

Universidad de Granada
Departamento de Estadística e I.O.



Aportaciones al estudio del proceso de
difusión lognormal: Bandas de confianza
aproximadas y generalizadas. Estudio del
caso polinómico

Tesis Doctoral

Nuria Rico Castro
Granada. 2005

Universidad de Granada
Departamento de Estadística e I.O.



Aportaciones al estudio del proceso de
difusión lognormal: Bandas de confianza
aproximadas y generalizadas. Estudio del
caso polinómico

Tesis Doctoral

Nuria Rico Castro
Granada. 2005

Nuria Rico Castro

**Aportaciones al estudio del proceso de
difusión lognormal: Bandas de confianza
aproximadas y generalizadas. Estudio del
caso polinómico**

Tesis Doctoral presentada por Nuria Rico Castro para optar al grado de Doctor por la
Universidad de Granada.

Fdo. Nuria Rico Castro

Vº Bº
Directores de Tesis

Fdo. Dra. Dña. Patricia Román Román

Fdo. Dr. D. Francisco de Asís Torres Ruiz

Quisiera expresar mi más sincero agradecimiento a los directores de este trabajo, Dña. Patricia Román Román y D. Francisco Torres Ruiz, sin quienes la realización de este trabajo nunca hubiera sido posible y cuya dedicación y apoyo constantes a lo largo de los últimos años han sido tan valiosos que no pueden ser estimados como corresponde.

Asimismo me gustaría agradecer el esfuerzo de todos aquellos que me han apoyado en el proceso de elaboración de esta memoria, mis compañeros y amigos y en especial la ayuda prestada en todo este tiempo por el Director del Departamento de Estadística e I.O., D. Ramón Gutiérrez Jáimez.

No puedo olvidar en estos agradecimientos a mi familia. Gracias a mis hermanos Jaime, Pilar, Javier y Luis, a mis padres Luis y Encarna y a mi marido Juanfran por estar siempre a mi lado.

Índice

Introducción	1
1. El proceso de difusión lognormal	9
1.1. Definición de proceso de difusión	9
1.1.1. Proceso de difusión lognormal no homogéneo o con factores exógenos	12
1.2. Obtención del proceso de difusión lognormal	13
1.2.1. Obtención a partir de esquemas discretos	14
1.2.2. Obtención a partir de modelos discretos de crecimiento	18
1.2.3. Obtención a partir de modelos continuos de crecimiento	23
1.3. Características del proceso	24
1.3.1. Obtención de la función de densidad de transición	24
1.3.2. Distribuciones finito-dimensionales	26
1.3.3. Momentos	28
1.3.4. Funciones media y covarianza	29
1.3.5. Otras funciones de interés	31
1.4. Estimación de los parámetros y funciones paramétricas	32
1.4.1. Planteamiento del problema. Notación	32
1.4.2. Estimación máximo verosímil de \mathbf{a} y σ^2	34
1.4.3. Estimación máximo verosímil (EMV) de ciertas funciones paramétricas	36
1.4.4. Distribución del EMV de las funciones θ	36
1.4.5. Error cuadrático medio del EMV de las funciones paramétricas . . .	38
1.4.6. Estimación insesgada (UMVUE) de las funciones paramétricas . . .	40
1.4.7. Eficiencia relativa del EMV respecto al UMVUE para las funciones θ	42
1.4.8. Eficiencia relativa del EMV respecto al UMVUE para las funciones θ^*	44
1.5. Bandas de confianza para las funciones media y moda	44
2. Bandas de confianza aproximadas y generalizada para las funciones media y moda del proceso lognormal	49
2.1. Introducción	49
2.1.1. Caso de la distribución lognormal	51
2.2. Caso del proceso de difusión lognormal homogéneo	55

2.2.1. Bandas de confianza aproximadas	57
2.2.2. Banda de confianza generalizada	61
2.2.3. Estudio comparativo	62
2.3. Caso del proceso lognormal no homogéneo	70
2.3.1. Bandas aproximadas	72
2.3.2. Banda generalizada	74
2.3.3. Estudio comparativo. Consideraciones generales	74
3. Proceso lognormal con factores exógenos de tipo polinómico	87
3.1. Planteamiento del modelo	88
3.2. Estimación MV de los parámetros del modelo. Expresiones recursivas . . .	89
3.3. Estimación de funciones paramétricas. Expresiones recursivas	91
3.4. Bandas de confianza	95
3.5. Aplicación: Emisiones de metano	96
Anexo 1	109
Estudio de la dependencia de la probabilidad de cobertura en el tiempo para las bandas de confianza en el proceso lognormal no homogéneo. Un caso particular	109
Bibliografía	113

Introducción

La distribución lognormal, como es bien conocido, se define como la distribución de una variable cuyo logaritmo sigue una ley normal, por lo que, obviamente, es una variable necesariamente positiva. Esta distribución ha sido ampliamente estudiada, sobre todo desde el punto de vista aplicado para ajustar datos reales. Ello es así puesto que hay muchas variables en el *mundo real* que son inherentemente positivas, tales como el tamaño de poblaciones en biología, cantidad de precipitaciones en meteorología, emisiones de gases en ciencias medioambientales, en demografía la edad media de la mujer cuando tiene el primer hijo, Producto Interior Bruto u otras variables de este tipo en economía, etc.

Aunque los ejemplos de aplicación anteriores ya justifican suficientemente la necesidad de estudiar esta distribución, hay también aportaciones desde el punto de vista teórico que reafirman su importancia. En este sentido podemos citar la obtención de la ley por parte de Gibrat [14] mediante lo que él llamó la *ley de los efectos proporcionales*, o bien la obtención por parte de Kolmogorov [36] mediante la denominada *ley de las particiones sucesivas*. Aitchison y Brown [1] publicaron en 1957 una monografía en la que aparece unificada toda la teoría hasta entonces existente sobre esta distribución, comenzando con la génesis de la ley y abordando posteriormente los problemas de estimación puntual y por intervalos, finalizando con una visión sobre campos de aplicación. Johnson y Kotz [35] en 1970 actualizan y amplían este estudio incluyendo el caso triparamétrico. Desde la publicación de esas dos monografías se ha producido un gran avance tanto en lo que se refiere a la teoría sobre esta distribución como en el campo de las aplicaciones, el cual se ha ampliado de forma considerable, lo cual ya fue predicho por Johnson y Kotz en 1970 cuando dijeron *es muy probable que la distribución lognormal sea una de las distribuciones más ampliamente usadas en los trabajos estadísticos aplicados en los próximos años*. En esta línea Crow y Shimizu [13] publican una nueva monografía en 1988 donde se vuelven a compendiar todos los conocimientos sobre la distribución así como los avances obtenidos hasta esa fecha, destacando la estimación insesgada de ciertas funciones paramétricas (Shimizu e Iwase [53]), contrastes de hipótesis que permiten la construcción de intervalos de confianza exactos para ciertas combinaciones lineales de los parámetros (Land, [38]), estimación mediante muestreo censurado, estimación bayesiana y volviendo a revisar los nuevos campos de aplicación de la distribución.

Con respecto al estudio inferencial sobre la media de la distribución lognormal, hay que destacar los trabajos de Land [39], Angus [2], [3], Zhou y Gao [61] y Lefante y Shah [42]

sobre la obtención y comparación de intervalos de confianza aproximados y, más recientemente, el de Krishnamoorthy y Mathew [37] sobre intervalos de confianza generalizados. Estos trabajos surgen motivados por las dificultades computacionales que presenta el cálculo de los intervalos exactos de Land en la práctica.

Volviendo al campo de las aplicaciones, a la vista de algunos de los ejemplos considerados, podemos observar cómo las variables objeto de interés no son estáticas sino dinámicas en el sentido de que evolucionan según un índice (habitualmente el tiempo) mostrando, además, un comportamiento de tipo exponencial (por ejemplo el Producto Interior Bruto). Por esta razón, la obtención de modelos que expliquen este tipo de comportamiento ha sido objeto de amplio estudio. En este sentido, Malthus [45] propone, a finales del siglo XVIII, un modelo determinístico de crecimiento para la población humana que corresponde a una curva de crecimiento de tipo exponencial. Se ha comprobado a lo largo de los dos siglos siguientes a Malthus que su teoría no es aplicable a poblaciones humanas, apuntándose un gran número de razones para ello, pero lo cierto es que el modelo que se deriva de su teoría se puede aplicar, en general, al crecimiento de especies que se reproducen en un entorno donde no existen depredadores y hay exceso de alimentos.

El problema que se plantea a la hora de utilizar modelos determinísticos para modelizar cualquier fenómeno, y en particular el crecimiento, es la complejidad propia del fenómeno, implicando la necesidad de la especificación detallada de múltiples factores que no siempre son conocidos o cuantificables. Este inconveniente se puede evitar mediante la utilización de modelos estocásticos como por ejemplo, procesos de nacimiento y muerte o procesos de difusión, los cuales han sido extensamente usados para la modelización y estudio de determinados fenómenos dinámicos en diversos campos de aplicación dentro del ámbito del crecimiento.

La consideración de modelos aleatorios para modelizar fenómenos en los cuales estén implicadas variables aleatorias que evolucionan en el tiempo y que exhiban tendencias de tipo exponencial, y el hecho de que la media de una distribución lognormal venga expresada de forma exponencial, nos hace pensar en la relación que esta distribución debe tener con las variables involucradas en tales modelos.

Así, Capocelli y Ricciardi [9] y [10], consideran la ecuación diferencial determinística del modelo malthusiano y la modifican reemplazando la tasa de crecimiento por la suma de un término constante y un proceso Gaussiano delta-correlado de media cero con densidad espectral σ^2 (ruido blanco). De esta forma se obtiene una ecuación diferencial estocástica cuya solución, bajo condiciones iniciales adecuadas, es un proceso de difusión cuyas distribuciones finito-dimensionales y transiciones siguen leyes lognormales, cuya función media es exponencial y que se conoce como proceso de difusión lognormal. No obstante, esta no es la única forma de introducir dicho proceso. Por ejemplo, Ricciardi [50] parte de la discretización del modelo determinístico malthusiano y, aleatorizándolo, obtiene un modelo estocástico discreto de crecimiento de poblaciones cuyo límite, cuando el intervalo de tiempo entre las sucesivas generaciones se hace tender a cero, es el proceso de difusión lognormal.

