo

Obtener clasificación, salvo isomorfismo, de las álgebras de dimensión 4 que se factorizan como producto de dos factores no triviales

IMPORTANCIA CUERPO BASE

k algebraicamente cerrado

- Factores: k^2 y $k[\xi]$
- Estructuras de factorización
  - $k^2 \otimes_\tau k^2 \Leftarrow$ Teorema
  - $k[\xi] \otimes_\tau k^2 \Leftarrow$ Teorema
  - $k[\xi] \otimes_\tau k[\zeta]$

k extensiones propias

- Factores: l, extensión de Galois de grado 2
- Estructuras de factorización
  - $k^2 \otimes_\tau l \Leftarrow$ Teorema
  - $k[\xi] \otimes_\tau l$
  - $l \otimes_\tau l'$

k algebraicamente cerrado

$k^2 \otimes_\tau k^2$: Entrelazamientos

Endomorfismos (Correspondencia con aplicaciones de conjunto)

φ_1	φ_2	φ_3	φ_4
$1 \mapsto 1$ $2 \mapsto 2$	$1 \mapsto 1$ $2 \mapsto 1$	$1 \mapsto 2$ $2 \mapsto 2$	$1 \mapsto 2$ $2 \mapsto 1$

k algebraicamente cerrado

$k^2 \otimes_\tau k^2$: Entrelazamientos

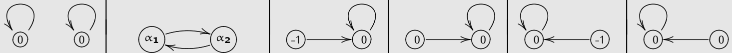
Endomorfismos (Correspondencia con aplicaciones de conjunto)

φ_1	φ_2	φ_3	φ_4
$1 \mapsto 1$ $2 \mapsto 2$	$1 \mapsto 1$ $2 \mapsto 1$	$1 \mapsto 2$ $2 \mapsto 2$	$1 \mapsto 2$ $2 \mapsto 1$

Condiciones derivadas de k^2

Derivaciones (Correspondencia con coloraciones)

1	2	3	4	5	6

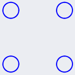


$\alpha_1 + \alpha_2 = -1$

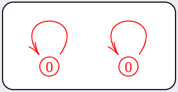
k algebraicamente cerrado

$k^2 \otimes_\tau k^2$: Productos tensores torcidos

- $\boxed{1} \Rightarrow k^2 \otimes_k k^2 \cong k^4$ álgebra conmutativa

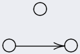


Grafo correspondiente



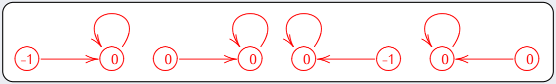
k algebraicamente cerrado

$k^2 \otimes_\tau k^2$: Productos tensores torcidos

- $\boxed{1} \Rightarrow k^2 \otimes_k k^2 \cong k^4$ álgebra conmutativa
- $\boxed{3\text{-}6} \Rightarrow k\widetilde{Q}$, donde $\widetilde{Q} =$ 

$$\langle x, y \mid x^2 = y^2 = -1, yx = -x - y - 1 \rangle$$

Grafos correspondientes



k algebraicamente cerrado

$k^2 \otimes_\tau k^2$: Productos tensores torcidos

- $\boxed{1} \Rightarrow k^2 \otimes_k k^2 \cong k^4$ álgebra conmutativa
- $\boxed{3\text{-}6} \Rightarrow k\widetilde{Q}$, donde $\widetilde{Q} =$ $\begin{array}{c} \circ \\ \circ \longrightarrow \circ \end{array}$
- $\boxed{2}$ se corresponde con $\mathcal{A}_q = \langle x, y \mid x^2 = y^2 = 1, xy + yx = q \rangle$

Grafo correspondiente

$$\begin{tikzcd} \alpha_1 \arrow[r, bend left] & \alpha_2 \arrow[l, bend left] \end{tikzcd}$$

$\alpha_1 + \alpha_2 = -1$

k algebraicamente cerrado

$k^2 \otimes_\tau k^2$: Productos tensores torcidos

- $\boxed{1} \Rightarrow k^2 \otimes_k k^2 \cong k^4$ álgebra conmutativa
- $\boxed{3\text{-}6} \Rightarrow k\widetilde{Q}$, donde $\widetilde{Q} =$

$$\begin{tikzcd} & \circ & \\ \circ \arrow[rr] & & \circ \end{tikzcd}$$

Grafo correspondiente

$$\begin{tikzcd} \alpha_1 \arrow[r, bend left] & \alpha_2 \arrow[l, bend left] \end{tikzcd}$$

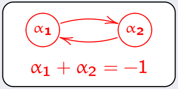
$$\alpha_1 + \alpha_2 = -1$$

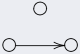
- $\boxed{2}$ se corresponde con $\mathcal{A}_q = \langle x, y \mid x^2 = y^2 = 1, xy + yx = q \rangle$
  - $q \neq \pm 2 \Rightarrow M_2(k)$

$$a \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad b \mapsto \begin{pmatrix} \frac{q}{2} & \frac{2-q}{4} \\ \frac{2+q}{4} & -\frac{q}{2} \end{pmatrix}$$

$k^2 \otimes_\tau k^2$: Productos tensores torcidos

Grafo correspondiente



- $\boxed{1} \Rightarrow k^2 \otimes_k k^2 \cong k^4$ álgebra conmutativa
- $\boxed{3\text{-}6} \Rightarrow k\widetilde{Q}$, donde $\widetilde{Q} =$ 
- $\boxed{2}$ se corresponde con $\mathcal{A}_q = \langle x, y \mid x^2 = y^2 = 1, xy + yx = q \rangle$
  - $q \neq \pm 2 \Rightarrow M_2(k)$
  - $q = \pm 2 \Rightarrow kQ/(Q_{\geq 2})$, donde $Q =$ 
    $Q_{\geq 2}$ caminos de longitud mayor que uno

$k\langle u, v, R, S \rangle \rightsquigarrow$

	u	v	R	S
u	u	0	0	S
v	0	v	R	0
R	R	0	0	0
S	0	S	0	0

$k^2 \otimes_\tau k[\xi]$: Entrelazamientos

$$k[\xi] \equiv k[x]/\langle x^2 \rangle$$

k algebraicamente cerrado

$k^2 \otimes_\tau k[\xi]$: Entrelazamientos

$$k[\xi] \equiv k[x]/\langle x^2 \rangle$$

Endomorfismos $\Rightarrow$ los mismos que el caso anterior

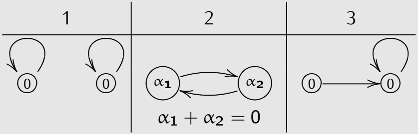
k algebraicamente cerrado

$k^2 \otimes_\tau k[\xi]$: Entrelazamientos

$$k[\xi] \equiv k[x]/\langle x^2 \rangle$$

Endomorfismos $\Rightarrow$ los mismos que el caso anterior

Derivaciones (cambios por la naturaleza de de $k[\xi]$)

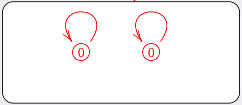


k algebraicamente cerrado

$k^2 \otimes_\tau k[\xi]$: Productos tensores torcidos

- $\boxed{1} \Rightarrow k[\xi] \times k[\xi]$ álgebra conmutativa

Grafo correspondiente



k algebraicamente cerrado

$k^2 \otimes_\tau k[\xi]$: Productos tensores torcidos

- $\boxed{1} \Rightarrow k[\xi] \times k[\xi]$ álgebra conmutativa
- $\boxed{2}$ depende de la coloración $\alpha_1 = -\alpha_2$

Grafo correspondiente

, $\alpha_1 + \alpha_2 = 0$

k algebraicamente cerrado

$k^2 \otimes_\tau k[\xi]$: Productos tensores torcidos

- $\boxed{1} \Rightarrow k[\xi] \times k[\xi]$ álgebra conmutativa
- $\boxed{2}$ depende de la coloración $\alpha_1 = -\alpha_2$
    - $\alpha_1 \neq 0 \Rightarrow M_2(k)$

Grafo correspondiente

$$\begin{tikzcd} \alpha_1 \arrow[r, bend left] & \alpha_2 \arrow[l, bend left] \end{tikzcd}, \quad \alpha_1 + \alpha_2 = 0$$

$\Phi : k^2 \otimes k[\xi] \longrightarrow \mathrm{M}_2(k)$ dada por

$$e_1 \otimes 1 \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 \otimes 1 \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$e_1 \otimes \xi \mapsto \begin{pmatrix} -\alpha_1 & -\alpha_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 \otimes \xi \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \alpha_1 & \alpha_1 \end{pmatrix}$$

k algebraicamente cerrado

$k^2 \otimes_\tau k[\xi]$: Productos tensores torcidos

- $\boxed{1} \Rightarrow k[\xi] \times k[\xi]$ álgebra conmutativa
- $\boxed{2}$ depende de la coloración $\alpha_1 = -\alpha_2$
  - $\alpha_1 \neq 0 \Rightarrow M_2(k)$
  - $\alpha_1 = 0 \Rightarrow kQ/(Q_{\geq 2})$ el álgebra de caminos del 2-ciclo
    $Q = \begin{tikzcd} \circ \arrow[r, bend left] & \circ \arrow[l, bend left] \end{tikzcd}$

Grafo correspondiente

$$\begin{tikzcd} \alpha_1 \arrow[r, bend left] & \alpha_2 \arrow[l, bend left] \end{tikzcd}, \quad \alpha_1 + \alpha_2 = 0$$

álgebra que tiene por tabla

	u	v	R	S
u	u	0	0	S
v	0	v	R	0
R	R	0	0	0
S	0	S	0	0

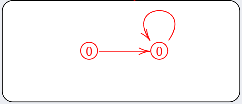
k algebraicamente cerrado

$k^2 \otimes_\tau k[\xi]$: Productos tensores torcidos

- $\boxed{1} \Rightarrow k[\xi] \times k[\xi]$ álgebra conmutativa
- $\boxed{2}$ depende de la coloración $\alpha_1 = -\alpha_2$
  - $\alpha_1 \neq 0 \Rightarrow M_2(k)$
  - $\alpha_1 = 0 \Rightarrow kQ/(Q_{\geq 2})$ el álgebra de caminos del 2-ciclo

    $Q = \begin{tikzcd} \circ \arrow[r, bend left] & \circ \arrow[l, bend left] \end{tikzcd}$
- $\boxed{3} \Rightarrow kQ'/(Q'_{\geq 2})$ álgebra de caminos de $Q' = \begin{tikzcd} \circ \arrow[r] & \circ \arrow[loop above] \end{tikzcd}$

Grafo correspondiente



álgebra que tiene por tabla

	u	v	R	S
u	u	0	R	0
v	0	v	0	S
R	0	R	0	0
S	0	S	0	0

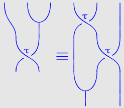
k algebraicamente cerrado

$k[\xi] \otimes_\tau k[\eta]$: Entrelazamientos

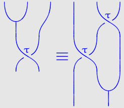
$$\tau(\eta \otimes \xi) = a1 \otimes 1 + b1 \otimes \xi + c\eta \otimes 1 + d\xi \otimes \eta$$

$k[\xi] \otimes_\tau k[\eta]$: Entrelazamientos

$$\tau(\eta \otimes \xi) = a1 \otimes 1 + b1 \otimes \xi + c\eta \otimes 1 + d\xi \otimes \eta$$



$$\left\{ \begin{aligned} (\eta\xi)\xi &= (a + b\xi + c\eta + d\xi\eta)\xi \\ &= a\xi + c(a + b\xi + c\eta + d\xi\eta) + d\xi(a + b\xi + c\eta + d\xi\eta) \\ &= ac + (a + bc + ad)\xi + c^2\eta + 2cd\xi\eta \quad = \quad 0 \end{aligned} \right.$$



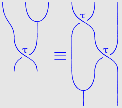
$$\left\{ \begin{aligned} \eta(\eta\xi) &= \eta(a + b\xi + c\eta + d\xi\eta) \\ &= a\eta + b(a + b\xi + c\eta + d\xi\eta) + d(a + b\xi + c\eta + d\xi\eta)\eta \\ &= ab + b^2\xi + (a + bc + ad)\eta + 2bd\xi\eta \quad = \quad 0 \end{aligned} \right.$$

k algebraicamente cerrado

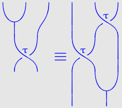
$k[\xi] \otimes_\tau k[\eta]$: Entrelazamientos

$$\tau(\eta \otimes \xi) = a1 \otimes 1 + b1 \otimes \xi + c\eta \otimes 1 + d\xi \otimes \eta$$

