Relación de problemas 6

Variable Aleatoria

1. Consideremos el experimento aleatorio consistente en lanzar dos dados equilibrados y observar el número máximo de los dos números obtenidos en ellos. Si X es la variable aleatoria asociada a ese experimento, hallar:

   a) La función masa de probabilidad de la variable aleatoria X.

   b) La función de distribución de la variable aleatoria X.

   c) $F(2{,}5)$.

   d) $P[2 \leq X \leq 4]$.

   e) La esperanza y la varianza.

2. Al lanzar dos dados, consideramos la suma de sus resultados. Sea X la variable aleatoria asociada a este experimento aleatorio. Hallar:

   a) La función masa de probabilidad.

   b) La función de distribución. Representarla gráficamente.

   c) $P[3 \leq X \leq 7]$.

   d) $P[3 < X < 7]$.

   e) Esperanza de la variable aleatoria.

   f) Calcular la esperanza del doble de la suma de los resultados de los dados.

   g) Calcular la esperanza de la mitad de la suma de los resultados de los dados.

   h) Calcular la esperanza de la variable $Y = X^2 + 3X + 7$.

3. Se lanzan tres monedas al aire. Sea la variable aleatoria X=*número de caras obtenidas*. Se pide:

   a) Obtener la función masa de probabilidad de la variable X.

   b) Obtener la función de distribución de la variable X y representarla gráficamente.

   c) Calcular la esperanza matemática de la variable.

   d) Calcular la varianza de X.

   e) Calcular la probabilidad de que el número de caras observadas sea a lo sumo dos.

   f) Calcular la probabilidad de que el número de caras observadas sea al menos dos.

   g) Calcular la probabilidad de que no se observe ninguna cara.

4. Sea X una variable aleatoria discreta que tiene como función masa de probabilidad

$$P[X = x] = \frac{1}{10}, \qquad x = 2, 3, \cdots, 11$$

Se pide:

a) Calcular la función de distribución.

b) Calcular $P[X > 7]$.

c) Calcular $P[X \leq 5]$.

d) Calcular $P[3 < X \leq 8]$.

5. Sea X una variable aleatoria con la siguiente función de densidad:

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < 1 \\ k - x, & 1 \leq x < 2 \\ 0, & \text{en el resto de casos} \end{cases}$$

Calcular:

a) El valor de la constante k.

b) La función de distribución.

c) La media de la distribución.

6. La variable aleatoria X representa el tiempo en minutos que transcurre entre dos llegadas consecutivas a una tienda y su función de densidad de probabilidad está dada por:

$$f(x) = \begin{cases} k \exp(\frac{-x}{2}), & x > 0 \\ 0, & \text{en el resto de casos} \end{cases}$$

Determinar:

a) El valor de k.

b) La función de distribución.

c) La probabilidad de que el tiempo entre dos llegadas consecutivas se encuentre entre 2 y 6 minutos.

d) La probabilidad de que transcurran menos de 8 minutos entre 2 llegadas consecutivas.

e) La probabilidad de que el tiempo entre 2 llegadas consecutivas exceda los 8 minutos.

7. La variable aleatoria que representa la proporción de accidentes automovilísticos fatales en Estados Unidos tiene la siguiente función de densidad:

$$f(x) = \begin{cases} 42x(1-x)^5, & 0 < x \leq 1 \\ 0, & \text{en el resto de casos} \end{cases}$$

a) Demostrar que f es una función de densidad.

b) Calcular $f(\frac{1}{4})$.

c) Calcular la función de distribución.

d) Calcular $P[X \leq 0{,}25]$.

8. Sea X una variable aleatoria continua con función de densidad:

$$f(x) = \begin{cases} kx, & 0 < x \leq 2 \\ 0, & \text{en el resto de casos} \end{cases}$$

   a) Calcular k.
   b) Calcular la función de distribución.
   c) $P[X \leq 1{,}2]$.
   d) $P[0{,}8 \leq X]$.
   e) $P[1 \leq X \leq 1{,}5]$.
   f) Calcular la esperanza y la varianza de X.

9. Se considera la variable aleatoria X con función de distribución:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 2 \\ \frac{(x-2)^3}{8}, & 2 < x < 4 \\ 1, & 4 \leq x \end{cases}$$

   a) Calcular la función de densidad.
   b) Calcular $P[3 \leq X]$, $P[1 < X < 3]$, $P[X < 3]$ y $P[X > 4]$.