Este proceso ha sido estudiado en muy distintos campos científicos, como la ecología, pudiendo citar a Capocelli y Ricciardi [9], quienes lo estudian como modelo de crecimiento de poblaciones. Las aplicaciones del proceso de difusión lognormal en economía y otros campos afines, como el marketing son también numerosas. Cox y Ross [12] y Merton [47] han realizado importantes contribuciones en este sentido. Marcus y Shaked [46] confirman la importancia del modelo de difusión lognormal en el campo de la economía y las finanzas y Cox y Ross atribuyen al proceso de difusión lognormal el papel de *workhorse* en la literatura sobre la opción de fijación de precios. Por ejemplo, el proceso aparece asociado al modelo de Black y Scholes [8]. Asimismo, ha sido extensamente utilizado en este ámbito por Tintner y Sengupta [57], quienes ponen de relieve su adecuación para la modelización en economía así como el interés especial que despierta este proceso para realizar predicciones. Recientemente, Basel y otros [6] han estudiado la serie del Índice de Precios de Consumo (I.P.C.) en Estados Unidos, obteniendo que el proceso de difusión lognormal es, frente a otro tipo de modelos como los autorregresivos, preferible desde el punto de vista de obtener mejores predicciones de forma sencilla.

No obstante, hay que notar que en estos estudios el proceso que se considera es homogéneo, esto es, sus momentos infinitesimales dependen solamente del espacio de estados, lo cual significa que las posibles influencias existentes sobre la variable objeto de estudio son funciones de ella misma. Este hecho restringe el ámbito de aplicación y, sobre todo, la posibilidad de introducir información ajena a la variable de interés, lo cual se pone de manifiesto en múltiples aplicaciones donde se observan desviaciones de los datos en estudio respecto de la tendencia del proceso homogéneo. Por ejemplo, el gráfico 1 representa los valores del Producto Interior Bruto en España entre 1970 y 2002, mostrando claramente la situación comentada. Por lo tanto se hace necesario la consideración de influencias ajenas a la variable modelizada por el proceso (variable endógena), dando origen a los factores exógenos, que serán variables que influyen sobre la endógena y cuya evolución en el tiempo es conocida. De esta forma, la inclusión de estas funciones temporales en la media infinitesimal del proceso permite, por una parte, un mejor ajuste y, por otra, un control externo sobre el comportamiento de la variable regida por el proceso. El empleo de factores exógenos en el ámbito de los procesos de difusión fue propuesto por Tintner y Sengupta [57], aplicándolo a la descripción, predicción y análisis de políticas de crecimiento en materias económicas.

Una de las cuestiones de interés acerca del proceso de difusión lognormal con factores exógenos, que ha sido objeto de numerosos estudios en los últimos años, es la inferencia, cuestión que puede ser abordada empleando tanto muestreo continuo (Basawa y Rao [5], Gutiérrez y otros [16]), considerando la difusión como solución de ciertas ecuaciones diferenciales estocásticas, como muestreo discreto de las trayectorias basándose en la función de verosimilitud de la muestra construida a partir de la densidad de transición de la difusión. La inferencia por muestreo discreto fue tratada por Tintner y Gómez [56] y Gutiérrez y otros [17], pero abordando el caso unidimensional y con la introducción de dos factores. La generalización, tanto a más factores como al caso de la difusión en su versión

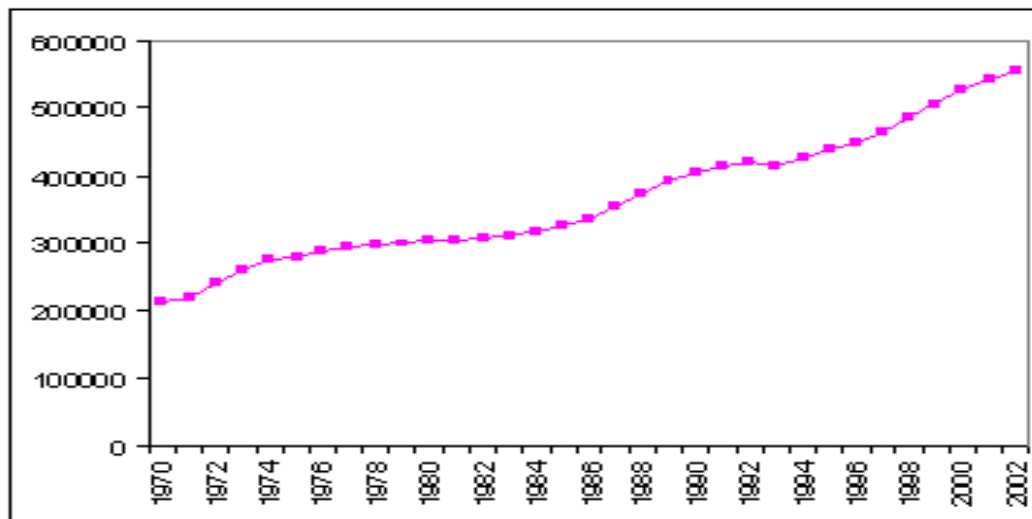


Gráfico 1: Producto Interior Bruto en España entre 1970 y 1997.

multivariante, tratando la estimación máximo verosímil de los parámetros y contrastes de significación de los factores exógenos, ha sido considerada por Gutiérrez y otros [18], [20] y Torres, [58]. Otras cuestiones de interés han sido el estudio teórico de la distribución de la tendencia y función de covarianza estimada del proceso en su versión univariante, tanto en el caso de la estimación máximo verosímil como en el caso de la estimación insesgada de mínima varianza y su aplicación en el campo económico (ver Gutiérrez y otros en [25] y [26]). El interés por la estimación de estas funciones, así como por las funciones moda y de cuantiles, y sus versiones condicionadas [31], viene justificado por su utilidad en predicción. En este sentido se ha profundizado no sólo en la estimación puntual de tales funciones sino en la estimación por intervalos, lo cual ha conducido a la construcción de bandas de confianza exactas para las funciones media y moda (ver, por ejemplo el trabajo de Gutiérrez y otros en [31]), extendiendo los trabajos de Land [38] y [41], en el ámbito de la distribución lognormal. No obstante, el empleo de este tipo de bandas implica, como ocurre en el caso de la distribución, el cálculo de valores críticos difíciles de obtener, por lo que se hace necesario profundizar en la obtención de procedimientos aproximados.

Por otra parte, es importante notar que para la estimación de los parámetros del modelo, así como de las funciones paramétricas citadas anteriormente, no es necesario disponer de la forma funcional exacta de los factores exógenos sino que basta con disponer del valor de sus integrales entre dos instantes de tiempo consecutivos. Sin embargo, hay otras situaciones en las que sí es fundamental tener dicha forma funcional, como ocurre cuando se consideran problemas de tiempo de primer paso (Gutiérrez y otros, [19]). Por lo tanto es necesario disponer de procedimientos que puedan permitir aproximar la forma de los factores exógenos para lo cual, evidentemente, se debe disponer de algún tipo de información sobre ellos. Ese es el caso del ejemplo tratado por Gutiérrez y otros en [23], donde se

considera el estudio del Producto Interior Bruto en España, tanto desde el punto de vista de la estimación del modelo como del de cálculo de tiempos de primer paso por barreras constantes. La solución en dicho caso la proporciona la propia naturaleza de la variable, *buscando* posibles influencias externas entre las componentes de la Demanda Nacional y construyendo, a partir de ellas, funciones poligonales que constituirán los factores exógenos al proceso. Sin embargo, pueden presentarse situaciones en las cuales se sospeche que existen influencias externas a la variable endógena y no se disponga de ninguna información sobre ellas.

Así, el **objetivo fundamental de esta memoria**, estructurada en tres capítulos, es responder a las dos cuestiones que han quedado en el aire en los comentarios anteriores, esto es:

- construcción de bandas de confianza aproximadas y generalizadas para las funciones media y moda (y sus versiones condicionadas) para el proceso de difusión lognormal con factores exógenos,
- plantear un proceso de difusión lognormal con factores exógenos de tipo polinómico que permita resolver el problema de la no disponibilidad de información externa a la variable endógena en situaciones en las que se infiere que debe haberla,

que constituyen las aportaciones originales de esta memoria y que forman los núcleos centrales de los Capítulos 2 y 3, respectivamente.

En el **capítulo primero** se hace un resumen de los resultados existentes en la literatura sobre el proceso de difusión lognormal unidimensional con factores exógenos (un desarrollo más detallado puede verse en el trabajo de Rico [51]). Tras definir el proceso a través de sus momentos infinitesimales, se propone la obtención del mismo según tres técnicas diferentes. Las dos primeras tienen en común el partir de esquemas discretos concretos y, mediante un procedimiento de paso al límite, obtener el proceso de difusión lognormal con factores exógenos, bien calculando sus momentos infinitesimales o bien sus ecuaciones de difusión (una generalización a procesos no homogéneos puede contemplarse en Gutiérrez, Rico y otros, [28],[29]). La tercera forma es una modificación del planteamiento de Capocelli y Ricciardi [9] y [10] al considerar la ecuación diferencial determinística del modelo malthusiano y aleatorizarla. De esta forma se obtiene una ecuación diferencial estocástica cuya solución proporciona el proceso buscado.

Posteriormente se realiza la descripción del proceso de difusión lognormal no homogéneo a partir de sus características más relevantes, esto es, la función de densidad de transición, distribuciones finito-dimensionales, momentos y funciones media, covarianza, moda y de cuantiles así como las versiones condicionadas de las funciones media, moda y de cuantiles, las cuales se expresan como caso particular de ciertas funciones paramétricas. A continuación se resume el proceso de estimación de los parámetros del modelo por máxima verosimilitud partiendo de un muestreo discreto de las trayectorias, así como la estimación de las funciones paramétricas citadas, incluyendo la estimación máximo verosímil e insesgada de mínima varianza. Se concluye el capítulo con la descripción del procedimiento de

construcción de bandas de confianza exactas para las funciones media y moda así como para sus versiones condicionadas.

En el **segundo capítulo** se extienden los resultados existentes sobre métodos de construcción de intervalos de confianza aproximados y generalizados para la función media de la distribución lognormal, así como la propuesta de un nuevo método aproximado en ese contexto, a las funciones media y moda del proceso lognormal. Para ello se comienza con una breve revisión de los resultados relativos a la distribución y, a continuación, se consideran por separado los casos homogéneo y no homogéneo del proceso lognormal, obteniendo bandas de confianza aproximadas y generalizada para las funciones mencionadas.

El hecho de realizar un estudio separado es debido a que, a pesar de que las bandas obtenidas son similares en cuanto a su construcción, la aplicación en cada caso plantea particularidades propias, como por ejemplo, la dependencia o no en el tiempo de las probabilidades de cobertura de los intervalos de confianza que constituyen las bandas. En cada caso, se analizan tales particularidades y se realizan estudios de simulación que permiten comparar las diversas bandas construidas.

Dado que en el caso no homogéneo estos estudios dependen de los factores que determinan el proceso, se realizan otros estudios en dos modelos concretos: un modelo teórico con factores exógenos funcionalmente conocidos y un modelo de difusión lognormal introducido por Gutiérrez y otros [23] para modelizar el Producto Interior Bruto en España.