- $\tau_1(\eta \otimes \xi) = d \cdot \xi \otimes \eta$
- $\tau_2(\eta \otimes \xi) = a \cdot 1 \otimes 1 - \xi \otimes \eta$



$$\begin{cases} (\eta\xi)\xi & = (a + b\xi + c\eta + d\xi\eta)\xi \\ & = a\xi + c(a + b\xi + c\eta + d\xi\eta) + d\xi(a + b\xi + c\eta + d\xi\eta) \\ & = ac + (a + bc + ad)\xi + c^2\eta + 2cd\xi\eta \quad = \quad 0 \end{cases}$$



$$\begin{cases} \eta(\eta\xi) & = \eta(a + b\xi + c\eta + d\xi\eta) \\ & = a\eta + b(a + b\xi + c\eta + d\xi\eta) + d(a + b\xi + c\eta + d\xi\eta)\eta \\ & = ab + b^2\xi + (a + bc + ad)\eta + 2bd\xi\eta \quad = \quad 0 \end{cases}$$

k algebraicamente cerrado

$k[\xi] \otimes_\tau k[\eta]$: Entrelazamientos

$$\tau(\eta \otimes \xi) = a1 \otimes 1 + b1 \otimes \xi + c\eta \otimes 1 + d\xi \otimes \eta$$

- $\tau_1(\eta \otimes \xi) = d \cdot \xi \otimes \eta$
- $\tau_2(\eta \otimes \xi) = a \cdot 1 \otimes 1 - \xi \otimes \eta$

$\tau_1 \rightsquigarrow A_q = \langle x, y | x^2 = y^2 = 0, yx = qxy \rangle \rightsquigarrow$ Planos cuánticos

k algebraicamente cerrado

$k[\xi] \otimes_\tau k[\eta]$: Entrelazamientos

$$\tau(\eta \otimes \xi) = a1 \otimes 1 + b1 \otimes \xi + c\eta \otimes 1 + d\xi \otimes \eta$$

- $\tau_1(\eta \otimes \xi) = d \cdot \xi \otimes \eta$
- $\tau_2(\eta \otimes \xi) = a \cdot 1 \otimes 1 - \xi \otimes \eta$

$\tau_1 \rightsquigarrow A_q = \langle x, y | x^2 = y^2 = 0, yx = qxy \rangle \rightsquigarrow$ Planos cuánticos
$\tau_2 \rightsquigarrow X_t = \langle x, y | x^2 = y^2 = 0, yx + xy = t \rangle \rightsquigarrow$ Matrices

$$1 \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \xi \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \eta \mapsto \begin{pmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

k extensiones propias

$k^2 \otimes_\tau l$: Entrelazamientos

Endomorfismos (Correspondencia con aplicaciones de conjunto)

φ_1	φ_2	φ_3	φ_4
$1 \mapsto 1$ $2 \mapsto 2$	$1 \mapsto 1$ $2 \mapsto 1$	$1 \mapsto 2$ $2 \mapsto 2$	$1 \mapsto 2$ $2 \mapsto 1$

$k^2 \otimes_\tau I$: Entrelazamientos

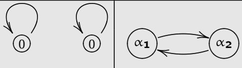
Endomorfismos (Correspondencia con aplicaciones de conjunto)

φ_1	φ_2	φ_3	φ_4
$1 \mapsto 1$ $2 \mapsto 2$	$1 \mapsto 1$ $2 \mapsto 1$	$1 \mapsto 2$ $2 \mapsto 2$	$1 \mapsto 2$ $2 \mapsto 1$

Condiciones derivadas de I

Derivaciones (Coloraciones con sus propiedades)

1	2



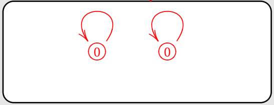
$\alpha_1 + \alpha_2 = -\alpha$

k extensiones propias

$k^2 \otimes_\tau I$: Productos tensores torcidos

- $\boxed{1} \Rightarrow k^2 \otimes I \cong I \times I$

Grafo correspondiente



k extensiones propias

$k^2 \otimes_\tau l$: Productos tensores torcidos

Grafo correspondiente

$$\alpha_1 \rightleftarrows \alpha_2, \quad \alpha_1 + \alpha_2 = -\alpha$$

- $\boxed{1} \Rightarrow k^2 \otimes l \cong l \times l$
- $\boxed{2} \Rightarrow M_2(k)$ vía el ismorfismo

$$1 \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad e \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\eta \mapsto \begin{pmatrix} \alpha + t & 1 \\ -t^2 - \alpha t - \beta & -t \end{pmatrix}$$ y $e \cdot \eta$ al producto correspondiente

k extensiones propias

$k^2 \otimes_\tau l$: Productos tensores torcidos

- $\boxed{1} \Rightarrow k^2 \otimes l \cong l \times l$
- $\boxed{2} \Rightarrow M_2(k)$ vía el ismorfismo

Grafo correspondiente

$\alpha_1 \rightleftarrows \alpha_2$, $\alpha_1 + \alpha_2 = -\alpha$

$$1 \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad e \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\eta \mapsto \begin{pmatrix} \alpha + t & 1 \\ -t^2 - \alpha t - \beta & -t \end{pmatrix}$$ y $e \cdot \eta$ al producto correspondiente

Clave construcción del isomorfismo

No existe t tal que $t^2 + \alpha t + \beta = 0$, ya que tiene las mismas raíces que $p(x)$

k extensiones propias

$k[\xi] \otimes_\tau l$: Primera parte

Observación (Podemos eliminar término lineal)

$l = k[X]/\langle p(x) \rangle$, $p(x) = x^2 - \alpha x + \beta$

$k[\xi] \otimes_\tau I$: Primera parte

Observación (Podemos eliminar término lineal)

$I = k[X]/\langle p(x)\rangle$, $p(x) = x^2 - \alpha x + \beta$
$char(k) \neq 2 \Rightarrow \phi(x) = (\alpha/2)x + 1$

$k[\xi] \otimes_\tau I$: Primera parte

Observación (Podemos eliminar término lineal)

$I = k[X]/\langle p(x)\rangle$, $p(x) = x^2 - \alpha x + \beta$

$char(k) \neq 2 \Rightarrow \phi(x) = (\alpha/2)x + 1$

$p(\phi(x)) = x^2 + \gamma$ y $k[x]/\langle p(x)\rangle \cong k[x]/\langle x^2 + \gamma\rangle$

$k[\xi] \otimes_\tau l$: Primera parte

Observación (Podemos eliminar término lineal)

$l = k[X]/\langle p(x)\rangle$, $p(x) = x^2 - \alpha x + \beta$
$char(k) \neq 2 \Rightarrow \phi(x) = (\alpha/2)x + 1$
$p(\phi(x)) = x^2 + \gamma$ y $k[x]/\langle p(x)\rangle \cong k[x]/\langle x^2 + \gamma\rangle$

$$l \text{ extensión de Galois} \Rightarrow \begin{tikzcd} \boxed{End_k(l)} \arrow[r, bend left] & \boxed{Gal(l/k)} \arrow[l, bend left] \end{tikzcd}$$

k extensiones propias

$k[\xi] \otimes_\tau l$: Primera parte

Observación (Podemos eliminar término lineal)

$l = k[X]/\langle p(x)\rangle$, $p(x) = x^2 - \alpha x + \beta$

$char(k) \neq 2 \Rightarrow \phi(x) = (\alpha/2)x + 1$

$p(\phi(x)) = x^2 + \gamma$ y $k[x]/\langle p(x)\rangle \cong k[x]/\langle x^2+\gamma\rangle$

l extensión de Galois $\Rightarrow$
$$\begin{tikzcd} \boxed{End_k(l)} \arrow[r, bend left] & \boxed{Gal(l/k)} \arrow[l, bend left] \end{tikzcd}$$

- $f = Id$
- σ, automorfismo no trivial

k extensiones propias

$k[\xi] \otimes_\tau l$: Primera parte

Observación (Podemos eliminar término lineal)

$l = k[X]/\langle p(x) \rangle$, $p(x) = x^2 - \alpha x + \beta$
$char(k) \neq 2 \Rightarrow \phi(x) = (\alpha/2)x + 1$
$p(\phi(x)) = x^2 + \gamma$ y $k[x]/\langle p(x)\rangle \cong k[x]/\langle x^2+\gamma \rangle$

l extensión de Galois $\Rightarrow$

$$\begin{tikzcd} \boxed{End_k(l)} \arrow[r, bend left] & \boxed{Gal(l/k)} \arrow[l, bend left] \end{tikzcd}$$

- $f = Id$
- σ, automorfismo no trivial

Si $Id \Rightarrow \delta = 0$ (l es separable $\Rightarrow$ derivaciones interiores)
$\rightsquigarrow k[\xi] \otimes l \cong l[\xi]$

$k[\xi] \otimes_\tau l$: Segunda parte

Si $\sigma \Rightarrow \delta = q \rightsquigarrow B_q = \langle x, y | x^2 = 0, y^2 = \gamma, xy + yx = q \rangle$

k extensiones propias

$k[\xi] \otimes_\tau l$: Segunda parte

Si $\sigma \Rightarrow \delta = q \rightsquigarrow B_q = \langle x, y | x^2 = 0, y^2 = \gamma, xy + yx = q \rangle$

- $q \neq 0$, entonces $B_q = M_2(k)$

$$1 \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad x \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ q/\gamma & 0 \end{pmatrix}$$

$$\eta \mapsto \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad x\eta \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix}$$

k extensiones propias

$k[\xi] \otimes_\tau l$: Segunda parte

Si $\sigma \Rightarrow \delta = q \rightsquigarrow B_q = \langle x, y | x^2 = 0, y^2 = \gamma, xy + yx = q \rangle$

- $q \neq 0$, entonces $B_q = M_2(k)$
- $q = 0$ Extendemos coeficientes y usamos álgebras de invariantes

$$B_0 \otimes l = l\langle x, y | x^2 = 0, y^2 = \gamma, xy + yx = q \rangle \cong lQ/Q_{\geq 2}$$

$$x \mapsto R + S \qquad y \mapsto \sqrt{\gamma}u - \sqrt{\gamma}v$$

donde $Q =$
$$\begin{tikzcd} u \arrow[r, bend left, "R"] & v \arrow[l, bend left, "S"] \end{tikzcd}$$

k extensiones propias

$k[\xi] \otimes_\tau l$: Segunda parte

Si $\sigma \Rightarrow \delta = q \rightsquigarrow B_q = \langle x, y | x^2 = 0, y^2 = \gamma, xy + yx = q \rangle$

- $q \neq 0$, entonces $B_q = M_2(k)$
- $q = 0$ Extendemos coeficientes y usamos álgebras de invariantes

$B_0 \otimes l = l\langle x, y | x^2 = 0, y^2 = \gamma, xy + yx = q \rangle \cong lQ/Q_{\geq 2}$

$(B_0 \otimes l)^\sigma \equiv B_0$, G grupo generado por automorfismo no trivial de lQ que conjuga escalares e intercambia los vértices y las flechas

$$\begin{array}{rccc} \psi : & (B_0 \otimes l)^\sigma \equiv B_0 & \xrightarrow{\cong} & (lQ/Q_{\geq 2})^G \\ & 1 & \mapsto & u + v \\ & x & \mapsto & aR + \bar{a}S \\ & y & \mapsto & \sqrt{\gamma}u - \sqrt{\gamma}v \\ & xy & \mapsto & -a\sqrt{\gamma}R + \bar{a}\sqrt{\gamma}S \end{array}$$

k extensiones propias

$I \otimes_\tau I'$: Primera parte

$$\begin{aligned} I &\equiv k\langle X\rangle/\langle x^2-\gamma\rangle \\ I' &\equiv k\langle X\rangle/\langle x^2-\gamma'\rangle \end{aligned}$$ cuerpos de descomposición

k extensiones propias

$l \otimes_\tau l'$: Primera parte

$$l \equiv k\langle X\rangle/\langle x^2-\gamma\rangle$$
$$l' \equiv k\langle X\rangle/\langle x^2-\gamma'\rangle$$
cuerpos de descomposición

- dos posibles endomorfismos
  - $f = Id$
  - σ automorfismo no trivial

k extensiones propias

$l \otimes_\tau l'$: Primera parte

$$l \equiv k\langle X\rangle/\langle x^2-\gamma\rangle$$
$$l' \equiv k\langle X\rangle/\langle x^2-\gamma'\rangle$$

cuerpos de descomposición

- dos posibles endomorfismos
  - $f = Id$
  - σ automorfismo no trivial
- l separable $\Rightarrow$ derivaciones interiores

k extensiones propias

$l \otimes_\tau l'$: Primera parte

$$l \equiv k\langle X\rangle/\langle x^2-\gamma\rangle$$
$$l' \equiv k\langle X\rangle/\langle x^2-\gamma'\rangle$$
cuerpos de descomposición

- dos posibles endomorfismos
  - $f = Id$
  - σ automorfismo no trivial
- l separable $\Rightarrow$ derivaciones interiores

- $Id \Rightarrow \delta = 0 \rightsquigarrow l \otimes l'$

k extensiones propias

$l \otimes_\tau l'$: Primera parte

$$l \equiv k\langle X\rangle/\langle x^2-\gamma\rangle$$
$$l' \equiv k\langle X\rangle/\langle x^2-\gamma'\rangle$$
cuerpos de descomposición

- dos posibles endomorfismos
  - $f = Id$
  - σ automorfismo no trivial
- l separable $\Rightarrow$ derivaciones interiores