10. Sea X una variable aleatoria con función de densidad definida de la forma:

$$f(x) = \begin{cases} kx^2(1 - x^3), & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{en el resto de casos} \end{cases}$$

    Calcular la función de distribución.

11. Sea X la duración en segundos de un tipo de circuitos. X puede tomar todos los valores comprendidos entre 0 y $+\infty$. Supongamos que la función de densidad de X es:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{a}{x^2}, & 100 < x < 1000 \\ 0, & \text{en el resto de casos} \end{cases}$$

    a) Calcular el valor de a para que f sea una función de densidad.
    b) Calcular la probabilidad de que un circuito dure exactamente 200 segundos.
    c) Calcular la esperanza de X.
    d) Calcular $P[200 < X < 300]$.
    e) Calcular $P[200 \leq X \leq 300]$.

12. Sea X una variable aleatoria cuya función de distribución viene dada por:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 1 - e^{-x}, & 0 < x \end{cases}$$

    a) Obtener la función de densidad.
    b) $P[2 < X < 8]$.
    c) $P[1 < X < 4]$.
    d) $P[X \leq 3]$.

13. Una variable tiene como función de densidad de probabilidad:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{(7+x)}{k}, & -7 < x \leq 0 \\ \frac{(7-x)}{k}, & 0 < x \leq 7 \\ 0, & \text{en el resto de casos} \end{cases}$$

Determinar:

a) El valor de k.

b) La función de distribución.

c) $P[X > 0]$.

d) $P[X \leq 1]$.

14. Decidir razonadamente cuáles de las siguientes funciones son de distribución:

a) $F(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} & x < 2 \\ \frac{2}{3} & 2 \leq x < 3 \\ 1 & 3 \leq x \end{cases}$

b) $F(x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ \frac{1}{4} & 1 \leq x \leq 2 \\ \frac{3}{5} & 2 < x < 3 \\ 1 & 3 \leq x \end{cases}$

c) $F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{1}{2} & 0 \leq x \leq 3 \\ \frac{2}{5} & 3 < x < 6 \\ 1 & 6 \leq x \end{cases}$

En caso afirmativo, decidir si corresponden a variables aleatorias discretas o continuas, justificando la respuesta.

15. Dada la función de probabilidad:

$$P[X = i] = ki \qquad i = 1, 2, ..., 20$$

Calcular:

a) $P[X = 4]$.

b) $P[3 \leq X \leq 10]$.

c) Esperanza de X.

16. Una variable tiene como función de densidad:

$$f(x) = \begin{cases} a \exp(-3x) & x > 0 \\ 0 & \end{cases}$$

Determinar:

a) $F(x)$.

b) $P[1 < X < 2]$.

c) $P[2 \leq X]$.

d) $P[0{,}5 \leq X \leq 1]$.

e) $P[3 > X]$.

17. Dada la función:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x^2, & 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ 1 - 3(x - x^2), & \frac{1}{2} \leq x < 1 \\ 1, & 1 \leq x \end{cases}$$

Se pide:

a) Calcular la función de densidad de la variable aleatoria asociada.

b) $P[X > 0{,}75]$.

c) $P[0{,}25 < X < 0{,}75]$.

d) Comprobar que F es una función de distribución.

18. Dada una variable aleatoria X con función de distribución:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ x^n, & 0 < x < 1 \\ 1, & x \geq 1 \end{cases}$$

a) Calcular la función de densidad.

b) Calcular la media y la varianza de X.

19. La variable aleatoria X tiene la siguiente función de densidad:

$$f(x) = \begin{cases} mx & 0 < x < 2 \\ 1 - mx & 2 \leq x < 4 \\ 0 & \end{cases}$$

Se pide:

a) Hallar m y determinar la función de distribución.

b) Hallar $E[X]$ y $Var[X]$.

20. Dada X una variable aleatoria con función de densidad:

$$f(x) = k \exp\left(-|x|\right) \qquad -\infty < x < \infty$$

Determinar

a) El valor de k.

b) La función de distribución.

c) $P[-1 < X < 1]$ y $P[X \geq 2]$.