En el **tercer capítulo** abordamos la problemática planteada cuando no hay información sobre influencias ajenas al proceso y, sin embargo, se tienen sospechas de su existencia. Presentamos una aproximación para este tipo de casos mediante el empleo de factores exógenos polinómicos.

En primer lugar se aborda nuevamente el problema de estimación de los parámetros del modelo. La razón para ello es obtener expresiones recursivas para los estimadores, expresiones que permiten, en las aplicaciones prácticas, poder plantear procedimientos iterativos tipo *forward* mediante los cuales introducir de forma sucesiva polinomios de grado superior y, con ello, aproximarnos cada vez más a una mejor explicación del fenómeno en estudio. Este planteamiento debe ir acompañado de criterios para la selección del grado óptimo del polinomio considerado.

En este sentido, se dan expresiones recursivas para los estimadores de máxima verosimilitud asociados al proceso y a partir de ellos se construyen expresiones recursivas para los estimadores de las funciones media, moda y de cuantiles, así como para sus versiones condicionadas y para la función covarianza. También se construyen expresiones de este tipo que permiten el cálculo de bandas de confianza para las funciones media y moda y sus versiones condicionadas.

Completando el tercer capítulo, se presenta una aplicación a datos reales en la que se utilizan las expresiones recursivas obtenidas para la estimación de un proceso lognormal con factores exógenos polinómicos, cuya construcción contempla la introducción sucesiva de funciones de este tipo hasta determinar el grado óptimo, cuestión que se realiza valorando sus posibilidades predictivas. Este es el caso de las emisiones globales de metano entre los

años 1860 y 1994, datos para los que no se dispone de información externa pero se observan desviaciones de la tendencia del proceso homogéneo, previamente ajustado, con respecto a los datos observados. Una vez seleccionado el modelo, se realiza un estudio de simulación para el estudio de las bandas de confianza aproximadas y generalizada en el mismo sentido que el establecido en el Capítulo 2.

Capítulo 1

El proceso de difusión lognormal

En este capítulo se hace una descripción del proceso de difusión lognormal, centrándonos en el caso no homogéneo (o con factores exógenos), abarcando su definición, obtención mediante métodos alternativos (que generalizan a algunos existentes para el caso de procesos de difusión homogéneos en el tiempo), descripción y estudio de sus características principales. Asimismo se presentan resultados existentes en la literatura sobre la estimación mediante máxima verosimilitud de los parámetros implicados en la definición del proceso y la estimación máximo verosímil e insesgada de ciertas funciones paramétricas de ellos que incluyen, como casos particulares, funciones de interés del proceso tales como la función media, moda, cuantiles y covarianza. Finalizamos con la estimación mediante bandas de confianza exactas de un tipo de ellas, concretamente la media y la moda.

En primer lugar recordamos la definición de proceso de difusión así como algunos de los elementos determinantes en este tipo de procesos: momentos infinitesimales y ecuaciones de difusión. Una vez introducidos estos elementos, pasamos a definir el proceso de difusión lognormal no homogéneo mediante sus momentos infinitesimales y nos centramos en su estudio, en primer lugar desde el punto de vista de su obtención y en segundo lugar describiendo las funciones asociadas a él, tales como la función de densidad de transición, función de distribución de transición y funciones media, mediana, moda y de cuantiles para finalizar presentando el estudio inferencial de las funciones de este tipo.

1.1. Definición de proceso de difusión

Sea $\{X(t); t_0 \leq t \leq T\}$ un proceso de Markov en tiempo continuo, con espacio de estados continuo, trayectorias continuas casi seguro y notemos por $F(x, t|y, s)$ a su función de distribución de transición, esto es, para $t > s$,

$$F(x, t|y, s) = P[X(t) \leq x | X(s) = y].$$

Un proceso con las características anteriores se dice que es un proceso de difusión si $\forall \epsilon > 0$ y $\forall x$ en el espacio de estados se verifica

1. $\lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} \int_{|y-x| > \epsilon} F(dy, t + h|x, t) = 0.$
2. Existen funciones $A_1(x, t)$ y $A_2(x, t)$ tales que
 - a) $\lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} \int_{|y-x| \leq \epsilon} (y-x)F(dy, t + h|x, t) = A_1(x, t)$
 - b) $\lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} \int_{|y-x| \leq \epsilon} (y-x)^2 F(dy, t + h|x, t) = A_2(x, t).$

Nota 1.

1. Las funciones $A_1(x, t)$ y $A_2(x, t)$ se corresponden con dos de los momentos truncados, por unidad de tiempo, de los incrementos condicionados, momentos que siempre existen.
2. A partir de la definición anterior se puede deducir que los momentos truncados de orden superior son nulos (ver [7]).

Teniendo en cuenta la definición dada, en ocasiones puede ser complicado comprobar que un proceso sea de difusión. Las siguientes condiciones, (ver [15]), son suficientes para que un proceso de Markov en tiempo continuo, con espacio de estados continuo y con trayectorias continuas casi seguro sea de difusión:

1. Existe $\delta > 0$ tal que $\forall x$ se tiene $\lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} \int |y-x|^{2+\delta} F(dy, t + h|x, t) = 0.$
2. Existen funciones $A_1(x, t)$ y $A_2(x, t)$ tales que $\forall x$ se cumple
 - a) $\lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} \int (y-x)F(dy, t + h|x, t) = A_1(x, t)$
 - b) $\lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} \int (y-x)^2 F(dy, t + h|x, t) = A_2(x, t).$

Nota 2.

1. Las funciones $A_1(x, t)$ y $A_2(x, t)$ ahora son los momentos, por unidad de tiempo, de los incrementos condicionados, mientras que el haber usado de nuevo la notación $A_i(x, t)$, $i = 1, 2$ se debe al hecho de que se puede comprobar (ver [15]) que las condiciones anteriores implican que para $k = 0, 1, 2$ se tiene

$$\lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} \int_{|y-x| > \epsilon} (y-x)^k F(dy, t + h|x, t) = 0.$$

Para $k = 0$ se tiene la primera condición de la definición mientras que para $k = 1, 2$ se deduce que dichos momentos coinciden con los truncados.

2. Las funciones $A_i(x, t)$, $i = 1, 2$, son conocidas como los momentos infinitesimales del proceso. En efecto, puesto que para $n = 1, 2$,

$$A_n(x, t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \mathbb{E} [(X(t+h) - X(t))^n | X(t) = x],$$

en particular, para un incremento de tiempo pequeño, h , se tiene

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [X(t+h) - X(t) | X(t) = x] &\approx A_1(x, t)h \\ \mathbb{E} [(X(t+h) - X(t))^2 | X(t) = x] &\approx A_2(x, t)h, \end{aligned}$$

por lo que

$$\text{Var} [X(t+h) - X(t) | X(t) = x] \approx A_2(x, t)h - [A_1(x, t)]^2 h^2$$

y con ello

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{Var} [X(t+h) - X(t) | X(t) = x]}{h} = A_2(x, t).$$

Así pues, es habitual llamar a $A_1(x, t)$ la media infinitesimal del proceso y a $A_2(x, t)$ la varianza infinitesimal.

3. Si asumimos las condiciones suficientes anteriores, no podemos asegurar ahora que, de existir, los momentos infinitesimales de orden superior a dos sean nulos (como sí ocurre con los momentos infinitesimales truncados). Lo que sí es cierto es, que del hecho anterior, se deduce que los momentos infinitesimales de orden 1 y 2 (de existir y con las condiciones anteriores) coinciden con los truncados. De esta forma se justifica el haber usado la misma notación en ambos casos.

La función de densidad de transición de los procesos de difusión, $f(x, t | y, s)$, verifica, bajo ciertas condiciones de regularidad, dos ecuaciones diferenciales en derivadas parciales:

- Ecuación adelantada o de Fokker-Planck

$$\frac{\partial f(x, t | y, s)}{\partial t} = \frac{-\partial}{\partial x} [A_1(x, t) f(x, t | y, s)] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} [A_2(x, t) f(x, t | y, s)]. \quad (1.1)$$

- Ecuación atrasada o de Kolmogorov

$$\frac{\partial f(x, t | y, s)}{\partial s} + A_1(y, s) \frac{\partial f(x, t | y, s)}{\partial y} + \frac{1}{2} A_2(y, s) \frac{\partial^2 f(x, t | y, s)}{\partial y^2} = 0. \quad (1.2)$$

Estas ecuaciones son dos formas diferenciales de la ecuación de Chapman-Kolmogorov, donde $s \leq t$, y determinan, bajo ciertas condiciones, la función de densidad de transición (ver [15]).

Por otra parte, los procesos de difusión pueden estudiarse a partir de las ecuaciones diferenciales estocásticas del tipo

$$dX(t) = A_1(X(t), t)dt + \sqrt{A_2(X(t), t)}dW(t) \quad (1.3)$$

donde $W(t)$ es el proceso Wiener estándar. Este tipo de ecuaciones tiene solución única bajo determinadas condiciones (en general de tipo Lipschitz) sobre las funciones A_1 y A_2 . Dicha solución es, en general, un proceso de Markov, siendo una difusión bajo imposiciones adicionales de continuidad sobre las citadas funciones, (ver, por ejemplo los textos de Gikhman [15] o Arnold [4]).

1.1.1. Proceso de difusión lognormal no homogéneo o con factores exógenos

El proceso lognormal, o logarítmico-normal, no homogéneo (o con factores exógenos) se define como un proceso de difusión $\{X(t); t_0 \leq t \leq T\}$ con valores en \mathbb{R}^+ y momentos infinitesimales

$$\begin{aligned} A_1(x, t) &= h(t)x \quad \text{y} \\ A_2(x, t) &= \sigma^2 x^2, \quad \sigma > 0 \end{aligned} \quad (1.4)$$

donde h es una función continua del tiempo¹.

Nota 3. *La introducción de la función h en la media infinitesimal del proceso obedece a la idea de incluir posibles influencias externas que alteren su comportamiento, siendo ésta la razón de la terminología factores exógenos.*

En la definición anterior se ha incluido una función h genérica, sin determinar ninguna característica especial sobre ella, función con la cual, en los apartados siguientes abordaremos aspectos generales sobre la obtención del proceso. No obstante, con posterioridad, impondremos alguna condición más sobre dicha función. En concreto, a lo largo de esta memoria, y puesto que pueden ser múltiples las influencias externas que pueden afectar al comportamiento de la variable que modeliza el proceso, abordaremos el caso

$$h(t) = \beta_0 + \sum_{i=1}^q \beta_j F_j(t)$$

donde $\beta_j \in \mathbb{R}$, $j = 0, \dots, q$ y F_j son funciones continuas, $j = 1, \dots, q$.