- $Id \Rightarrow \delta = 0 \rightsquigarrow l \otimes l'$
- $\sigma \Rightarrow \delta = q \rightsquigarrow C_q = \langle x, y | x^2 = \gamma, y^2 = \gamma', xy + yx = q\rangle$

$$\underset{t=\frac{4\gamma\gamma'-q^2}{4\gamma}}{C_q \cong {}^{\gamma}k^{t}}, \qquad x \mapsto i \quad y \mapsto \frac{q}{2\gamma}i + ij$$

k extensiones propias

$I \otimes_\tau I'$: Segunda parte

Teorema (Clasificación cuaternios)

$q, h \in k$ *tales que* $4\gamma\gamma' - q \neq 0$ *y* $4\gamma\gamma' - h \neq 0$

- $C_q \cong C_h \Leftrightarrow \exists x, y \in k$ *tal que* $x^2 - \gamma y^2 = \frac{q^2 - 4\gamma\gamma'}{h^2 - 4\gamma\gamma'}$

k extensiones propias

$I \otimes_\tau I'$: Segunda parte

Teorema (Clasificación cuaternios)

$q, h \in k$ *tales que* $4\gamma\gamma' - q \neq 0$ *y* $4\gamma\gamma' - h \neq 0$

- $C_q \cong C_h \Leftrightarrow \exists x, y \in k$ *tal que* $x^2 - \gamma y^2 = \frac{q^2 - 4\gamma\gamma'}{h^2 - 4\gamma\gamma'}$
- $C_q \cong M_2(k) \Leftrightarrow \exists x, y \in k$ *tal que* $x^2 - \gamma y^2 = q^2 - 4\gamma\gamma'$

$l \otimes_\tau l'$: Segunda parte

Teorema (Clasificación cuaternios)

$q, h \in k$ tales que $4\gamma\gamma' - q \neq 0$ y $4\gamma\gamma' - h \neq 0$

- $C_q \cong C_h \Leftrightarrow \exists x, y \in k$ *tal que* $x^2 - \gamma y^2 = \frac{q^2 - 4\gamma\gamma'}{h^2 - 4\gamma\gamma'}$
- $C_q \cong M_2(k) \Leftrightarrow \exists x, y \in k$ *tal que* $x^2 - \gamma y^2 = q^2 - 4\gamma\gamma'$

Caso especial $\sqrt{\gamma\gamma'} \in k \Rightarrow l = l' = k(\sqrt{\gamma})$ *y* $q = 2\gamma$

$C_{2\gamma} \otimes l = l\langle x, y \mid x^2 = y^2 = \gamma, xy + yx = 2\gamma\rangle \cong lQ/Q_{\geq 2}$

$$x \longmapsto \sqrt{\gamma}u - \sqrt{\gamma}v + R + S \qquad y \longmapsto \sqrt{\gamma}u - \sqrt{\gamma}v$$

donde $Q =$
$$\begin{tikzcd} u \arrow[r, bend left, "R"] & v \arrow[l, bend left, "S"] \end{tikzcd}$$

k extensiones propias

$l \otimes_\tau l'$: Segunda parte

Teorema (Clasificación cuaternios)

$q, h \in k$ *tales que* $4\gamma\gamma' - q \neq 0$ *y* $4\gamma\gamma' - h \neq 0$

- $C_q \cong C_h \Leftrightarrow \exists x, y \in k$ *tal que* $x^2 - \gamma y^2 = \frac{q^2 - 4\gamma\gamma'}{h^2 - 4\gamma\gamma'}$
- $C_q \cong M_2(k) \Leftrightarrow \exists x, y \in k$ *tal que* $x^2 - \gamma y^2 = q^2 - 4\gamma\gamma'$

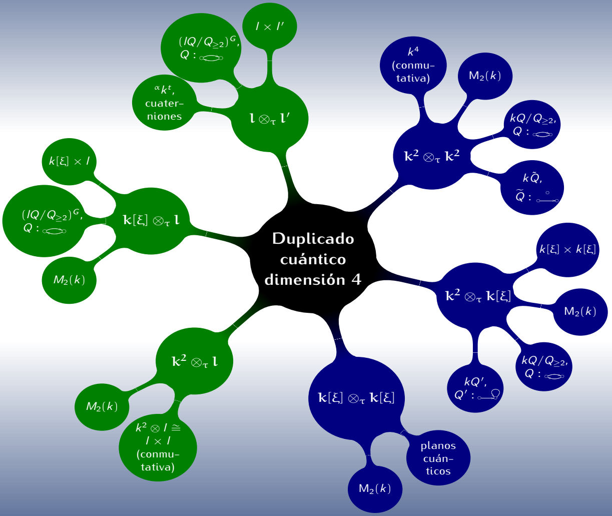
Caso especial $\sqrt{\gamma\gamma'} \in k \Rightarrow l = l' = k(\sqrt{\gamma})$ *y* $q = 2\gamma$

$C_{2\gamma} \otimes l = l\langle x, y | \; x^2 = y^2 = \gamma, xy + yx = 2\gamma\rangle \cong lQ/Q_{\geq 2}$

$$\begin{array}{rlcl} \Theta: & (C_{2\gamma \otimes l})^\sigma \equiv C_{2\gamma} & \xrightarrow{\cong} & (lQ/Q_{\geq 2})^G \\ & 1 & \mapsto & u + v \\ & x & \mapsto & \sqrt{\gamma}u - \sqrt{\gamma}v + aR + \bar{a}S \\ & y & \mapsto & \sqrt{\gamma}u - \sqrt{\gamma}v \\ & xy & \mapsto & \gamma u + \gamma v - a\sqrt{\gamma}R + \bar{a}\sqrt{\gamma}R \end{array}$$

Resultado final

Teorema clasificación



Clasificación ideales cofinitos homogéneos

Introducción

$\mathcal{J} \trianglelefteq k\langle X \rangle$. $\mathcal{J}$ ideal cofinito si $k\langle X \rangle / \mathcal{J}$ tiene dimensión finita

Clasificación ideales cofinitos homogéneos

Introducción

$\mathcal{J} \trianglelefteq k\langle X\rangle$. $\mathcal{J}$ ideal cofinito si $k\langle X\rangle/\mathcal{J}$ tiene dimensión finita

¿Qué problema queremos resolver?

Doble vertiente

Clasificación ideales cofinitos homogéneos

Introducción

$\mathcal{J} \trianglelefteq k\langle X\rangle$. $\mathcal{J}$ ideal cofinito si $k\langle X\rangle/\mathcal{J}$ tiene dimensión finita

¿Qué problema queremos resolver?

Doble vertiente

Estudiar condiciones $k\langle X\rangle/\mathcal{J}$ es finito

Clasificación ideales cofinitos homogéneos

Introducción

$\mathfrak{J} \trianglelefteq k\langle X\rangle$. $\mathfrak{J}$ ideal cofinito si $k\langle X\rangle/\mathfrak{J}$ tiene dimensión finita

¿Qué problema queremos resolver?

Doble vertiente

Estudiar condiciones $k\langle X\rangle/\mathfrak{J}$ es finito

Estudiar condiciones $k\langle X\rangle/\mathfrak{J} \cong k\langle X\rangle/\mathfrak{J}'$

Clasificación ideales cofinitos homogéneos

Introducción

$\mathfrak{J} \trianglelefteq k\langle X\rangle$. $\mathfrak{J}$ ideal cofinito si $k\langle X\rangle/\mathfrak{J}$ tiene dimensión finita

¿Qué problema queremos resolver?

Doble vertiente

Estudiar condiciones $k\langle X\rangle/\mathfrak{J}$ es finito

Estudiar condiciones $k\langle X\rangle/\mathfrak{J} \cong k\langle X\rangle/\mathfrak{J}'$

- Punto de vista no conmutativo
- Uso ordenador (estudio de grandes familias de ejemplos)

Clasificación ideales cofinitos homogéneos

¿Cuándo $k\langle X\rangle/\mathcal{J}$ es finito?

Ejemplo

$$\mathcal{A} = k\langle X\rangle/\langle x^2y - xyx, xyx - y^3\rangle$$

Base de Gröbner-Shirshov $\Rightarrow \{x^2y - y^3, xyx - y^3, xy^3 - y^3x, y^3x^2 - y^5, y^3xy - y^4x\}$

Clasificación ideales cofinitos homogéneos

¿Cuándo $k\langle X\rangle/\mathcal{J}$ es finito?

Ejemplo

$$\mathcal{A} = k\langle X\rangle/\langle x^2y - xyx, xyx - y^3\rangle$$

Base de Gröbner-Shirshov $\Rightarrow \{x^2y - y^3, xyx - y^3, xy^3 - y^3x, y^3x^2 - y^5, y^3xy - y^4x\}$

- Calcular base

$1, x, y, x^2, xy, yx, y^2, x^3, xy^2, yx^2, yxy, y^2x, y^3, x^4, xy^2x, yx^3,$
$yxy^2, y^2x^2, y^2xy, y^3x, y^4, x^5, xy^2x^2, xy^2xy, yx^4, yxy^2x, y^2x^3,$
$y^2xy^2, y^4x, y^5, x^6, xy^2x^3, xy^2xy^2, yx^5, 5xy^2x^2, y^2x^4, y^2xy^2,$
$y^5x, y^6 \ldots$

Clasificación ideales cofinitos homogéneos

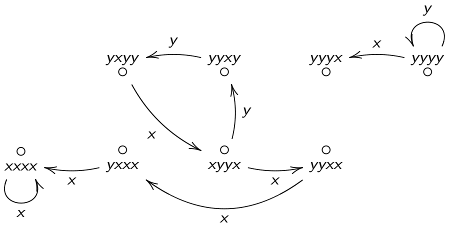
¿Cuándo $k\langle X\rangle/\mathcal{J}$ es finito?

Ejemplo

$$\mathcal{A} = k\langle X\rangle/\langle x^2y - xyx, xyx - y^3\rangle$$

Base de Gröbner-Shirshov $\Rightarrow \{x^2y - y^3, xyx - y^3, xy^3 - y^3x, y^3x^2 - y^5, y^3xy - y^4x\}$

- Calcular base
- Grafo de Ufnarovskii



Necesitamos BGS finita

Clasificación ideales cofinitos homogéneos

¿Cuándo $k\langle X\rangle/\mathcal{J}$ es finito?

Ejemplo

$$\mathcal{A} = k\langle X\rangle/\langle x^2y - xyx, xyx - y^3\rangle$$

Base de Gröbner-Shirshov $\Rightarrow \{x^2y - y^3, xyx - y^3, xy^3 - y^3x, y^3x^2 - y^5, y^3xy - y^4x\}$

- Calcular base
- Grafo de Ufnarovskii
- Dimensión Gelfand-Kirillov

$$\boxed{GK\text{-}dim(\mathcal{A}) = 2}$$

Clasificación ideales cofinitos homogéneos

¿Cuándo $k\langle X\rangle/\mathcal{J}$ es finito?

Ejemplo

$\mathcal{A} = k\langle X\rangle/\langle x^2y - xyx, xyx - y^3\rangle$

Base de Gröbner-Shirshov $\Rightarrow \{x^2y - y^3, xyx - y^3, xy^3 - y^3x, y^3x^2 - y^5, y^3xy - y^4x\}$

- Calcular base
- Grafo de Ufnarovskii
- Dimensión Gelfand-Kirillov
- Serie de Hilbert

$$1 + 2t + 4t^2 + 6t^3 + 8t^4 + 9t^5 + 10t^6 + 11t^7 + 12t^8 + 13t^9 + 14t^{10} + 15t^{11} + 16t^{12} + 17t^{13} + \cdots$$

Clasificación ideales cofinitos homogéneos

¿Cuándo $k\langle X\rangle/\mathcal{J}$ es finito?

Ejemplo

$\mathcal{A} = k\langle X\rangle/\langle x^2y - xyx, xyx - y^3\rangle$

Base de Gröbner-Shirshov $\Rightarrow \{x^2y - y^3, xyx - y^3, xy^3 - y^3x, y^3x^2 - y^5, y^3xy - y^4x\}$

- Calcular base
- Grafo de Ufnarovskii
- Dimensión Gelfand-Kirillov
- Serie de Hilbert $\Leftarrow$ BERGMAN + C++

Clasificación ideales cofinitos homogéneos

¿Cuándo $k\langle X\rangle/\mathcal{I} \simeq k\langle X\rangle/\mathcal{I}'$?

¿Qué había antes?

- Ufnarovskii [82] $\rightsquigarrow$ grafos

Clasificación ideales cofinitos homogéneos

¿Cuándo $k\langle X\rangle/\mathcal{I} \cong k\langle X\rangle/\mathcal{I}'$?

¿Qué había antes?

- Ufnarovskii [82] $\rightsquigarrow$ grafos
- Kostrikin y Shafarevich [95] $\rightsquigarrow$ combinatoria y métodos asintóticos

Clasificación ideales cofinitos homogéneos

¿Cuándo $k\langle X\rangle/\mathcal{I} \simeq k\langle X\rangle/\mathcal{I}'$?

¿Qué había antes?

- Ufnarovskii [82] $\rightsquigarrow$ grafos
- Kostrikin y Shafarevich [95] $\rightsquigarrow$ combinatoria y métodos asintóticos
- Shirayanagi
  - [90] álgebras binomiales finito dimensionales (grafos vértices)
  - [91] álgebras monomiales
  - [93] álgebras cocientes ($\rightsquigarrow$ conmutativa)

Clasificación ideales cofinitos homogéneos

¿Cuándo $k\langle X\rangle/\mathcal{I} \simeq k\langle X\rangle/\mathcal{I}'$?

¿Qué había antes?

- Ufnarovskii [82] $\rightsquigarrow$ grafos
- Kostrikin y Shafarevich [95] $\rightsquigarrow$ combinatoria y métodos asintóticos
- Shirayanagi
  - [90] álgebras binomiales finito dimensionales (grafos vértices)
  - [91] álgebras monomiales
  - [93] álgebras cocientes ($\rightsquigarrow$ conmutativa)

PROBLEMA (ambiente no conmutativo)

Clasificación ideales cofinitos homogéneos

¿Cuándo $k\langle X\rangle/\mathcal{I} \cong k\langle X\rangle/\mathcal{I}'$?

¿Qué había antes?

- Ufnarovskii [82] $\rightsquigarrow$ grafos
- Kostrikin y Shafarevich [95] $\rightsquigarrow$ combinatoria y métodos asintóticos
- Shirayanagi
  - [90] álgebras binomiales finito dimensionales (grafos vértices)
  - [91] álgebras monomiales
  - [93] álgebras cocientes ($\rightsquigarrow$ conmutativa)

PROBLEMA (ambiente no conmutativo)

$\downarrow$

Bases Gröbner-Shirshov no computables

$\Downarrow$

no se puede resolver

Clasificación ideales cofinitos homogéneos

Homogeneidad

Solución Problema pertenencia

Clasificación ideales cofinitos homogéneos

Homogeneidad

Solución Problema pertenencia

Ideales homogéneos

- cálculo hasta grado deseado
- reducción graduada
- álgebras graduadas

Clasificación ideales cofinitos homogéneos

Homogeneidad

Solución Problema pertenencia

Ideales homogéneos

- cálculo hasta grado deseado
- reducción graduada
- álgebras graduadas

Parametrización ideales

$$\mathcal{A} = k\langle X\rangle/\mathcal{I}, \qquad \mathcal{I} \in (a, b, c) \in \mathbb{N}^3$$

Clasificación ideales cofinitos homogéneos

Homogeneidad

Solución Problema pertenencia

Ideales homogéneos

- cálculo hasta grado deseado
- reducción graduada
- álgebras graduadas

Parametrización ideales

$$\mathcal{A} = k\langle X\rangle/\mathcal{I}, \qquad \mathcal{I} \in (a, b, c) \in \mathbb{N}^3$$

- a número de variables en X

Clasificación ideales cofinitos homogéneos

Homogeneidad

Solución Problema pertenencia → Ideales homogéneos

- cálculo hasta grado deseado
- reducción graduada
- álgebras graduadas

Parametrización ideales

$\mathcal{A} = k\langle X\rangle/\mathcal{I}, \qquad \mathcal{I} \in (a, b, c) \in \mathbb{N}^3$

- a número de variables en X
- b longitud de los monomios que componen las relaciones
  - monomios $\Rightarrow$ reducción a cero
  - binomios $\Rightarrow$ reducción a elemento menor

Clasificación ideales cofinitos homogéneos

Homogeneidad

Solución Problema pertenencia → Ideales homogéneos

- cálculo hasta grado deseado
- reducción graduada
- álgebras graduadas

Parametrización ideales

$$\mathcal{A} = k\langle X\rangle/\mathcal{I}, \qquad \mathcal{I} \in (a, b, c) \in \mathbb{N}^3$$

- a número de variables en X
- b longitud de los monomios que componen las relaciones
  - monomios $\Rightarrow$ reducción a cero
  - binomios $\Rightarrow$ reducción a elemento menor
- c número de relaciones que componen el ideal

Clasificación ideales cofinitos homogéneos

Homogeneidad

Solución Problema pertenencia

Ideales homogéneos

- cálculo hasta grado deseado
- reducción graduada
- álgebras graduadas

Parametrización ideales

$\mathcal{A} = k\langle X\rangle/\mathcal{I}, \qquad \mathcal{I} \in (a, b, c) \in \mathbb{N}^3$

- a número de variables en X
- b longitud de los monomios que componen las relaciones
  - monomios $\Rightarrow$ reducción a cero
  - binomios $\Rightarrow$ reducción a elemento menor
- c número de relaciones que componen el ideal

$\langle xxx, yxy, xyy - yxx, yyx - yyy\rangle$ pertenece a $(2, 3, 4)$

El Programa Bergman

- Desarrollado por Jörgen Backelin (Universidad de Estocolmo)

El Programa Bergman

- Desarrollado por Jörgen Backelin (Universidad de Estocolmo)
- Estudio de álgebras conmutativas y no conmutativas

  Bases de Gröbner-Shirshov (estrategia del conejo)
  Número de S-polinomios resueltos
  Reducciones y formas normales
  Series de Hilbert
  ...

Programa Bergman

El Programa Bergman

- Desarrollado por Jörgen Backelin (Universidad de Estocolmo)
- Estudio de álgebras conmutativas y no conmutativas

  Bases de Gröbner-Shirshov (estrategia del conejo)
  Número de S-polinomios resueltos
  Reducciones y formas normales
  Series de Hilbert
  ...

Números de casos en cada familia

- número total de ideales $\Rightarrow \binom{\frac{(a^b+1)a^b}{2}}{c}$

Programa Bergman

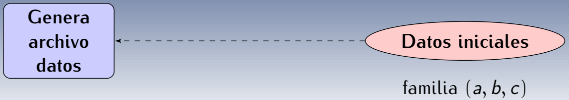
Flujo del programa

Datos iniciales

familia (a, b, c)