Como se ha comentado con anterioridad, este proceso puede ser estudiado desde el punto de vista de las ecuaciones diferenciales estocásticas del tipo (1.3) o bien a partir de

¹Esta definición generaliza a la de proceso lognormal homogéneo, en cuyo caso la función h es constante, esto es, $h(t) = m$.

las ecuaciones (1.1) y (1.2). En concreto la ecuación diferencial estocástica asociada es

$$\begin{aligned} dX(t) &= h(t)X(t)dt + \sigma X(t)dW(t) \\ X(t_0) &= c \end{aligned} \tag{1.5}$$

donde c es una variable aleatoria. Con la hipótesis de continuidad impuesta sobre la función h , esta ecuación verifica las condiciones de existencia y unicidad de solución así como se asegura que tal solución sea un proceso de difusión.

Por otra parte las ecuaciones en derivadas parciales (1.1) y (1.2) adoptan las siguientes expresiones:

- Ecuación adelantada o de Fokker-Planck

$$\frac{\partial f(x, t|y, s)}{\partial t} = -h(t)\frac{\partial [xf(x, t|y, s)]}{\partial x} + \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 [x^2 f(x, t|y, s)]}{\partial x^2}.$$

- Ecuación atrasada o de Kolmogorov

$$\frac{\partial f(x, t|y, s)}{\partial s} + h(s)y\frac{\partial f(x, t|y, s)}{\partial y} + \frac{\sigma^2}{2}y^2\frac{\partial^2 f(x, t|y, s)}{\partial y^2} = 0,$$

ecuaciones que verifican las condiciones de existencia y unicidad de solución, con las condiciones iniciales respectivas $\lim_{t \downarrow s} f(x, t|y, s) = \delta(x - y)$ y $\lim_{s \uparrow t} f(x, t|y, s) = \delta(x - y)$, donde $\delta(\cdot)$ es la función delta de Dirac.

1.2. Obtención del proceso de difusión lognormal

A continuación se obtiene el proceso de difusión lognormal no homogéneo mediante tres métodos diferentes: los dos primeros son procedimientos de paso al límite de esquemas discretos mientras que el tercero consiste en la introducción de un ruido en el modelo determinístico de crecimiento correspondiente.

En el primer método se parte de un modelo discreto que modeliza la posición de una partícula que se mueve con saltos de amplitud δ o 0 entre instantes de tiempo equidistantes, con probabilidad de cambio dependiente del instante de tiempo y el estado considerados. En el límite, cuando se toman instantes de tiempo cada vez más cercanos y saltos de amplitud cada vez menor, este esquema responde a un proceso de difusión lognormal no homogéneo. Este procedimiento extiende el considerado por Ricciardi [50] para obtener procesos de difusión homogéneos a partir de recorridos aleatorios. En nuestro caso, al tratarse de un proceso no homogéneo en el tiempo, el esquema de partida no es un recorrido aleatorio ya que, al ser las probabilidades de transición dependientes del tiempo, no se consideran variables aleatorias idénticamente distribuidas.

En el segundo método se toma otro esquema de partida, el de un modelo de crecimiento no homogéneo que generaliza el esquema malthusiano considerando una fecundidad diferencial por unidad de tiempo dependiente de éste. De este esquema es posible derivar dos modelos de crecimiento a los cuales se les introduce ambiente aleatorio considerando que la fecundidad en cada instante de tiempo es aleatoria y de aquí se llega a dos procesos de difusión cuyos momentos infinitesimales se comprueba que son los del proceso de difusión lognormal no homogéneo.

De nuevo, este procedimiento extiende a otro conocido para el caso homogéneo, en concreto el considerado por Ricciardi en [50] para obtener el proceso de difusión lognormal homogéneo, para el que se considera una fecundidad diferencial por unidad de tiempo constante.

Por último, con el tercer método se obtiene el proceso de difusión lognormal no homogéneo generalizando el procedimiento seguido por Capocelli y Ricciardi en [9] para el caso homogéneo. Para ello, partiendo de la generalización del esquema de crecimiento malthusiano y considerando la razón de crecimiento dependiente del tiempo, se aleatoriza ésta mediante la introducción de un ruido blanco, dando lugar a una ecuación diferencial estocástica cuya solución es el proceso lognormal no homogéneo.

1.2.1. Obtención a partir de esquemas discretos

La obtención de un proceso de difusión como límite de un recorrido aleatorio parte de la idea de considerar un esquema de crecimiento aleatorio discreto y deducir las ecuaciones de difusión a partir de este esquema mediante la partición sucesiva de los espacios de tiempo y estados. El desarrollo de esta idea puede verse en los trabajos de Cox y Miller [11] y Ricciardi [50]. Partiendo de un recorrido aleatorio simple cuyas probabilidades de paso son independientes del espacio de estados, las ecuaciones de la difusión límite tendrán media y varianza infinitesimales constantes. Considerando recorridos aleatorios cuya probabilidad de paso dependa del estado se obtendrán, en el límite, procesos de difusión cuyos momentos infinitesimales dependen de la variable de estado.

En el caso de la obtención del proceso de difusión lognormal no homogéneo, y en general para la obtención de una difusión no homogénea, se parte de un esquema discreto donde las probabilidades de transición dependen tanto del estado como del tiempo. Esta idea aparece desarrollada en los trabajos de Gutiérrez, Rico y otros [28] y Rico [51] para el caso general no homogéneo.

En el caso de un proceso de difusión no homogéneo el modelo discreto de partida considerado es

$$\begin{aligned} X_{(n+1)\tau} &= X_{n\tau} + Z_{(n+1)\tau}; \quad n = 0, 1, 2, \dots \\ X_0 &= x_0 \end{aligned}$$

donde $Z_{n\tau}$ son variables aleatorias independientes verificando

$$\begin{aligned} P[Z_{(n+1)\tau} = \delta | X_{n\tau} = k\delta] &= \theta(k\delta, n\tau), \\ P[Z_{(n+1)\tau} = -\delta | X_{n\tau} = k\delta] &= \phi(k\delta, n\tau) \quad \text{y} \\ P[Z_{(n+1)\tau} = 0 | X_{n\tau} = k\delta] &= 1 - \theta(k\delta, n\tau) - \phi(k\delta, n\tau). \end{aligned}$$

Se trata por tanto de un esquema discreto que se puede entender como la posición de una partícula en un instante de tiempo $n\tau$, donde en cada instante de tiempo la posición puede experimentar un cambio positivo o negativo de amplitud δ o un cambio de amplitud cero con respecto al instante de tiempo anterior, siendo los saltos entre instantes de tiempo de amplitud τ . La probabilidad de cambio en la posición de la partícula depende no sólo del estado en que se encuentra la partícula sino también del instante de tiempo considerado.

Para obtener el proceso de difusión lognormal no homogéneo, las funciones θ y ϕ deben tener la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \blacksquare \theta(x, t) &= \frac{1}{2} \frac{\sigma^2 x^2 \tau}{\delta^2} + \frac{1}{2} \frac{h(t)x\tau}{\delta} \quad \text{y} \\ \blacksquare \phi(x, t) &= \frac{1}{2} \frac{\sigma^2 x^2 \tau}{\delta^2} - \frac{1}{2} \frac{h(t)x\tau}{\delta} \end{aligned}$$

y por lo tanto, el esquema de partida, que no será un recorrido aleatorio puesto que las variables aleatorias $Z_{n\tau}$ no están idénticamente distribuidas, se puede reescribir como

$$\begin{aligned} X_{(n+1)\tau} &= X_{n\tau} + Z_{n\tau}; \quad n = 0, 1, 2, \dots \\ X_0 &= x_0 \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} P[Z_{(n+1)\tau} = \delta | X_{n\tau} = k\delta] &= \left[\frac{\sigma^2 k^2}{2} + \frac{h(n\tau)k}{2} \right] \tau, \\ P[Z_{(n+1)\tau} = -\delta | X_{n\tau} = k\delta] &= \left[\frac{\sigma^2 k^2}{2} - \frac{h(n\tau)k}{2} \right] \tau \quad \text{y} \\ P[Z_{(n+1)\tau} = 0 | X_{n\tau} = k\delta] &= 1 - \theta(k\delta, n\tau) - \phi(k\delta, n\tau) = 1 - \sigma^2 k^2 \tau. \end{aligned}$$

Se han de cumplir adicionalmente las hipótesis $|h(t)| \leq j\sigma^2$, $\forall j \in \mathbb{N}$ para que las funciones $\theta(x, t)$ y $\phi(x, t)$ estén bien definidas y $\sigma^2 j^2 < \frac{1}{\tau}$ para asegurar que $\theta(x, t) + \phi(x, t) < 1$.

Para obtener, a partir de este esquema discreto, las ecuaciones de difusión del proceso de difusión lognormal, se toma la siguiente notación

$$P_{j,k}^{(m,n)} = P [X_{(n+m)\tau} = k\delta | X_{m\tau} = j\delta]$$

de forma que se tiene la igualdad

$$\begin{aligned} P_{j,k}^{(m,n)} &= P_{j,k-1}^{(m,n-1)} \left[\frac{1}{2} \sigma^2 (k-1)^2 + \frac{1}{2} h((n+m-1)\tau) (k-1) \right] \tau \\ &+ P_{j,k+1}^{(m,n-1)} \left[\frac{1}{2} \sigma^2 (k+1)^2 - \frac{1}{2} h((n+m-1)\tau) (k+1) \right] \tau \\ &+ P_{j,k}^{(m,n-1)} (1 - \sigma^2 k^2 \tau) \end{aligned}$$

la cual expresa la probabilidad de que la partícula se encuentre en el estado $k\delta$ después de transcurrir n instantes de tiempo partiendo del estado $j\delta$ en el tiempo $m\tau$, considerando las tres posibles posiciones de la partícula transcurridos $n-1$ instantes de tiempo ($(k-1)\delta$, $(k+1)\delta$ y $k\delta$) y la probabilidad del correspondiente último salto (de amplitudes δ , $-\delta$ y 0 , respectivamente).