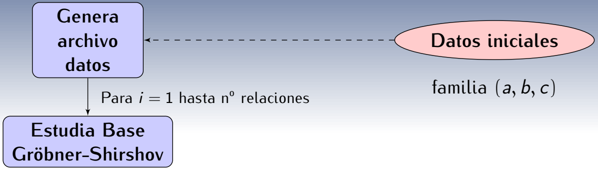
Programa Bergman

Flujo del programa



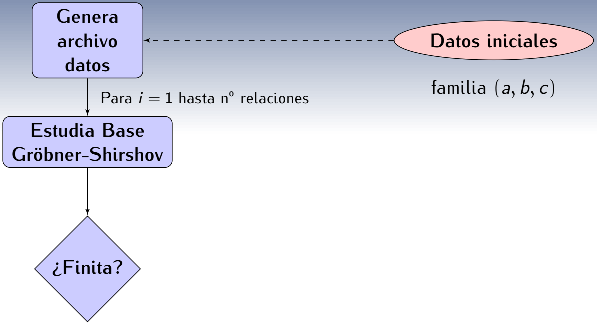
Programa Bergman

Flujo del programa



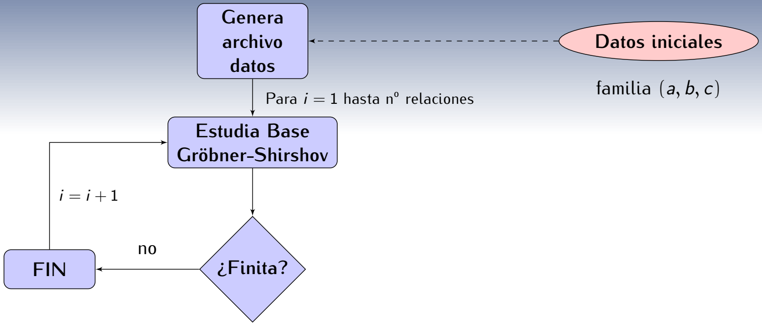
Programa Bergman

Flujo del programa



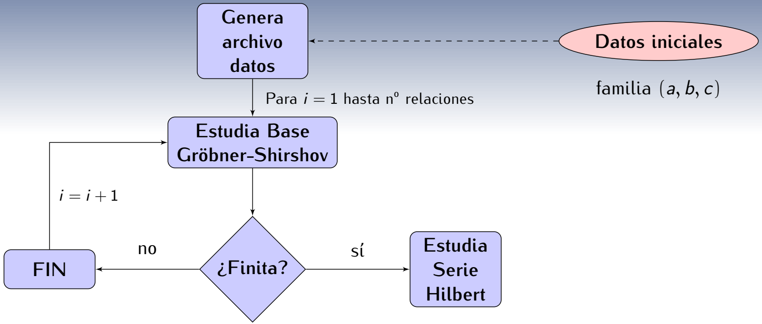
Programa Bergman

Flujo del programa



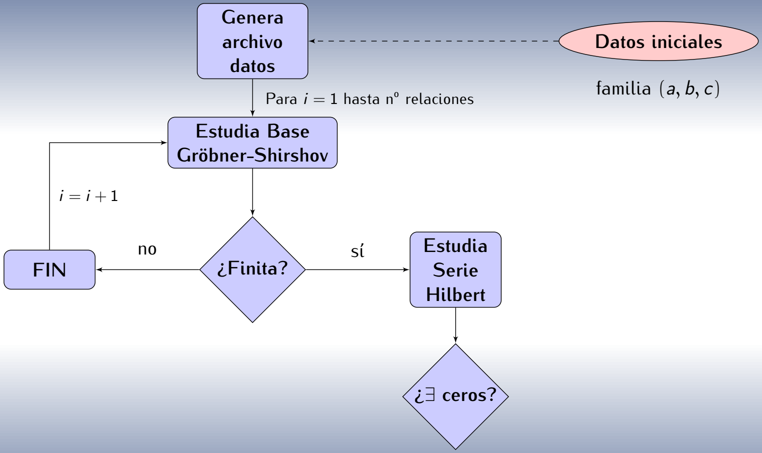
Programa Bergman

Flujo del programa



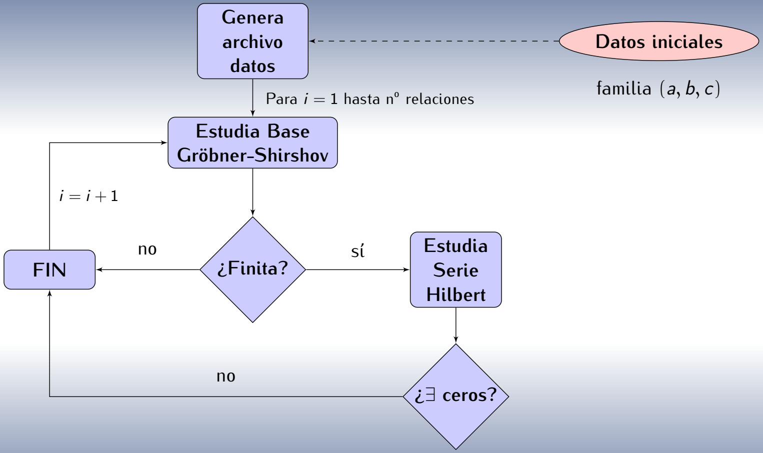
Programa Bergman

Flujo del programa



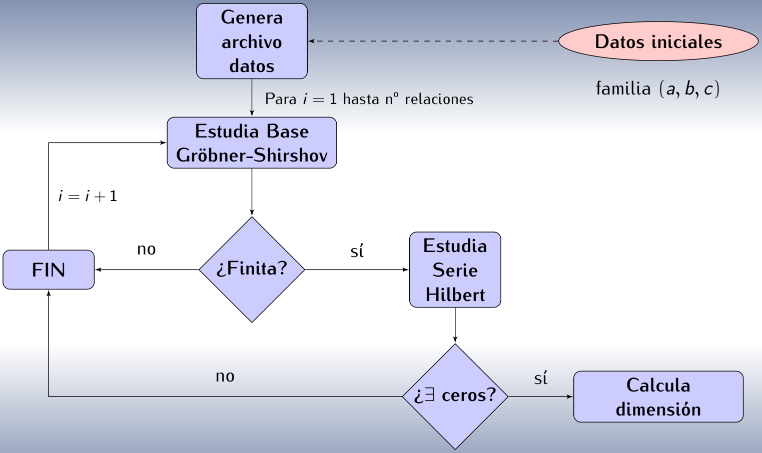
Programa Bergman

Flujo del programa



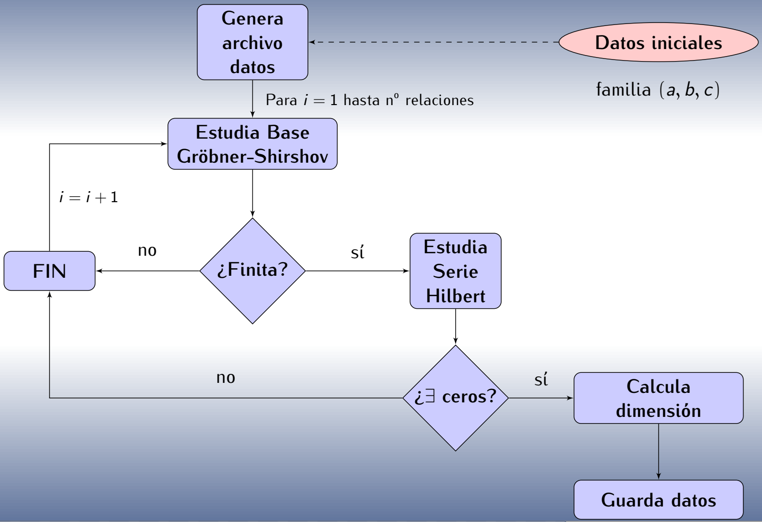
Programa Bergman

Flujo del programa



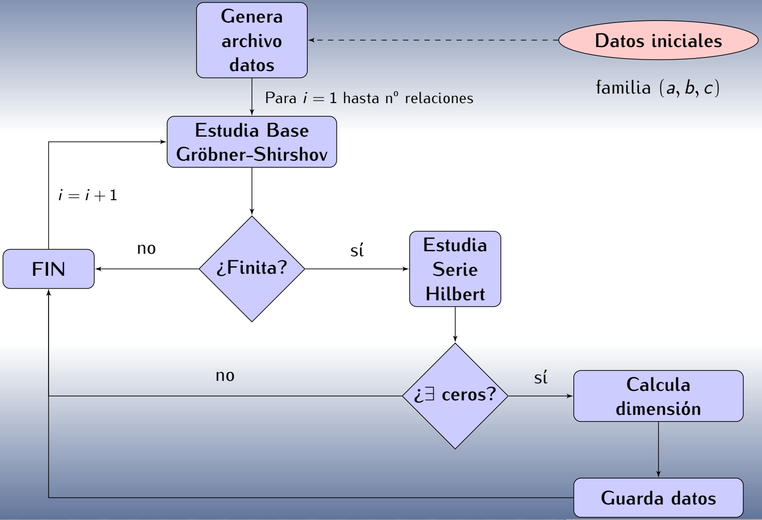
Programa Bergman

Flujo del programa



Programa Bergman

Flujo del programa



Programa Bergman

Ejemplo del programa (2 variables)

Características
Familias

Programa Bergman

Ejemplo del programa (2 variables)

Características Familias

Familia $(2, 2, 2)$

- 45 casos
- 6 cofinitos
- dim máx 6
  - 4 casos

$\langle xx, xy - yy \rangle$
$\langle xx, yx - yy \rangle$
$\langle yy, xx - xy \rangle$
$\langle yy, xx - yx \rangle$

Programa Bergman

Ejemplo del programa (2 variables)

Características Familias

Familia $(2,2,2)$

- 45 casos
- 6 cofinitos
- dim máx 6
  - 4 casos

Familia $(2,2,3)$

- 120 casos
- 62 cofinitos
- dim máx 4
  - 62 casos

$\langle xx, xy, yy\rangle$
$\langle xx, xy, xy - yy\rangle$
$\langle yx, xx-yx, yx-yy\rangle$
$\dots$

Programa Bergman

Ejemplo del programa (2 variables)

Características Familias

Familia $(2,2,2)$

- 45 casos
- 6 cofinitos
- dim máx 6
  - 4 casos

Familia $(2,2,3)$

- 120 casos
- 62 cofinitos
- dim máx 4
  - 62 casos

Familia $(2,3,3)$

- 7410 casos
- 300 cofinitos
- dim máx 36
  - 4 casos

$\langle xxx, xyx - xyy, yxy - yyy\rangle$
$\langle xxx, xyx - yyx, yxy - yyy\rangle$
$\langle yyy, xxx - xyx, xxy - yxy\rangle$
$\langle yyy, xxx - xyx, yxx - yxy\rangle$

Criterio de isomorfía (Shirayanagi)

Primer filtro $\Rightarrow$ misma dimensión

Búsqueda isomorfismos

Criterio de isomorfía (Shirayanagi)

Primer filtro $\Rightarrow$ misma dimensión

Álgebras graduadas $\Rightarrow$ misma serie de Hilbert

Búsqueda isomorfismos

Criterio de isomorfía (Shirayanagi)

Primer filtro $\Rightarrow$ misma dimensión

Álgebras graduadas $\Rightarrow$ misma serie de Hilbert

Procedimiento algoritmo

$\mathcal{I}_{\mathcal{A}} = \langle xx, xy - yy \rangle, \mathcal{I}_{\mathcal{B}} = \langle yy, xx - yx \rangle \quad dim(\mathcal{A}) = dim(\mathcal{B}) = 6$

Búsqueda isomorfismos

Criterio de isomorfía (Shirayanagi)

Primer filtro $\Rightarrow$ misma dimensión
Álgebras graduadas $\Rightarrow$ misma serie de Hilbert

Procedimiento algoritmo

$\mathcal{I}_{\mathcal{A}} = \langle xx, xy - yy \rangle, \mathcal{I}_{\mathcal{B}} = \langle yy, xx - yx \rangle \quad dim(\mathcal{A}) = dim(\mathcal{B}) = 6$

- Construyo φ homomorfismo de $\mathcal{A}$ sobre una base de $\mathcal{B}$

$$\begin{cases} \varphi(x) = a_1 + a_2 x + a_3 y + a_4 xy + a_5 yx + a_6 yxy \\ \varphi(y) = b_1 + b_2 x + b_3 y + b_4 xy + b_5 yx + b_6 yxy \end{cases}$$

Búsqueda isomorfismos

Criterio de isomorfía (Shirayanagi)

Primer filtro $\Rightarrow$ misma dimensión

Álgebras graduadas $\Rightarrow$ misma serie de Hilbert

Procedimiento algoritmo

$\mathcal{I}_{\mathcal{A}} = \langle xx, xy - yy \rangle, \mathcal{I}_{\mathcal{B}} = \langle yy, xx - yx \rangle \quad dim(\mathcal{A}) = dim(\mathcal{B}) = 6$

- Construyo φ homomorfismo de $\mathcal{A}$ sobre una base de $\mathcal{B}$
- Calcular f matriz del homomorfismo $(dim(\mathcal{A}) \times dim(\mathcal{A}))$

$f = -a_3 b_2^2 (b_2 + b_3)^2 (a_3 b_2 - a_2 b_3)^2$

Búsqueda isomorfismos

Criterio de isomorfía (Shirayanagi)

Primer filtro $\Rightarrow$ misma dimensión

Álgebras graduadas $\Rightarrow$ misma serie de Hilbert

Procedimiento algoritmo

$\mathcal{I}_{\mathcal{A}} = \langle xx, xy - yy \rangle, \mathcal{I}_{\mathcal{B}} = \langle yy, xx - yx \rangle \quad dim(\mathcal{A}) = dim(\mathcal{B}) = 6$

- Construyo φ homomorfismo de $\mathcal{A}$ sobre una base de $\mathcal{B}$
- Calcular f matriz del homomorfismo $(dim(\mathcal{A}) \times dim(\mathcal{A}))$
- Calcular $\varphi(\mathcal{I}_{\mathcal{A}})$ imagen de los elementos de $\mathcal{I}_{\mathcal{A}}$

$$\mathcal{J} = (a_1^2, 2a_1a_2, 2a_1a_3, a_2a_3 + 2a_1a_4, a_2^2 + a_2a_3 + 2a_1a_5, a_2a_4 + a_3a_4 + a_3a_5 + 2a_1a_6, a_1b_1 - b_1^2, a_2b_1 + a_1b_2 - 2b_1b_2, a_3b_1 + a_1b_3 - 2b_1b_3, a_4b_1 + a_2b_3 - b_2b_3 + a_1b_4 - 2b_1b_4, a_5b_1 + a_2b_2 + a_3b_2 - b_2^2 - b_2b_3 + a_1b_5 - 2b_1b_5, a_6b_1 + a_5b_3 + a_2b_4 + a_3b_4 - b_2b_4 - b_3b_4 - b_3b_5 + a_1b_6 - 2b_1b_6)$$

Criterio de isomorfía (Shirayanagi)

Primer filtro $\Rightarrow$ misma dimensión

Álgebras graduadas $\Rightarrow$ misma serie de Hilbert

Procedimiento algoritmo

$\mathcal{I}_{\mathcal{A}} = \langle xx, xy - yy\rangle, \mathcal{I}_{\mathcal{B}} = \langle yy, xx - yx\rangle$ $\quad dim(\mathcal{A}) = dim(\mathcal{B}) = 6$

- Construyo φ homomorfismo de $\mathcal{A}$ sobre una base de $\mathcal{B}$
- Calcular f matriz del homomorfismo $(dim(\mathcal{A}) \times dim(\mathcal{A}))$
- Calcular $\varphi(\mathcal{I}_{\mathcal{A}})$ imagen de los elementos de $\mathcal{I}_{\mathcal{A}}$
- Comprobar si 1 pertenece a la base de Gröbner (conmutativa) de $(\varphi(\mathcal{I}_{\mathcal{A}}), tf - 1)$ $\rightsquigarrow$ Teorema Ceros de Hilbert

  $\{b_3, 1 + b_2^9 t, b_1, a_4 + a_5, a_3 - b_2, a_2, a_1\}$

Criterio de isomorfía (Shirayanagi)

Primer filtro $\Rightarrow$ misma dimensión

Álgebras graduadas $\Rightarrow$ misma serie de Hilbert

Procedimiento algoritmo

$\mathcal{I}_{\mathcal{A}} = \langle xx, xy - yy \rangle, \mathcal{I}_{\mathcal{B}} = \langle yy, xx - yx \rangle \quad dim(\mathcal{A}) = dim(\mathcal{B}) = 6$

- Construyo φ homomorfismo de $\mathcal{A}$ sobre una base de $\mathcal{B}$
- Calcular f matriz del homomorfismo $(dim(\mathcal{A}) \times dim(\mathcal{A}))$
- Calcular $\varphi(\mathcal{I}_{\mathcal{A}})$ imagen de los elementos de $\mathcal{I}_{\mathcal{A}}$
- Comprobar si 1 pertenece a la base de Gröbner (conmutativa) de $(\varphi(\mathcal{I}_{\mathcal{A}}), tf - 1)$ $\rightsquigarrow$Teorema Ceros de Hilbert

Solución:

$a_1 = 0, \quad a_2 = 0, \quad a_5 = -a_4, \quad b_1 = 0, \quad b_2 = a_3, \quad b_3 = 0, \quad a_3 \neq 0$

Búsqueda isomorfismos

Criterio de isomorfía graduado

Criterio de Shirayanagi $\rightsquigarrow$ gran consumo

Criterio de isomorfía graduado

Criterio de Shirayanagi $\rightsquigarrow$ gran consumo

Aprovechar estructura graduado de $\mathcal{A} = k\langle X\rangle/\mathcal{I}$, $\mathcal{I}$ homogéneo

Criterio de isomorfía graduado

Criterio de Shirayanagi $\rightsquigarrow$ gran consumo

Aprovechar estructura graduado de $\mathcal{A} = k\langle X\rangle/\mathcal{I}$, $\mathcal{I}$ homogéneo

- Construyo $\tilde{\varphi}$ homomorfismo entre los elementos de grado 1

$$\begin{cases} \tilde{\varphi}(x) = ax + by \\ \tilde{\varphi}(y) = cx + dy \end{cases}$$

Criterio de isomorfía graduado

Criterio de Shirayanagi $\rightsquigarrow$ gran consumo

Aprovechar estructura graduado de $\mathcal{A} = k\langle X\rangle/\mathcal{I}$, $\mathcal{I}$ homogéneo

- Construyo $\tilde{\varphi}$ homomorfismo entre los elementos de grado 1

$$\begin{cases} \tilde{\varphi}(x) = ax + by \\ \tilde{\varphi}(y) = cx + dy \end{cases}$$

Encontrar condiciones sobre a, b, c, d

Búsqueda isomorfismos

Criterio de isomorfía graduado

Criterio de Shirayanagi $\rightsquigarrow$ gran consumo

Aprovechar estructura graduado de $\mathcal{A} = k\langle X\rangle/\mathcal{I}$, $\mathcal{I}$ homogéneo

- Construyo $\tilde{\varphi}$ homomorfismo entre los elementos de grado 1

$$\begin{cases} \tilde{\varphi}(x) = ax + by \\ \tilde{\varphi}(y) = cx + dy \end{cases}$$

Encontrar condiciones sobre a, b, c, d

- Imponemos condiciones de isomorfía grado a grado
  - compatibilidad palabras normales (determinante $\neq 0$)
  - $\tilde{\varphi}(\mathcal{I}_{\mathcal{A}})$ compatible con matriz distinta de cero