Sea $f(x, t|y, s)\delta$ la probabilidad de que el proceso tome un valor en el intervalo $\left(x \pm \frac{\delta}{2}\right)$ en el instante de tiempo t si parte del estado y en el instante de tiempo s . Teniendo entonces en cuenta la igualdad anterior, se tiene

$$\begin{aligned} &f(k\delta, (n+m)\tau|j\delta, m\tau) \delta \\ &= f((k-1)\delta, (n+m-1)\tau|j\delta, m\tau) \delta \left[\frac{1}{2} \sigma^2 (k-1)^2 + \frac{1}{2} h((n+m-1)\tau) (k-1) \right] \tau \\ &+ f((k+1)\delta, (n+m-1)\tau|j\delta, m\tau) \delta \left[\frac{1}{2} \sigma^2 (k+1)^2 - \frac{1}{2} h((n+m-1)\tau) (k+1) \right] \tau \\ &+ f(k\delta, (n+m-1)\tau|j\delta, m\tau) \delta (1 - \sigma^2 k^2 \tau). \end{aligned}$$

Tomando $x = k\delta$, $t = (m+n)\tau$, $y = j\delta$, $s = m\tau$ y sustituyendo en la expresión anterior, se tiene

$$\begin{aligned} f(x, t|y, s) &= f(x - \delta, t - \tau|y, s) \left[\frac{1}{2\delta^2} \sigma^2 (x - \delta)^2 + \frac{1}{2\delta} h(t - \tau) (x - \delta) \right] \tau \\ &+ f(x + \delta, t - \tau|y, s) \left[\frac{1}{2\delta^2} \sigma^2 (x + \delta)^2 - \frac{1}{2\delta} h(t - \tau) (x + \delta) \right] \tau \\ &+ f(x, t - \tau|y, s) \delta (1 - \sigma^2 x^2 \tau). \end{aligned}$$

Desarrollando por Taylor en x y t cada uno de los sumandos del lado derecho de la

igualdad anterior:

$$\begin{aligned}
& \bullet f(x - \delta, t - \tau | y, s) \left[\frac{1}{2\delta^2} \sigma^2 (x - \delta)^2 + \frac{1}{2\delta} h(t - \tau) (x - \tau) \right] \tau \\
&= \sum_{i+j=n} \frac{(-1)^n \delta^i \tau^j}{i! j!} \left[\sum_{k=0}^i \sum_{m=0}^j \binom{i}{k} \binom{j}{m} \frac{\partial^{k+m} f(x, t | y, s)}{\partial x^k \partial t^m} \frac{\partial^{n-k-m} \left[\frac{\sigma^2 x^2}{2\delta^2} + \frac{h(t)x}{2\delta} \right] \tau}{\partial x^{i-k} \partial t^{j-m}} \right] \\
& \bullet f(x + \delta, t - \tau | y, s) \left[\frac{1}{2\delta^2} \sigma^2 (x + \delta)^2 - \frac{1}{2\delta} h(t - \tau) (x + \delta) \right] \tau \\
&= \sum_{i+j=n} \frac{(-1)^j \delta^i \tau^j}{i! j!} \left[\sum_{k=0}^i \sum_{m=0}^j \binom{i}{k} \binom{j}{m} \frac{\partial^{k+m} f(x, t | y, s)}{\partial x^k \partial t^m} \frac{\partial^{n-k-m} \left[\frac{\sigma^2 x^2}{2\delta^2} - \frac{h(t)x}{2\delta} \right] \tau}{\partial x^{i-k} \partial t^{j-m}} \right] \\
& \bullet f(x, t - \tau | y, s) = \sum_j \frac{(-1)^j \tau^j}{j} \frac{\partial^j f(x, t | y, s)}{\partial t^j}.
\end{aligned}$$

Sumando apropiadamente y dividiendo entre τ se llega a la siguiente expresión, una vez que hacemos $\tau \rightarrow 0$ y $\delta \rightarrow 0$

$$\frac{\partial f(x, t | y, s)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} [h(t)x f(x, t | y, s)] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} [\sigma^2 x^2 f(x, t | y, s)],$$

que es la ecuación adelantada o de Fokker-Planck de un proceso de difusión con momentos infinitesimales $A_1(x, t) = h(t)x$ y $A_2(x, t) = \sigma^2 x^2$, esto es, la ecuación adelantada asociada al proceso de difusión lognormal no homogéneo.

Para obtener la ecuación atrasada o de Kolmogorov del proceso límite, se sigue un desarrollo análogo al anterior partiendo de la igualdad

$$\begin{aligned}
P_{j,k}^{(m,n)} &= P_{j+1,k}^{(m+1,n-1)} \left[\frac{1}{2} \sigma^2 j^2 + \frac{1}{2} h(m\tau) j \right] \tau \\
&+ P_{j-1,k}^{(m+1,n-1)} \left[\frac{1}{2} \sigma^2 j^2 - \frac{1}{2} h(m\tau) j \right] \tau \\
&+ P_{j,k}^{(m+1,n-1)} (1 - \sigma^2 j^2 \tau)
\end{aligned}$$

en la que ahora se expresa la probabilidad de que la partícula se encuentre en el estado $k\delta$ después de transcurrir n instantes de tiempo partiendo del estado $j\delta$ en el tiempo $m\tau$, considerando las tres posibles posiciones de la partícula en el primer instante de tiempo

$((j-1)\delta, (j+1)\delta$ y $j\delta$), llegando a la ecuación

$$\begin{aligned} f(x, t|y, s) &= f(x, t|y + \delta, s + \tau) \left[\frac{1}{2} \frac{\sigma^2 y^2}{\delta^2} + \frac{1}{2} \frac{h(s)y}{\delta} \right] \tau \\ &+ f(x, t|y - \delta, s + \tau) \left[\frac{1}{2} \frac{\sigma^2 y^2}{\delta^2} - \frac{1}{2} \frac{h(s)y}{\delta} \right] \tau \\ &+ f(x, t|y, s + \tau) (1 - \sigma^2 y^2 \tau) \end{aligned}$$

de la que se obtiene

$$\frac{\partial f(x, t|y, s)}{\partial s} + \frac{\partial f(x, t|y, s)}{\partial y} h(s)y + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f(x, t|y, s)}{\partial y^2} \sigma^2 y^2 = 0,$$

que es la ecuación atrasada o de Kolmogorov de un proceso de difusión con momentos infinitesimales $A_1(x, t) = h(t)x$ y $A_2(x, t) = \sigma^2 x^2$, esto es, la ecuación atrasada asociada al proceso de difusión lognormal no homogéneo.

1.2.2. Obtención a partir de modelos discretos de crecimiento

A continuación se lleva a cabo la obtención del proceso partiendo de esquemas discretos de crecimiento de poblaciones que generalizan el esquema propuesto por Malthus en [45], mediante un procedimiento de paso al límite posterior a la aleatorización de los modelos considerados. Un desarrollo análogo al propuesto en este apartado, pero referido a un proceso de difusión no homogéneo de naturaleza distinta, se puede encontrar en el trabajo de Gutiérrez, Rico y otros [29]. Además, este esquema para la obtención de un proceso general no homogéneo se desarrolla en el trabajo de Rico [51].

Supongamos una población de tamaño Y_n en el instante n que crece (o decrece) según la siguiente relación:

$$\begin{aligned} Y_{(n+1)\tau} - Y_{n\tau} &= g(n\tau)\tau Y_{n\tau}; \quad n = 0, 1, \dots \\ Y_0 &= x_0 \end{aligned} \tag{1.6}$$

lo cual significa que el tamaño de la población inicial es x_0 y la fecundidad diferencial por unidad de tiempo es de la forma

$$\frac{1}{\tau} \frac{Y_{(n+1)\tau} - Y_{n\tau}}{Y_{n\tau}} = g(n\tau).$$

la cual se modelizará posteriormente, para $n = 1, 2, \dots$, mediante una sucesión de variables aleatorias independientes y no idénticamente distribuidas.

Este procedimiento extiende el considerado por Ricciardi en [50], el cual partía del modelo

$$\begin{aligned} Y_{(n+1)\tau} - Y_{n\tau} &= r\tau Y_{n\tau}; \quad n = 0, 1, \dots \\ Y_0 &= x_0 \end{aligned}$$

esto es, considerando la fertilidad diferencial por unidad de tiempo constante, para obtener el proceso lognormal homogéneo.

El modelo de crecimiento (1.6) se citará en lo siguiente como **Modelo I**.

Resolviendo la ecuación por inducción se tiene

$$Y_{(n+1)\tau} = x_0 \prod_{l=0}^n (g(l\tau)\tau + 1).$$

Por otra parte, a partir de (1.6), tomando límites cuando $n \rightarrow \infty$ y $\tau \rightarrow 0$, bajo la condición $n\tau = t$ constante, se obtiene la ecuación diferencial

$$\begin{aligned} \frac{dX(t)}{dt} &= g(t)X(t) \\ X(0) &= x_0 \end{aligned} \quad (1.7)$$

en la cual se ha denotado por $X(t)$ al proceso que resulta en el límite. La solución de esta ecuación diferencial viene dada por

$$X(t) = x_0 e^{G(t)} \quad \text{con} \quad G(t) = \int_0^t g(s) ds.$$

A partir de esta solución se tiene que

$$X(t + \tau) - X(t) = x_0 e^{G(t)} (e^{G(t+\tau)-G(t)} - 1),$$

expresión que podemos discretizar, obteniendo el que llamaremos **Modelo II**

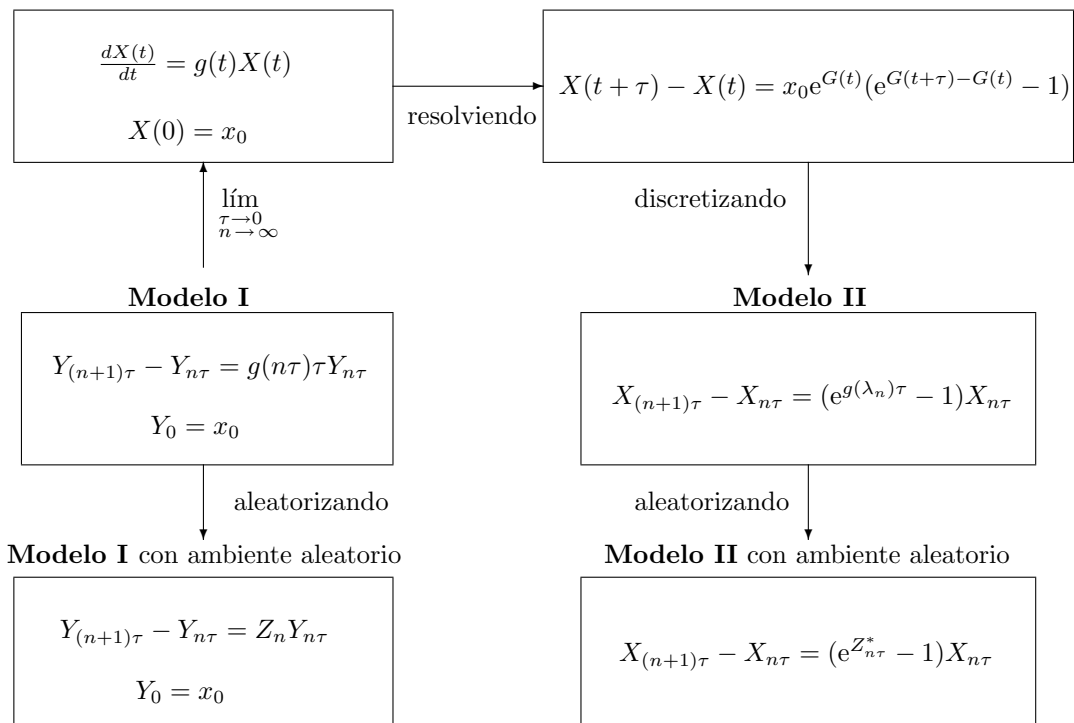
$$X_{(n+1)\tau} - X_{n\tau} = X_{n\tau} (e^{g(\lambda_n)\tau} - 1); \quad n\tau \leq \lambda_n \leq (n+1)\tau. \quad (1.8)$$

Nótese que en la obtención de la expresión (1.8), se ha utilizado que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists \lambda_n$ en el intervalo $(n\tau, (n+1)\tau)$ tal que

$$\int_{n\tau}^{(n+1)\tau} g(s) ds = g(\lambda_n)\tau.$$

A partir del **Modelo I** y del **Modelo II**, dados en (1.6) y (1.8) respectivamente, se obtienen en el límite dos procesos de difusión diferentes, con una relación entre sus momentos infinitesimales, referidos al mismo modelo de crecimiento y que se unifican en el proceso de difusión lognormal no homogéneo. A continuación se desarrollan ambos modelos, introduciendo ambiente aleatorio en cada uno de ellos, obteniendo el proceso límite citado.