Búsqueda isomorfismos

Criterio de isomorfía graduado

Criterio de Shirayanagi $\rightsquigarrow$ gran consumo

Aprovechar estructura graduado de $\mathcal{A} = k\langle X\rangle/\mathcal{I}$, $\mathcal{I}$ homogéneo

- Construyo $\tilde{\varphi}$ homomorfismo entre los elementos de grado 1

$$\begin{cases} \tilde{\varphi}(x) = ax + by \\ \tilde{\varphi}(y) = cx + dy \end{cases}$$

Encontrar condiciones sobre a, b, c, d

- Imponemos condiciones de isomorfía grado a grado
  - compatibilidad palabras normales (determinante $\neq 0$)
  - $\tilde{\varphi}(\mathcal{I}_{\mathcal{A}})$ compatible con matriz distinta de cero

$$\boxed{\mathcal{A}_1 \cong \mathcal{B}_1} + \boxed{\mathcal{A}_2 \cong \mathcal{B}_2} + \cdots + \boxed{\mathcal{A}_n \cong \mathcal{B}_n} = \boxed{\mathcal{A} \cong \mathcal{B}}$$

Búsqueda isomorfismos

Ejemplo Isomorfismo Graduado

Ideales

Ejemplo Isomorfismo Graduado

Ideales

$\mathcal{I}_{\mathcal{A}} = \langle xxx, xyx, xxx - xyx, xyy - yyy \rangle$

$\mathcal{I}_{\mathcal{B}} = \langle yxy, yyy, xxx - yxx, yxy - yyy \rangle$

- $\mathrm{Dim}(\mathcal{A}_1) = \mathrm{Dim}(\mathcal{B}) = 25$
- $\mathcal{H} = 1 + 2x + 4x^2 + 5x^3 + 5x^4 + 4x^5 + 3x^6 + x^7$

Búsqueda isomorfismos

Ejemplo Isomorfismo Graduado

Ideales

$\mathcal{I}_{\mathcal{A}} = \langle xxx, xyx, xxx - xyx, xyy - yyy \rangle$

$\mathcal{I}_{\mathcal{B}} = \langle yxy, yyy, xxx - yxx, yxy - yyy \rangle$

- $\mathrm{Dim}(\mathcal{A}_1) = \mathrm{Dim}(\mathcal{B}) = 25$
- $\mathcal{H} = 1 + 2x + 4x^2 + 5x^3 + 5x^4 + 4x^5 + 3x^6 + x^7$

$$\begin{cases} \varphi(x) = ax + by \\ \varphi(y) = cx + dy \end{cases}$$

Condición Grado 1

$$ad - bc \neq 0$$

Ejemplo Isomorfismo Graduado

Ideales

$\mathcal{I}_{\mathcal{A}} = \langle xxx, xyx, xxx - xyx, xyy - yyy \rangle$

$\mathcal{I}_{\mathcal{B}} = \langle yxy, yyy, xxx - yxx, yxy - yyy \rangle$

Comprobación grado 2

- $\mathrm{Dim}(\mathcal{A}_1) = \mathrm{Dim}(\mathcal{B}) = 25$
- $\mathcal{H} = 1 + 2x + 4x^2 + 5x^3 + 5x^4 + 4x^5 + 3x^6 + x^7$

  elementos normales $\Rightarrow \{xx, xy, yx, yy\}$

  matriz asociada $\tilde{M}_2 = \begin{pmatrix} aa & ab & ab & bb \\ ac & ad & bc & bd \\ ac & bc & ad & bd \\ cc & cd & cd & dd \end{pmatrix}$

  $det(\tilde{M}_2) \neq 0 \Leftrightarrow ad - bc \neq 0$

Condición Grado 1

$ad - bc \neq 0$

Búsqueda isomorfismos

Ejemplo Isomorfismo Graduado

Ideales

$\mathcal{I}_{\mathcal{A}} = \langle xxx, xyx, xxx - xyx, xyy - yyy\rangle$

$\mathcal{I}_{\mathcal{B}} = \langle yxy, yyy, xxx - yxx, yxy - yyy\rangle$

Comprobación grado 2

- $\mathrm{Dim}(\mathcal{A}_1) = \mathrm{Dim}(\mathcal{B}) = 25$
- $\mathcal{H} = 1 + 2x + 4x^2 + 5x^3 + 5x^4 + 4x^5 + 3x^6 + x^7$

elementos normales $\Rightarrow \{xx, xy, yx, yy\}$

matriz asociada $\tilde{M}_2 = \begin{pmatrix} aa & ab & ab & bb \\ ac & ad & bc & bd \\ ac & bc & ad & bd \\ cc & cd & cd & dd \end{pmatrix}$

$det(\tilde{M}_2) \neq 0 \Leftrightarrow ad - bc \neq 0$

Condición Grado 2

$$ad - bc \neq 0$$

Búsqueda isomorfismos

Ejemplo Isomorfismo Graduado

Ideales

$\mathcal{I}_{\mathcal{A}} = \langle xxx, xyx, xxx - xyx, xyy - yyy \rangle$

$\mathcal{I}_{\mathcal{B}} = \langle yxy, yyy, xxx - yxx, yxy - yyy \rangle$

Comprobación grado 2

Comprobación grado 3

- $\mathrm{Dim}(\mathcal{A}_1) = \mathrm{Dim}(\mathcal{B}) = 25$
- $\mathcal{H} = 1 + 2x + 4x^2 + 5x^3 + 5x^4 + 4x^5 + 3x^6 + x^7$

elementos normales $\{xxy, yxx, yxy, yyx, yyy\}$

matriz asociada

$$\tilde{M}_3 = \begin{pmatrix} aad & abc & abd & aac + abc & bbc \\ abc & abc & bbc & aac + aad & abd \\ acd & bcc & bcd & acc + acd & bcd \\ bcc & acd & bcd & acc + acd & add \\ ccd & ccd & cdd & ccc + ccd & cdd \end{pmatrix}$$

$det(\tilde{M}_3) \neq 0 \Leftrightarrow bc(c+d)(ad - bc) \neq 0$

Condición Grado 2

$$ad - bc \neq 0$$

Búsqueda isomorfismos

Ejemplo Isomorfismo Graduado

Ideales

$\mathcal{I}_{\mathcal{A}} = \langle xxx, xyx, xxx - xyx, xyy - yyy \rangle$

$\mathcal{I}_{\mathcal{B}} = \langle yxy, yyy, xxx - yxx, yxy - yyy \rangle$

Comprobación grado 2

Comprobación grado 3

- $\mathrm{Dim}(\mathcal{A}_1) = \mathrm{Dim}(\mathcal{B}) = 25$
- $\mathcal{H} = 1 + 2x + 4x^2 + 5x^3 + 5x^4 + 4x^5 + 3x^6 + x^7$

elementos normales $\{xxy, yxx, yxy, yyx, yyy\}$

matriz asociada

$$\tilde{M}_3 = \begin{pmatrix} aad & abc & abd & aac + abc & bbc \\ abc & abc & bbc & aac + aad & abd \\ acd & bcc & bcd & acc + acd & bcd \\ bcc & acd & bcd & acc + acd & add \\ ccd & ccd & cdd & ccc + ccd & cdd \end{pmatrix}$$

$$det(\tilde{M}_3) \neq 0 \Leftrightarrow bc(c+d)(ad-bc) \neq 0$$

Condición Grado 3

$$bc(c+d)(ad-bc) \neq 0$$

Búsqueda isomorfismos

Ejemplo Isomorfismo Graduado

Ideales

$\mathcal{I}_{\mathcal{A}} = \langle xxx, xyx, xxx - xyx, xyy - yyy \rangle$

$\mathcal{I}_{\mathcal{B}} = \langle yxy, yyy, xxx - yxx, yxy - yyy \rangle$

Comprobación grado 2

Comprobación grado 3

Relaciones del ideal

- $\mathrm{Dim}(\mathcal{A}_1) = \mathrm{Dim}(\mathcal{B}) = 25$
- $\mathcal{H} = 1 + 2x + 4x^2 + 5x^3 + 5x^4 + 4x^5 + 3x^6 + x^7$

$$\tilde{\varphi}(xxx) \mapsto \{a^2b, a^2b, ab^2, a^3 + a^2b, ab^2\}$$
$$\tilde{\varphi}(xyx) \mapsto \{abc, a^2d, abd, a^2c + abc, abd\}$$
$$\tilde{\varphi}(xyy - yyy) \mapsto \{acd - c^2d, acd - c^2d, ad^2 - cd^2, ac^2 + bc^2 - c^3 - c^2d, bcd - cd^2\}$$

Condición Grado 3

$$bc(c + d)(ad - bc) \neq 0$$

Búsqueda isomorfismos

Ejemplo Isomorfismo Graduado

Ideales

$\mathcal{I}_{\mathcal{A}} = \langle xxx, xyx, xxx - xyx, xyy - yyy \rangle$

$\mathcal{I}_{\mathcal{B}} = \langle yxy, yyy, xxx - yxx, yxy - yyy \rangle$

Comprobación grado 2

Comprobación grado 3

Relaciones del ideal

- $\mathrm{Dim}(\mathcal{A}_1) = \mathrm{Dim}(\mathcal{B}) = 25$
- $\mathcal{H} = 1 + 2x + 4x^2 + 5x^3 + 5x^4 + 4x^5 + 3x^6 + x^7$

$$\tilde{\varphi}(xxx) \mapsto \{a^2b, a^2b, ab^2, a^3 + a^2b, ab^2\}$$
$$\tilde{\varphi}(xyx) \mapsto \{abc, a^2d, abd, a^2c + abc, abd\}$$
$$\tilde{\varphi}(xyy - yyy) \mapsto \{acd - c^2d, acd - c^2d, ad^2 - cd^2, ac^2 + bc^2 - c^3 - c^2d, bcd - cd^2\}$$

Condición grado 3 + $\tilde{\varphi}(\mathcal{I}_{\mathcal{A}}) = 0$

Condición Grado 3

$$bc(c+d)(ad - bc) \neq 0$$

Búsqueda isomorfismos

Ejemplo Isomorfismo Graduado

Ideales

$\mathcal{I}_{\mathcal{A}} = \langle xxx, xyx, xxx - xyx, xyy - yyy \rangle$

$\mathcal{I}_{\mathcal{B}} = \langle yxy, yyy, xxx - yxx, yxy - yyy \rangle$

Comprobación grado 2

Comprobación grado 3

Relaciones del ideal

- $\mathrm{Dim}(\mathcal{A}_1) = \mathrm{Dim}(\mathcal{B}) = 25$
- $\mathcal{H} = 1 + 2x + 4x^2 + 5x^3 + 5x^4 + 4x^5 + 3x^6 + x^7$

$$\tilde{\varphi}(xxx) \mapsto \{a^2b, a^2b, ab^2, a^3 + a^2b, ab^2\}$$
$$\tilde{\varphi}(xyx) \mapsto \{abc, a^2d, abd, a^2c + abc, abd\}$$
$$\tilde{\varphi}(xyy - yyy) \mapsto \{acd - c^2d, acd - c^2d, ad^2 - cd^2, ac^2 + bc^2 - c^3 - c^2d, bcd - cd^2\}$$

Condición grado 3 + $\tilde{\varphi}(\mathcal{I}_{\mathcal{A}}) = 0$

$$\Downarrow$$

Condición Grado + Relaciones

$$a = 0, \quad b = c \neq 0, \quad d = 0$$

Búsqueda isomorfismos

Ejemplo Isomorfismo Graduado

Ideales

$\mathcal{I}_{\mathcal{A}} = \langle xxx, xyx, xxx - xyx, xyy - yyy \rangle$

$\mathcal{I}_{\mathcal{B}} = \langle yxy, yyy, xxx - yxx, yxy - yyy \rangle$

Comprobación grado 2

Comprobación grado 3

Relaciones del ideal

- $\mathrm{Dim}(\mathcal{A}_1) = \mathrm{Dim}(\mathcal{B}) = 25$
- $\mathcal{H} = 1 + 2x + 4x^2 + 5x^3 + 5x^4 + 4x^5 + 3x^6 + x^7$

$$\tilde{\varphi}(xxx) \mapsto \{a^2b, a^2b, ab^2, a^3 + a^2b, ab^2\}$$
$$\tilde{\varphi}(xyx) \mapsto \{abc, a^2d, abd, a^2c + abc, abd\}$$
$$\tilde{\varphi}(xyy - yyy) \mapsto \{acd - c^2d, acd - c^2d, ad^2 - cd^2, ac^2 + bc^2 - c^3 - c^2d, bcd - cd^2\}$$