En el gráfico 1.1 se tiene un esquema de la obtención de los modelos I y II con ambiente aleatorio, de los cuales se parte para obtener el proceso de difusión lognormal no homogéneo.

Gráfico 1.1: Esquema de obtención del **Modelo I** y el **Modelo II**

Modelo I con ambiente aleatorio

Para introducir ambiente aleatorio en el **Modelo I** definimos la siguiente sucesión de variables aleatorias e independientes $\{Z_{n\tau}\}$, no idénticamente distribuidas, tales que:

$$\begin{aligned} P[Z_{n\tau} = \sigma\sqrt{\tau}] &= \frac{1}{2} + \frac{g(n\tau)\sqrt{\tau}}{2\sigma} \quad \text{y} \\ P[Z_{n\tau} = -\sigma\sqrt{\tau}] &= \frac{1}{2} - \frac{g(n\tau)\sqrt{\tau}}{2\sigma}, \end{aligned} \quad (1.9)$$

cuyos momentos no centrados son

$$\begin{aligned} E[Z_{n\tau}] &= g(n\tau)\tau, \\ E[Z_{n\tau}^2] &= \sigma^2\tau \quad \text{y} \\ E[Z_{n\tau}^{2+p}] &= o(\tau), \quad \forall p \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Incluiremos la sucesión de variables aleatorias definida en (1.9) en el **Modelo I** sustituyendo la fecundidad $g(n\tau)\tau$ por $Z_{n\tau}$, de forma que la fecundidad en promedio es la misma en ambos modelos. De esta forma se obtiene el modelo de crecimiento siguiente

$$Y_{(n+1)\tau} - Y_{n\tau} = Z_{n\tau}Y_{n\tau}; \quad n = 0, 1, \dots$$

a partir del cual

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau}E[Y_{(n+1)\tau} - Y_{n\tau} | Y_{n\tau} = x] &= g(n\tau)x, \\ \frac{1}{\tau}E[(Y_{(n+1)\tau} - Y_{n\tau})^2 | Y_{n\tau} = x] &= \sigma^2x^2 \quad \text{y} \\ \frac{1}{\tau}E[(Y_{(n+1)\tau} - Y_{n\tau})^{2+p} | Y_{n\tau} = x] &= \frac{x^2o(\tau)}{\tau}, \quad \forall p \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

de forma que cuando se hace tender el valor de τ a cero y el valor de n a ∞ , bajo la condición de $n\tau = t$ constante, se tiene que $Y_{n\tau}$ converge a un proceso de difusión no homogéneo con momentos infinitesimales

$$\begin{aligned} A_1(x, t) &= g(t)x \quad \text{y} \\ A_2(x, t) &= \sigma^2x^2, \end{aligned}$$

el cual es un proceso de difusión lognormal, definido en (1.4), donde $h(t) = g(t)$.

Modelo II con ambiente aleatorio

Para aleatorizar el crecimiento de la ecuación del **Modelo II** se procede de la misma forma que en el caso anterior, definiéndose una sucesión de variables aleatorias indepen-

dientes $\{Z_{n\tau}^*\}$, no idénticamente distribuidas, tales que

$$\begin{aligned} P[Z_{n\tau}^* = \sigma\sqrt{\tau}] &= \frac{1}{2} + \frac{g(\lambda_n)\sqrt{\tau}}{2\sigma} \quad \text{y} \\ P[Z_{n\tau}^* = -\sigma\sqrt{\tau}] &= \frac{1}{2} - \frac{g(\lambda_n)\sqrt{\tau}}{2\sigma}, \end{aligned} \quad (1.10)$$

cuyos momentos no centrados son

$$\begin{aligned} E[Z_{n\tau}^*] &= g(\lambda_n)\tau, \\ E[Z_{n\tau}^{*2}] &= \sigma^2\tau \quad \text{y} \\ E[Z_{n\tau}^{*2+p}] &= o(\tau), \quad \forall p \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Sustituyendo el crecimiento determinístico que viene dado por la función g por el crecimiento aleatorio que viene dado por (1.10), se tiene que el modelo de partida en este caso, con ambiente aleatorio, puede escribirse como

$$X_{(n+1)\tau} - X_{n\tau} = X_{n\tau} (e^{Z_{n\tau}^*} - 1).$$

A partir de esta expresión, teniendo en cuenta que los valores de $Z_{n\tau}^*$ son independientes de los valores $X_{n\tau}$,

$$E[(X_{(n+1)\tau} - X_{n\tau})^k | X_{n\tau} = x] = x^k E[(e^{Z_{n\tau}^*} - 1)^k] = x^k \sum_{j=1}^k \binom{k}{j} (-1)^{k-j} E[e^{jZ_{n\tau}^*} - 1].$$

Teniendo ahora en cuenta el siguiente desarrollo

$$\begin{aligned} E[e^{lZ_{n\tau}^*}] &= M_{Z_{n\tau}^*}(l) = e^{l\sigma\sqrt{\tau}} \left(\frac{1}{2} + \frac{g(n\tau)\sqrt{\tau}}{2\sigma} \right) + e^{-l\sigma\sqrt{\tau}} \left(\frac{1}{2} - \frac{g(n\tau)\sqrt{\tau}}{2\sigma} \right) \\ &= \cosh(l\sigma\sqrt{\tau}) + \frac{g(n\tau)\sqrt{\tau}}{\sigma} \sinh(l\sigma\sqrt{\tau}) = 1 + \frac{l^2\sigma^2\tau}{2} + o(\tau) + \frac{g(n\tau)\sqrt{\tau}}{\sigma} (l\sigma\sqrt{\tau}o(\tau)) \\ &= 1 + \tau \left(\frac{l^2\sigma^2}{2} + lg(n\tau) \right) + o(\tau), \end{aligned}$$

la expresión anterior puede escribirse como

$$E \left[(X_{(n+1)\tau} - X_{n\tau})^k | X_{n\tau} = x \right] = x^k \sum_{j=1}^k \binom{k}{j} (-1)^{k-j} \left(\tau \left(\frac{l^2\sigma^2}{2} + lg(n\tau) \right) + o(\tau) \right)$$

y tomando límites cuando $\tau \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$, bajo la condición de que $n\tau = t$ constante, se llega a

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \tau \rightarrow 0 \\ (n\tau=t)}} \frac{1}{\tau} E \left[(X_{(n+1)\tau} - X_{n\tau})^k | X_{n\tau} = x \right] &= x^k \sum_{j=1}^k \binom{k}{l} (-1)^{k-l} (-1)^{k-l} \left(\frac{l^2 \sigma^2}{2} + lg(t) \right) \\ &= x^k \left(\frac{\sigma^2}{2} \sum_{j=1}^k \binom{k}{l} (-1)^{k-l} (-1)^{k-l} l^2 + g(t) \sum_{j=1}^k \binom{k}{l} (-1)^{k-l} (-1)^{k-l} l \right) \end{aligned}$$

de tal forma que se pueden obtener las expresiones de los momentos siguientes

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \tau \rightarrow 0 \\ (n\tau=t)}} \frac{1}{\tau} E \left[X_{(n+1)\tau} - X_{n\tau} | X_{n\tau} = x \right] &= x \left(\frac{g(t) + \sigma^2}{2} \right), \\ \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \tau \rightarrow 0 \\ (n\tau=t)}} \frac{1}{\tau} E \left[(X_{(n+1)\tau} - X_{n\tau})^2 | X_{n\tau} = x \right] &= x^2 \sigma^2, \\ \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \tau \rightarrow 0 \\ (n\tau=t)}} \frac{1}{\tau} E \left[(X_{(n+1)\tau} - X_{n\tau})^{2+p} | X_{n\tau} = x \right] &= 0. \end{aligned}$$

Esto es, en el límite, $X_{n\tau}$ converge a un proceso de difusión no homogéneo $X(t)$ con momentos infinitesimales

$$\begin{aligned} B_1(x, t) &= x \left(g(t) + \frac{\sigma^2}{2} \right) \\ B_2(x, t) &= \sigma^2 x^2 \end{aligned}$$

por lo que se concluye que $X(t)$ es un proceso de difusión lognormal con momentos infinitesimales equivalentes a los definidos en (1.4) sin más que tomar $h(t) = g(t) + \frac{\sigma^2}{2}$.

1.2.3. Obtención a partir de modelos continuos de crecimiento

En este apartado se supone la ecuación de crecimiento dada en (1.7), que responde al esquema de crecimiento continuo de poblaciones malthusianas, con fecundidad dependiente del tiempo. En esta ocasión se introduce ambiente aleatorio sumando a la función de fecundidad un ruido blanco.

El punto de partida es la ecuación diferencial

$$\frac{dx(t)}{dt} = r(t)x(t) \quad \text{con } r(t) \text{ continua}$$

la cual se modifica sustituyendo $r(t)$ por $r(t) + \Lambda(t)$ donde $\Lambda(t)$ es un ruido blanco con densidad espectral σ^2 . De esta forma se tiene la ecuación

$$\frac{dx(t)}{dt} = r(t)x(t) + \Lambda(t)x(t)$$

y, a partir de ella, la ecuación diferencial estocástica

$$dX(t) = r(t)X(t)dt + \sigma X(t)dW(t)$$

donde $W(t)$ es el proceso Wiener estándar.

La solución de ésta es un proceso de difusión con momentos infinitesimales

$$\begin{aligned} A_1(x, t) &= h(t)x \\ A_2(x, t) &= \sigma^2 x^2 \end{aligned}$$

donde

$$h(t) = \begin{cases} r(t) \\ r(t) + \frac{\sigma^2}{2} \end{cases}$$

según se haya utilizado en la resolución de la ecuación diferencial estocástica, la integral de Itô o Stratonovich, respectivamente.

De nuevo, este método extiende al utilizado por Capoceli y Ricciardi en [9], quienes partiendo de la ecuación

$$\frac{dx(t)}{dt} = rx(t)$$

y cambiando r por $r + \Lambda(t)$, obtienen el proceso lognormal homogéneo.

1.3. Características del proceso

En este apartado nos centraremos en la obtención de las características del proceso lognormal no homogéneo tales como la densidad de transición, las distribuciones finito-dimensionales, momentos y las funciones media, moda y de cuantiles (y sus versiones condicionadas), así como la función covarianza.

1.3.1. Obtención de la función de densidad de transición

Para la obtención de la función de densidad de transición del proceso vamos a considerar la ecuación atrasada o de Kolmogorov (1.2) y vamos a utilizar un resultado debido a Ricciardi, [49], donde se especifica bajo qué condiciones existe una transformación del tipo

$$\begin{aligned} x' &= \psi(x, t), & y' &= \psi(y, s) \\ t' &= \phi(t), & s' &= \phi(s) \end{aligned}$$

que transforme la ecuación (1.6) en

$$\frac{\partial f'(x', t' | y', s')}{\partial s'} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f'(x', t' | y', s')}{\partial y'^2} = 0$$

que se corresponde con la ecuación adelantada o de Kolmogorov del proceso Wiener estándar, cuya función de densidad de transición es conocida:

$$f'(x', t' | y', s') = \left(\sqrt{2\pi(t' - s')} \right)^{-1} \exp \left(-\frac{(x' - y')^2}{2(t' - s')} \right).$$

El resultado al que nos referimos es el siguiente:

Teorema 4. *Una condición necesaria y suficiente para que un proceso de difusión con función de densidad de transición $f(x, t | y, s)$ y momentos infinitesimales $A_1(x, t)$ y $A_2(x, t)$ pueda transformarse al proceso Wiener estándar es que existan funciones arbitrarias $C_1(t)$ y $C_2(t)$ que verifiquen*

$$A_1(x, t) = \frac{1}{4} \frac{\partial A_2(x, t)}{\partial x} + \frac{[A_2(x, t)]^{1/2}}{2} \left\{ C_1(t) + \int_z^x \frac{C_2(t) A_2(y, t) + \frac{\partial A_2(y, t)}{\partial t}}{(A_2(y, t))^{3/2}} dy \right\}. \quad (1.11)$$

En tal caso la transformación es

$$\begin{aligned} x' = \psi(x, t) &= (k_1)^{1/2} \exp \left(-\frac{1}{2} \int_{t_0}^t C_2(s) ds \right) \int_z^x \frac{1}{(A_2(y, t))^{1/2}} dy \\ &\quad - \frac{(k_1)^{1/2}}{2} \int_{t_2}^t C_1(s) \exp \left(-\frac{1}{2} \int_{t_0}^s C_2(\theta) d\theta \right) ds + k_2 \\ t' = \phi(t) &= k_1 \int_{t_1}^t \exp \left(-\int_{t_0}^s C_2(\theta) d\theta \right) ds + k_3, \end{aligned}$$

siendo z un valor del intervalo de definición del proceso, $t_i \in [0, \infty)$ y k_i constantes arbitrarias con la restricción $k_1 > 0$.

Nota 5. Puesto que, para cada t , $\frac{\partial \psi(x, t)}{\partial x} = \left[\frac{\phi'(t)}{A_2(x, t)} \right]^{\frac{1}{2}} > 0$, la transformación $x' = \psi(x, t)$ es biyectiva y la relación entre las densidades de transición del proceso Wiener y el transformado será

$$f(x, t | y, s) = \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial x} f'(x', t' | y', s'). \quad (1.12)$$

Aplicando dicho resultado en nuestro caso, la condición (1.11) queda

$$\begin{aligned} h(t)x &= \frac{1}{4} \frac{\partial [\sigma^2 x^2]}{\partial x} + \frac{[\sigma^2 x^2]^{1/2}}{2} \left\{ C_1(t) + \int_z^x \frac{C_2(t) \sigma^2 y^2 + \frac{\partial [\sigma^2 y^2]}{\partial t}}{(\sigma^2 y^2)^{3/2}} dy \right\} \\ &= \left[\frac{\sigma^2}{2} + \frac{\sigma}{2} C_1(t) \right] x + \frac{x \ln(x/x)}{2} C_2(t) \end{aligned}$$

que se verifica para, por ejemplo,

$$\begin{aligned} C_1(t) &= \frac{2h(t)}{\sigma} - \sigma \\ C_2(t) &= 0 . \end{aligned}$$

Por tanto, la transformación que lleva al proceso lognormal no homogéneo en el proceso Wiener viene dada por

$$\begin{aligned} \psi(x, t) &= \frac{(k_1)^{1/2}}{\sigma} \left(\ln(x/z) - \int_{t_2}^t h(s)ds + \frac{\sigma^2}{2} (t - t_2) \right) + k_2 \\ \phi(t) &= k_1(t - t_1) + k_3 . \end{aligned}$$

Con ello, y utilizando la relación (1.12), se obtiene que la función de densidad de transición del proceso considerado es

$$f(x, t|y, s) = \frac{1}{x\sqrt{2\pi\sigma^2(t-s)}} \exp \left(- \frac{\left[\ln(x/y) - \int_s^t h(\lambda)d\lambda + \frac{\sigma^2}{2}(t-s) \right]^2}{2\sigma^2(t-s)} \right),$$

es decir, para $t > s$

$$X(t)|X(s) = y \sim \Lambda_1 \left(\ln(y) + \int_s^t h(\lambda)d\lambda - \frac{\sigma^2}{2}(t-s), \sigma^2(t-s) \right).$$

A partir de la expresión anterior se puede calcular la función de distribución de transición

$$F(x, t|y, s) = \frac{1}{2} \left[1 + \operatorname{Erf} \left(\frac{\ln(x/y) - \int_s^t h(\lambda)d\lambda + \frac{\sigma^2}{2}(t-s)}{\sqrt{2\sigma^2(t-s)}} \right) \right]$$

donde $\operatorname{Erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$.

1.3.2. Distribuciones finito-dimensionales

Puesto que el proceso que estamos considerando es markoviano, el cálculo de las distribuciones finito-dimensionales depende sólo de la distribución inicial y de las transiciones. Conocidas estas últimas, para obtener las distribuciones finito-dimensionales habrá que imponer cuál es la distribución inicial. En nuestro caso nos centraremos en el caso degenerado, o sea, $P[X(t_0) = x_0] = 1$.

Distribuciones unidimensionales

A partir de la función de densidad de transición del proceso se tiene que la distribución de $X(t)|X(t_0) = x_0$ es lognormal univariante, esto es

$$X(t)|X(t_0) = x_0 \sim \Lambda_1 \left(\ln(x_0) + \int_{t_0}^t h(\lambda)d\lambda - \frac{\sigma^2}{2}(t - t_0), \sigma^2(t - t_0) \right),$$

distribución que coincide con la de $X(t)$ debido a la elección que se ha hecho de la distribución inicial. Por tanto

$$\begin{aligned} f(x, t) &= f(x, t|x_0, t_0) \\ &= \frac{1}{x\sqrt{2\pi\sigma^2(t - t_0)}} \exp \left(-\frac{\left[\ln(x) - \ln(x_0) - \int_{t_0}^t h(\lambda)d\lambda + \frac{\sigma^2}{2}(t - t_0) \right]^2}{2\sigma^2(t - t_0)} \right). \end{aligned}$$

Distribuciones bidimensionales

Para obtener la distribución conjunta de $X(t)$ y $X(s)$ consideremos en primer lugar el caso $s < t$. Así se tiene

$$\begin{aligned} f(x, t; y, s) &= f(y, s)f(x, t|y, s) \\ &= \frac{1}{y\sqrt{2\pi\sigma^2(s - t_0)}} \exp \left(-\frac{\left(\ln(y) - \ln(x_0) - \int_{t_0}^s h(\lambda)d\lambda + \frac{\sigma^2}{2}(s - t_0) \right)^2}{2\sigma^2(s - t_0)} \right) \\ &\quad \times \frac{1}{x\sqrt{2\pi\sigma^2(t - s)}} \exp \left(-\frac{\left(\ln(x) - \ln(y) - \int_s^t h(\lambda)d\lambda + \frac{\sigma^2}{2}(t - s) \right)^2}{2\sigma^2(t - s)} \right) \\ &= \frac{1}{xy2\pi|\Sigma_1|^{\frac{1}{2}}} \exp \left(-\frac{1}{2}(\ln(\mathbf{x}) - \mu_1)' \Sigma_1^{-1} (\ln(\mathbf{x}) - \mu_1) \right), \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} \ln(\mathbf{x}) &= \begin{pmatrix} \ln(x) \\ \ln(y) \end{pmatrix}, \quad \mu_1 = \begin{pmatrix} \ln(x_0) + \int_{t_0}^t h(\lambda)d\lambda - \frac{\sigma^2}{2}(t - t_0) \\ \ln(x_0) + \int_{t_0}^s h(\lambda)d\lambda - \frac{\sigma^2}{2}(s - t_0) \end{pmatrix} \\ \text{y } \Sigma_1 &= \sigma^2 \begin{pmatrix} t - t_0 & s - t_0 \\ s - t_0 & s - t_0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

esto es, la distribución conjunta de $X(t)$ y $X(s)$ es lognormal bidimensional $\Lambda_2(\mu_1, \Sigma_1)$.

En el caso $t < s$ se tiene, de forma análoga, que la distribución conjunta es lognormal bidimensional $\Lambda_2(\mu_2, \Sigma_2)$ con

$$\mu_2 = \begin{pmatrix} \ln(x_0) + \int_{t_0}^t h(\lambda) d\lambda - \frac{\sigma^2}{2}(t - t_0) \\ \ln(x_0) + \int_{t_0}^s h(\lambda) d\lambda - \frac{\sigma^2}{2}(s - t_0) \end{pmatrix} \quad y \quad \Sigma_2 = \sigma^2 \begin{pmatrix} t - t_0 & t - t_0 \\ t - t_0 & s - t_0 \end{pmatrix}.$$

En general, para t y s cualesquiera, la función de densidad bidimensional $f(x, t; y, s)$ será la densidad de una distribución lognormal bidimensional $\Lambda_2(\mu, \Sigma)$ donde

$$\mu = \begin{pmatrix} \ln(x_0) + \int_{t_0}^t h(\lambda) d\lambda - \frac{\sigma^2}{2}(t - t_0) \\ \ln(x_0) + \int_{t_0}^s h(\lambda) d\lambda - \frac{\sigma^2}{2}(s - t_0) \end{pmatrix} \quad y$$

$$\Sigma = \sigma^2 \begin{pmatrix} t - t_0 & (t \wedge s - t_0) \\ (t \wedge s - t_0) & s - t_0 \end{pmatrix},$$

denotando con $t \wedge s$ al mínimo entre t y s .