Condición grado 3 + $\tilde{\varphi}(\mathcal{I}_{\mathcal{A}}) = 0$

$$\Downarrow$$

Mejoras: comprobación k longitud máxima de $\mathcal{I}_{\mathcal{A}}$

Condición Grado + Relaciones

$$a = 0, \quad b = c \neq 0, \quad d = 0$$

Búsqueda isomorfismos

Ejemplo Isomorfismo Graduado

Ideales

$\mathcal{I}_{\mathcal{A}} = \langle xxx, xyx, xxx - xyx, xyy - yyy \rangle$

$\mathcal{I}_{\mathcal{B}} = \langle yxy, yyy, xxx - yxx, yxy - yyy \rangle$

Comprobación grado 2

Comprobación grado 3

Relaciones del ideal

- $\mathrm{Dim}(\mathcal{A}_1) = \mathrm{Dim}(\mathcal{B}) = 25$
- $\mathcal{H} = 1 + 2x + 4x^2 + 5x^3 + 5x^4 + 4x^5 + 3x^6 + x^7$

$$\tilde{\varphi}(xxx) \mapsto \{a^2b, a^2b, ab^2, a^3 + a^2b, ab^2\}$$
$$\tilde{\varphi}(xyx) \mapsto \{abc, a^2d, abd, a^2c + abc, abd\}$$
$$\tilde{\varphi}(xyy - yyy) \mapsto \{acd - c^2d, acd - c^2d, ad^2 - cd^2, ac^2 + bc^2 - c^3 - c^2d, bcd - cd^2\}$$

Condición grado 3 + $\tilde{\varphi}(\mathcal{I}_{\mathcal{A}}) = 0$

$$\Downarrow$$

Mejoras: comprobación k longitud máxima de $\mathcal{I}_{\mathcal{A}}$

Condición Grado Final

$$a = 0, \quad b = c \neq 0, \quad d = 0$$

Búsqueda isomorfismos

Equivalencia general–graduado

Teorema (CJL11)

$\mathcal{A} = k\langle X\rangle/\mathcal{I}, \mathcal{B} = k\langle X\rangle/\mathcal{I}'$. Si $\exists\ \varphi : \mathcal{A} \xrightarrow{\cong} \mathcal{B} \Rightarrow \tilde{\varphi} = \pi_1 \circ \varphi$ define un isomorfismo graduado entre $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$

Búsqueda isomorfismos

Equivalencia general–graduado

Teorema (CJL11)

$\mathcal{A} = k\langle X\rangle/\mathcal{I}, \mathcal{B} = k\langle X\rangle/\mathcal{I}'$. Si $\exists\ \varphi : \mathcal{A} \xrightarrow{\cong} \mathcal{B} \Rightarrow \tilde{\varphi} = \pi_1 \circ \varphi$ define un isomorfismo graduado entre $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$

$$
\begin{tikzcd}
\boxed{\text{Isomorfismo graduado}} \arrow[r, bend right, "\substack{\text{extender}\\ \text{coeficientes adecuados}}"'] & \boxed{\text{Isomorfismo general}} \arrow[l, bend right, "\substack{\text{proyectar componente}\\ \text{grado 1}}"']
\end{tikzcd}
$$

Búsqueda isomorfismos

Equivalencia general–graduado

Teorema (CJL11)

$\mathcal{A} = k\langle X\rangle/\mathcal{I}, \mathcal{B} = k\langle X\rangle/\mathcal{I}'$. Si $\exists\ \varphi : \mathcal{A} \overset{\cong}{\to} \mathcal{B} \Rightarrow \tilde{\varphi} = \pi_1 \circ \varphi$ define un isomorfismo graduado entre $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$

$$\mathcal{I}_{\mathcal{A}} = \langle xxx, yxy, yxx - yyy\rangle \qquad \mathcal{I}_{\mathcal{B}} = \langle xyx, yyy, xxx - xyy\rangle$$

Isomorfismo graduado

- 4 coeficientes

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= ax + by \\ \varphi(y) &= cx + dy \end{aligned}$$

Isomorfismo general

- 42 coeficientes

$$\begin{aligned} \varphi(x) = {} & a_1 + a_2x + a_3y + a_4xx + a_5xy + a_6yx + \\ & a_7yy + a_8xxy + a_9xyy + a_{10}yxx + \\ & a_{11}yxy + a_{12}yyx + a_{13}xyyx + a_{14}yxxy + \\ & a_{15}yxyy + a_{16}yyxx + a_{17}yyxy + a_{18}yxyyx + \\ & a_{19}yyxxy + a_{20}yyxyy + a_{21}yyxyyx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi(y) = {} & b_1 + b_2x + b_3y + b_4xx + b_5xy + b_6yx + \\ & b_7yy + b_8xxy + b_9xyy + b_{10}yxx + \\ & b_{11}yxy + b_{12}yyx + b_{13}xyyx + b_{14}yxxy + \\ & b_{15}yxyy + b_{16}yyxx + b_{17}yyxy + b_{18}yxyyx + \\ & b_{19}yyxxy + b_{20}yyxyy + b_{21}yyxyyx \end{aligned}$$

Búsqueda isomorfismos

Equivalencia general–graduado

Teorema (CJL11)

$\mathcal{A} = k\langle X\rangle/\mathcal{I}, \mathcal{B} = k\langle X\rangle/\mathcal{I}'$. Si $\exists\ \varphi : \mathcal{A} \xrightarrow{\cong} \mathcal{B} \Rightarrow \tilde{\varphi} = \pi_1 \circ \varphi$ define un isomorfismo graduado entre $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$

$$\mathcal{I}_{\mathcal{A}} = \langle xxx, yxy, yxx - yyy\rangle \qquad \mathcal{I}_{\mathcal{B}} = \langle xyx, yyy, xxx - xyy\rangle$$

Isomorfismo graduado

- 4 coeficientes
- Determinante grado 15

  $-bc^4(bc - ad)^5$

Isomorfismo general

- 42 coeficientes
- Determinante grado 76

  $-a_3^{10} b_2^{16}(a_3 b_2 - a_2 b_3)^{17}\left(b_2^2 + 2b_3^2\right)^3$

Búsqueda isomorfismos

Equivalencia general–graduado

Teorema (CJL11)

$\mathcal{A} = k\langle X\rangle/\mathcal{I}, \mathcal{B} = k\langle X\rangle/\mathcal{I}'$. Si $\exists\ \varphi : \mathcal{A} \xrightarrow{\cong} \mathcal{B} \Rightarrow \tilde{\varphi} = \pi_1 \circ \varphi$ define un isomorfismo graduado entre $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$

$$\mathcal{I}_{\mathcal{A}} = \langle xxx, yxy, yxx - yyy\rangle \qquad \mathcal{I}_{\mathcal{B}} = \langle xyx, yyy, xxx - xyy\rangle$$

Isomorfismo graduado

- 4 coeficientes
- Determinante grado 15
- 11 elementos en el ideal

$\{a^2b, ab^2, a^3 + ab^2, acd, bcd, ad^2, ac^2 + bcd, abc - c^2d, a^2d - c^2d, a^2c + b^2c - c^3 - cd^2, abd - cd^2\}$

Isomorfismo general

- 42 coeficientes
- Determinante grado 76
- 63 elementos en el ideal

$\{2a_1a_2b_1 + a_1^2b_2 - 3b_1^2b_2, a_1^2b_1 - b_1b_2^2, 2a_1a_3b_1 + a_1^2b_3 - 3b_1^2b_3, a_2^2b_1 + 2a_1a_4b_1 + 2a_1a_2b_2 - 3b_1b_2^2 + a_1^2b_4 - 3b_1^2b_4, a_2a_3b_1 + 2a_1a_5b_1 + 2a_1a_3b_2 - 3b_1b_2b_3 + a_1^2b_5 - 3b_1^2b_5, a_2a_3b_1 + 2a_1a_6b_1 + 2a_1a_2b_3 - \dots$

Búsqueda isomorfismos

Equivalencia general–graduado

Teorema (CJL11)

$\mathcal{A} = k\langle X\rangle/\mathcal{I}, \mathcal{B} = k\langle X\rangle/\mathcal{I}'$. Si $\exists\ \varphi : \mathcal{A} \overset{\cong}{\to} \mathcal{B} \Rightarrow \tilde{\varphi} = \pi_1 \circ \varphi$ define un isomorfismo graduado entre $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$

$\mathcal{I}_{\mathcal{A}} = \langle xxx, yxy, yxx - yyy\rangle$

$\mathcal{I}_{\mathcal{B}} = \langle xyx, yyy, xxx - xyy\rangle$

Isomorfismo graduado

- 4 coeficientes
- Determinante grado 15
- 11 elementos en el ideal

$a = 0 \quad b = \pm c \neq 0 \quad d = 0$

Isomorfismo general

- 42 coeficientes
- Determinante grado 76
- 63 elementos en el ideal

$a_1 = 0, b_1 = 0, a_2 = 0, (a_3 = -b_2$ ó $a_3 = b_2), b_3 = 0,$
$a_4 = 0, b_4 = 0, a_5 = 0, a_6 = 0, b_2 \neq 0,$
$a_7 = \dfrac{-a_3b_5 - a_3b_6}{b_2}, b_7 = 0, a_{10} = -a_8, b_{11} = \dfrac{b_5b_6}{b_2},$
$a_{12} = -a_{11} - a_9, a_{16} = -a_{13} - a_{14}, b_{17} = \dfrac{b_{12}b_5}{b_2}$

Búsqueda isomorfismos

Equivalencia general–graduado

Teorema (CJL11)

$\mathcal{A} = k\langle X\rangle/\mathcal{I}, \mathcal{B} = k\langle X\rangle/\mathcal{I}'$. Si $\exists\ \varphi : \mathcal{A} \xrightarrow{\cong} \mathcal{B} \Rightarrow \tilde{\varphi} = \pi_1 \circ \varphi$ define un isomorfismo graduado entre $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$

$\mathcal{I}_{\mathcal{A}} = \langle xxx, yxy, yxx - yyy\rangle$

Isomorfismo graduado

- 4 coeficientes
- Determinante grado 15
- 11 elementos en el ideal

$\Downarrow$

- Consume unos segundos

$\mathcal{I}_{\mathcal{B}} = \langle xyx, yyy, xxx - xyy\rangle$

Isomorfismo general

- 42 coeficientes
- Determinante grado 76
- 63 elementos en el ideal

$\Downarrow$

- Consume $\approx$ tres días

Estudio familias

Familia completa $(2, 3, 4)$

FAMILIA $(2, 3, 4)$

Estudio familias

Familia completa $(2,3,4)$

FAMILIA $(2,3,4)$

58905 casos $\Rightarrow$ 10142 ideales cofinitos

- 288 ideales que generan álgebras de dimensión 11
- 2446 ideales que generan álgebras de dimensión 12
- 3578 ideales que generan álgebras de dimensión 13
- 1246 ideales que generan álgebras de dimensión 14
- 2146 ideales que generan álgebras de dimensión 15
- 92 ideales que generan álgebras de dimensión 16
- 174 ideales que generan álgebras de dimensión 17
- 88 ideales que generan álgebras de dimensión 18
- 8 ideales que generan álgebras de dimensión 19
- 72 ideales que generan álgebras de dimensión 21
- 4 ideales que generan álgebras de dimensión 25

Estudio familias

Familia completa $(2,3,4)$

FAMILIA $(2,3,4)$

58905 casos $\Rightarrow$ 10142 ideales cofinitos

dimensión finita máxima $\Rightarrow$ 25

$$\mathcal{J}_1 = \langle xxx, xyx, xxx - xyx, xyy - yyy \rangle$$
$$\mathcal{J}_2 = \langle xxx, xyx, xxx - xyx, yyx - yyy \rangle$$
$$\mathcal{J}_3 = \langle yxy, yyy, xxx - xxy, yxy - yyy \rangle$$
$$\mathcal{J}_4 = \langle yxy, yyy, xxx - yxx, yxy - yyy \rangle$$

$$\mathcal{H}_{\mathcal{A}} = 1 + 2x + 4x^2 + 5x^3 + 5x^4 + 4x^5 + 3x^6 + x^7$$

Estudio familias

Familia completa $(2,3,4)$

FAMILIA $(2,3,4)$

58905 casos $\Rightarrow$ 10142 ideales cofinitos

dimensión finita máxima $\Rightarrow$ 25

dos clases de isomorfía

$$\mathcal{I}_1 = \langle xxx, xyx, xxx - xyx, xyy - yyy \rangle$$
$$\mathcal{I}_2 = \langle xxx, xyx, xxx - xyx, yyx - yyy \rangle$$
$$\mathcal{I}_3 = \langle yxy, yyy, xxx - xxy, yxy - yyy \rangle$$
$$\mathcal{I}_4 = \langle yxy, yyy, xxx - yxx, yxy - yyy \rangle$$

$$\mathcal{H}_{\mathcal{A}} = 1 + 2x + 4x^2 + 5x^3 + 5x^4 + 4x^5 + 3x^6 + x^7$$

(criterio de isomorfía graduado)

$$\Downarrow$$

$$\mathcal{A}_1 \cong \mathcal{A}_4 \qquad \mathcal{A}_2 \cong \mathcal{A}_3$$

Estudio familias

Familia completa $(2,3,4)$

FAMILIA $(2,3,4)$

58905 casos $\Rightarrow$ 10142 ideales cofinitos

dimensión finita máxima $\Rightarrow$ 25

dos clases de isomorfía

relaciones redundantes

$$\mathcal{I}_1 = \langle xxx, xyx, xxx - xyx, xyy - yyy \rangle$$
$$\mathcal{I}_2 = \langle xxx, xyx, xxx - xyx, yyx - yyy \rangle$$
$$\mathcal{I}_3 = \langle yxy, yyy, xxx - xxy, yxy - yyy \rangle$$
$$\mathcal{I}_4 = \langle yxy, yyy, xxx - yxx, yxy - yyy \rangle$$

$$\mathcal{H}_{\mathcal{A}} = 1 + 2x + 4x^2 + 5x^3 + 5x^4 + 4x^5 + 3x^6 + x^7$$

(criterio de isomorfía graduado)

$$\Downarrow$$

$$\mathcal{A}_1 \cong \mathcal{A}_4 \qquad \mathcal{A}_2 \cong \mathcal{A}_3$$

Estudio familias

Familia completa $(2,3,4)$

FAMILIA $(2,3,4)$

58905 casos $\Rightarrow$ 10142 ideales cofinitos

dimensión finita máxima $\Rightarrow$ 25

dos clases de isomorfía

relaciones redundantes

$$\mathcal{J}_1 = \langle xxx, xyx, xxx - xyx, xyy - yyy \rangle$$
$$\mathcal{J}_2 = \langle xxx, xyx, xxx - xyx, yyx - yyy \rangle$$
$$\mathcal{J}_3 = \langle yxy, yyy, xxx - xxy, yxy - yyy \rangle$$
$$\mathcal{J}_4 = \langle yxy, yyy, xxx - yxx, yxy - yyy \rangle$$

$$\mathcal{H}_{\mathcal{A}} = 1 + 2x + 4x^2 + 5x^3 + 5x^4 + 4x^5 + 3x^6 + x^7$$

(criterio de isomorfía graduado)

$$\Downarrow$$

$$\mathcal{A}_1 \cong \mathcal{A}_4 \qquad \mathcal{A}_2 \cong \mathcal{A}_3$$

PERTENECEN A $(2,3,3)$

Estudio familias

Familia completa $(2, 3, 4)$

FAMILIA $(2, 3, 4)$

58905 casos $\Rightarrow$ 10142 ideales cofinitos

dimensión finita máxima $\Rightarrow$ 25

dos clases de isomorfía

relaciones redundantes

siguiente dimensión finita máxima $\Rightarrow$ 21

- 72 casos
- dos series de Hilbert diferentes

Familia completa $(2, 3, 4)$

FAMILIA $(2, 3, 4)$

58905 casos $\Rightarrow$ 10142 ideales cofinitos

dimensión finita máxima $\Rightarrow$ 25

dos clases de isomorfía

relaciones redundantes

siguiente dimensión finita máxima $\Rightarrow$ 21

- 72 casos
- dos series de Hilbert diferentes

$$\mathcal{H}_{\mathcal{A}} = 1 + 2x + 4x^3 + 4x^3 + 4x^4 + 3x^5 + 2x^6 + x^7$$

$$\mathcal{H}_{\mathcal{B}} = 1 + 2x + 4x^2 + 5x^3 + 5x^4 + 3x^5 + x^6$$

Estudio familias

Familia completa $(2, 3, 4)$

FAMILIA $(2, 3, 4)$

58905 casos $\Rightarrow$ 10142 ideales cofinitos

dimensión finita máxima $\Rightarrow$ 25

dos clases de isomorfía

relaciones redundantes

siguiente dimensión finita máxima $\Rightarrow$ 21

- 72 casos
- dos series de Hilbert diferentes

$$\mathcal{H}_{\mathcal{A}} = 1 + 2x + 4x^3 + 4x^3 + 4x^4 + 3x^5 + 2x^6 + x^7$$

$$\mathcal{H}_{\mathcal{B}} = 1 + 2x + 4x^2 + 5x^3 + 5x^4 + 3x^5 + x^6$$

Clase $\mathcal{A}$	Clase $\mathcal{B}$
64 casos	8 casos

Estudio familias

Familia completa $(2,3,4)$

FAMILIA $(2,3,4)$

58905 casos $\Rightarrow$ 10142 ideales cofinitos

dimensión finita máxima $\Rightarrow$ 25

dos clases de isomorfía

relaciones redundantes

siguiente dimensión finita máxima $\Rightarrow$ 21

- 72 casos
- dos series de Hilbert diferentes

$$\mathcal{H}_{\mathcal{A}} = 1 + 2x + 4x^3 + 4x^3 + 4x^4 + 3x^5 + 2x^6 + x^7$$
$$\mathcal{H}_{\mathcal{B}} = 1 + 2x + 4x^2 + 5x^3 + 5x^4 + 3x^5 + x^6$$

Clase $\mathcal{A}$	Clase $\mathcal{B}$
64 casos	8 casos

Clase $\mathcal{B} \Rightarrow$ redundantes $\rightsquigarrow (2,3,3)$

Estudio familias

Familia completa $(2,3,4)$

FAMILIA $(2,3,4)$

58905 casos $\Rightarrow$ 10142 ideales cofinitos

dimensión finita máxima $\Rightarrow$ 25

dos clases de isomorfía

relaciones redundantes

siguiente dimensión finita máxima $\Rightarrow$ 21

- 72 casos
- dos series de Hilbert diferentes

$$\mathcal{H}_{\mathcal{A}} = 1 + 2x + 4x^3 + 4x^3 + 4x^4 + 3x^5 + 2x^6 + x^7$$
$$\mathcal{H}_{\mathcal{B}} = 1 + 2x + 4x^2 + 5x^3 + 5x^4 + 3x^5 + x^6$$

Clase $\mathcal{A}$	Clase $\mathcal{B}$
64 casos	8 casos

Clase $\mathcal{B} \Rightarrow$ redundantes $\rightsquigarrow (2,3,3)$

Clase $\mathcal{A} \Rightarrow$ 4 tipos según base Gröbner-Shirshov

Estudio familias

Familia completa $(2,3,4)$

FAMILIA $(2,3,4)$

58905 casos $\Rightarrow$ 10142 ideales cofinitos

dimensión finita máxima $\Rightarrow$ 25

- dos clases de isomorfía
- relaciones redundantes

siguiente dimensión finita máxima $\Rightarrow$ 21

- dos clases de isomorfía

- 72 casos
- dos series de Hilbert diferentes

$$\mathcal{H}_{\mathcal{A}} = 1 + 2x + 4x^3 + 4x^3 + 4x^4 + 3x^5 + 2x^6 + x^7$$
$$\mathcal{H}_{\mathcal{B}} = 1 + 2x + 4x^2 + 5x^3 + 5x^4 + 3x^5 + x^6$$

Clase $\mathcal{A}$	Clase $\mathcal{B}$
64 casos	8 casos

Clase $\mathcal{B} \Rightarrow$ redundantes $\rightsquigarrow (2,3,3)$

Clase $\mathcal{A} \Rightarrow$ 4 tipos según base Gröbner-Shirshov

$$\Downarrow$$

2 clases de isomorfía con 32 elementos cada una

Estudio familias

Más ejemplos de familias 2 variables

Características Familias

Estudio familias

Más ejemplos de familias 2 variables

Características Familias

$\langle xxx, xyx, yyy, xxx - xyx, xxy - yxy \rangle$
$\langle xxx, xyx, yyy, xxx - xyx, yxx - yxy \rangle$
$\langle xxx, xyx, yyy, xxx - yyy, xxy - yxy \rangle$
$\ldots$

Familia $(2, 3, 5)$

- 376992 casos
- 123780 cofinitos
- dim máx 21
  - 60 casos
  - 2 clases eq

Estudio familias

Más ejemplos de familias 2 variables

Características Familias

Familia $(2, 4, 3)$

- 410040 casos
- 0 cofinitos

Familia $(2, 3, 5)$

- 376992 casos
- 123780 cofinitos
- dim máx 21
  - 60 casos
  - 2 clases eq

Estudio familias

Más ejemplos de familias 2 variables

Características Familias

Familia $(2,3,5)$

- 376992 casos
- 123780 cofinitos
- dim máx 21
  - 60 casos
  - 2 clases eq

Familia $(2,4,3)$

- 410040 casos
- 0 cofinitos

Familia $(2,4,4)$

- 13633830 casos
- muchísimos cofinitos
- dim máx 324
  - 4 casos

$\langle xxxx, xxyx-xyxy, xxyy-yxyy, xyyy-yyyy\rangle$
$\langle xxxx, xyxx-yxyx, yyxx-yyyx, yyyx-yyyy\rangle$
$\langle yyyy, xxxx-xxxy, xxyx-xxyy, xyxy-yxyy\rangle$
$\langle yyyy, xxxx-yxxx, xyxx-yyxx, yxyx-yyxy\rangle$

Estudio familias

Familias 3 variables

Características Familias

Estudio familias

Familias 3 variables

Características Familias

Familia $(3, 2, 3)$

- 14190 casos
- 0 cofinitos

Estudio familias

Familias 3 variables

Características Familias

Familia $(3, 2, 3)$

- 14190 casos
- 0 cofinitos

Familia $(3, 2, 4)$

- 148995 casos
- 2196 cofinitos
- dim máx 24
  - 72 casos
  - 2 clases de eq

$xx, xy, xz - zz, yy - yz$
$xx, xz, xy - yy, zy - zz$
$xx, yx, yy - zy, zx - zz$
$\dots$

Estudio familias

Familias 3 variables

Características Familias

Familia $(3, 2, 3)$

- 14190 casos
- 0 cofinitos

Familia $(3, 2, 4)$

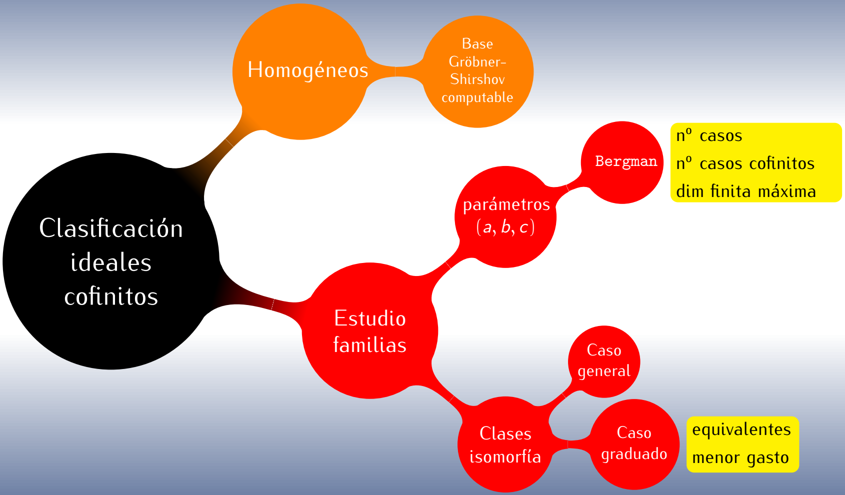
- 148995 casos
- 2196 cofinitos
- dim máx 24
  - 72 casos
  - 2 clases de eq

Familia $(3, 3, 3)$

- 8930376 casos
- muy complicada computacionalmente

Resumen

Proceso seguido



Referencias

Cortadellas O, Jara P. and Lobillo F. J
A graded criterion in the classification of cofinite homogeneous ideals, preprint, 2011

Cortadellas O, Navarro G. and López Peña J,
Factorization structures with a two-dimensional factor, Journal of the London Mathematical Society 81 (2010), 1-23

Jara P, López Peña J, Navarro G. and Stefan D,
On the classification of twisting maps between k^n and k^m, Algebras and representation theory, 2011

Cibils C,
Non-commutative duplicates of finite sets, J. Algebra Appl 5 (2006), 361?377

Shirayanagi, K,
A classification of finite-dimensional monomial algebras, Effective Methods in Algebraic Geometry, vol. 94, 1991, pp. 469?482

Shirayanagi, K,
Decision of algebra isomorphisms using Gröbner bases, Computational Algebraic Geometry, 1993

- Programa Bergman
`http://servus.math.su.se/bergman/`

Métodos Computacionales y Álgebras de Dimensión Finita
Oscar Cortadellas Izquierdo
Universidad de Granada
Departamento de Álgebra
Tesis doctoral dirigida por
Directores
Pascual Jara Martínez
Francisco Javier Lobillo Borrero
Motivación
Situando el problema
Caracterización entrelazamientos
Duplicados cuánticos álgebras finitas
Objetivo
Entrelazamientos
Productos tensores torcidos
Segunda parte de $k[L] \otimes_\tau l$
Teorema clasificación
Iniciación
¿Cuándo $k\langle X\rangle/\mathcal{I}$ es finito?
Homogeneidad
El Programa Bergman
Flujo del programa
Ejemplo del programa (2 variables)
Criterio de isomorfía (Shirayanagi)
Criterio de isomorfía graduado
Ejemplo Isomorfismo Graduado
Equivalencia general-graduado
Estudio completo familia (2, 3, 4)
Más ejemplos de familias 2 variables
Familias 3 variables
Proceso seguido
Referencias