Notemos que mediante el uso de la propiedad de Markov se obtendrían de forma análoga las distribuciones de cualquier dimensión, siendo en cualquier caso distribuciones lognormales ².

1.3.3. Momentos

Una vez obtenidas las distribuciones finito-dimensionales se pueden calcular los momentos de cualquier orden ya que se conocen las densidades implicadas en su cálculo (en este caso lognormales). No obstante, en este apartado se calcularán haciendo uso de las transiciones.

Para ello, definamos la variable $Z(t) = \ln(X(t))$ y, dado que la distribución de $X(t)|X(s) = x_s$ es lognormal, se tiene que $Z(t)|X(s) = x_s$ es una variable aleatoria normal univariante

$$Z(t)|X(s) = x_s \sim \mathcal{N}_1 \left(\ln(x_s) + \int_s^t h(\lambda) d\lambda - \frac{\sigma^2}{2}(t - s), \sigma^2(t - s) \right).$$

El momento condicionado no centrado de orden k se calcula:

$$\begin{aligned} E[X(t)^k | X(s)] &= E[e^{k \ln(X(t))} | X(s)] \\ &= \exp \left(k \left[\ln(X(s)) + \int_s^t h(\lambda) d\lambda - \frac{\sigma^2}{2}(t - s) \right] + \frac{1}{2} k^2 \sigma^2 (t - s) \right) \\ &= X(s)^k \exp \left(k \int_s^t h(\lambda) d\lambda + \frac{k \sigma^2 (t - s)}{2} (k - 1) \right), \end{aligned}$$

²La elección de la distribución inicial garantiza que las distribuciones finito-dimensionales sean lognormales, si bien no es el único caso en el que eso ocurre. En efecto, siguiendo a Arnold en [4], el proceso $\ln X(t)$ es gaussiano si la distribución inicial es degenerada o normal. De esta forma, considerando una distribución degenerada (como ha sido el caso) o lognormal, nos aseguramos la lognormalidad de las distribuciones finito-dimensionales.

expresión que, para $s = t_0$, queda

$$E[X(t)^k | X(t_0)] = X(t_0)^k \exp \left(k \int_{t_0}^t h(\lambda) d\lambda + \frac{k\sigma^2(t-t_0)}{2}(k-1) \right).$$

Por tanto, el momento no centrado de orden k de $X(t)$ vendrá dado por

$$\begin{aligned} E[X(t)^k] &= E[E[X(t)^k | X(t_0)]] \\ &= E \left[X(t_0)^k \exp \left(k \int_{t_0}^t h(\lambda) d\lambda + \frac{k\sigma^2(t-t_0)}{2}(k-1) \right) \right] \\ &= E[X(t_0)^k] \exp \left(k \int_{t_0}^t h(\lambda) d\lambda + \frac{k\sigma^2(t-t_0)}{2}(k-1) \right) \end{aligned}$$

y junto con la distribución inicial $P[X(t_0) = x_0] = 1$,

$$E[X(t)^k] = x_0^k \exp \left(k \int_{t_0}^t h(\lambda) d\lambda + \frac{k\sigma^2(t-t_0)}{2}(k-1) \right).$$

Para obtener una expresión de los momentos cruzados, supongamos $s < t$. Entonces

$$\begin{aligned} E[X(t)^{k_1} X(s)^{k_2}] &= E[E[X(t)^{k_1} X(s)^{k_2} | X(s)]] = E[X(s)^{k_2} E[X(t)^{k_1} | X(s)]] \\ &= E \left[X(s)^{k_1} X(s)^{k_2} \exp \left(k_1 \int_s^t h(\lambda) d\lambda + \frac{k_1\sigma^2(t-s)}{2}(k_1-1) \right) \right] \\ &= E[X(s)^{k_1+k_2}] \exp \left(k_1 \int_s^t h(\lambda) d\lambda + \frac{k_1\sigma^2(t-s)}{2}(k_1-1) \right). \end{aligned}$$

De la misma forma, cuando $t < s$ se llega a la expresión

$$E[X(t)^{k_1} X(s)^{k_2}] = E[X(t)^{k_1+k_2}] \exp \left(k_2 \int_t^s h(\lambda) d\lambda + \frac{k_2\sigma^2(s-t)}{2}(k_2-1) \right).$$

En general, la expresión de los momentos cruzados de órdenes k_1 y k_2 será

$$\begin{aligned} E[X(t \vee s)^{k_1} X(t \wedge s)^{k_2}] &= E[X(t \wedge s)^{k_1+k_2}] \times \\ &\quad \times \exp \left(k_1 \int_{t \wedge s}^{t \vee s} h(\lambda) d\lambda + \frac{k_1\sigma^2(t \vee s - t \wedge s)}{2}(k_1-1) \right). \end{aligned}$$

1.3.4. Funciones media y covarianza

La función media se calcula como el momento no centrado de orden $k = 1$,

$$m(t) = E[X(t)] = E[X(t_0)] \exp \left(\int_{t_0}^t h(\lambda) d\lambda \right), \quad t \geq t_0$$

y en particular, tomando la distribución inicial $P[X(t_0) = x_0] = 1$,

$$m(t) = x_0 \exp \left(\int_{t_0}^t h(\lambda) d\lambda \right), \quad t \geq t_0.$$

Por otra parte, considerando $k = 2$ se obtiene

$$E[X(t)^2] = E[X(t_0)^2] \exp \left(2 \int_{t_0}^t h(\lambda) d\lambda + \sigma^2(t - t_0) \right).$$

La función varianza del proceso será, por tanto

$$\begin{aligned} \text{Var}[X(t)] &= E[X(t_0)^2] \exp \left(2 \int_{t_0}^t h(\lambda) d\lambda + \sigma^2(t - t_0) \right) - (E[X(t_0)])^2 \exp \left(2 \int_{t_0}^t h(\lambda) d\lambda \right) \\ &= \exp \left(2 \int_{t_0}^t h(\lambda) d\lambda \right) \left[E[X(t_0)^2] e^{\sigma^2(t-t_0)} - (E[X(t_0)])^2 \right] \\ &= \exp \left(2 \int_{t_0}^t h(\lambda) d\lambda \right) \left[(E[X(t_0)^2] - (E[X(t_0)])^2) e^{\sigma^2(t-t_0)} + (E[X(t_0)])^2 (e^{\sigma^2(t-t_0)} - 1) \right] \\ &= \exp \left(2 \int_{t_0}^t h(\lambda) d\lambda \right) \left[\text{Var}[X(t_0)] e^{\sigma^2(t-t_0)} + (E[X(t_0)])^2 (e^{\sigma^2(t-t_0)} - 1) \right], \quad t \geq t_0 \end{aligned}$$

y si se tiene en cuenta la distribución inicial, queda

$$\text{Var}[X(t)] = x_0^2 \exp \left(2 \int_{t_0}^t h(\lambda) d\lambda \right) \left(e^{\sigma^2(t-t_0)} - 1 \right), \quad t \geq t_0.$$

Por último, dado que

$$E[X(t)] = E[X(s)] \exp \left(\int_s^t h(\lambda) d\lambda \right),$$

la función covarianza se puede expresar, cuando $s < t$ como

$$\begin{aligned} R(t, s) &= \text{Cov}[X(t), X(s)] = E[X(t)X(s)] - E[X(t)]E[X(s)] \\ &= E[X(s)^2] \exp \left(\int_s^t h(\lambda) d\lambda \right) - E[X(s)]E[X(s)] \exp \left(\int_s^t h(\lambda) d\lambda \right) \\ &= (E[X(s)^2] - E[X(s)]^2) \exp \left(\int_s^t h(\lambda) d\lambda \right) \\ &= \text{Var}[X(s)] \exp \left(\int_s^t h(\lambda) d\lambda \right). \end{aligned}$$

Si $t < s$ se obtiene una expresión análoga a la anterior

$$R(t, s) = \text{Var}[X(t)] \exp \left(\int_t^s h(\lambda) d\lambda \right).$$

En general, la expresión de la covarianza es la siguiente

$$R(t, s) = \text{Var}[X(t \wedge s)] \exp\left(\int_{t \wedge s}^{t \vee s} h(\lambda) d\lambda\right), \quad t, s \geq t_0.$$

Suponiendo la distribución inicial $P[X(t_0) = x_0] = 1$, se puede expresar la función covarianza de la siguiente forma

$$\begin{aligned} R(t, s) &= x_0^2 \exp\left(2 \int_{t_0}^{t \wedge s} h(\lambda) d\lambda + \int_{t \wedge s}^{t \vee s} h(\lambda) d\lambda\right) \left(e^{\sigma^2(t \wedge s - t_0)} - 1\right) \\ &= x_0^2 \exp\left(\int_{t_0}^{t \wedge s} h(\lambda) d\lambda + \int_{t_0}^{t \vee s} h(\lambda) d\lambda\right) \left(e^{\sigma^2(t \wedge s - t_0)} - 1\right) \\ &= x_0^2 \exp\left(\int_{t_0}^t h(\lambda) d\lambda + \int_{t_0}^s h(\lambda) d\lambda\right) \left(e^{\sigma^2(t \wedge s - t_0)} - 1\right), \quad t, s \geq t_0. \end{aligned}$$

1.3.5. Otras funciones de interés

Dado que las distribuciones de $X(t)$ y de $X(t)|X(s) = x_s$ son lognormales, se pueden calcular algunas medidas usuales como son los cuantiles y la moda, así como las versiones condicionadas de éstas y de la media.

- Función media condicionada. Dados s y x_s ,

$$m(t|s) = E[X(t)|X(s) = x_s] = x_s \exp\left(\int_s^t h(\lambda) d\lambda\right), \quad t > s \geq t_0.$$

- Función moda

$$M_o(t) = \text{Moda}[X(t)] = E[X(t_0)] \exp\left(\int_{t_0}^t h(\lambda) d\lambda - (t - t_0) \frac{3\sigma^2}{2}\right), \quad t \geq t_0.$$

y, en el caso de distribución inicial degenerada

$$M_o(t) = x_0 \exp\left(\int_{t_0}^t h(\lambda) d\lambda - (t - t_0) \frac{3\sigma^2}{2}\right), \quad t \geq t_0.$$

- Función moda condicionada. Dados s y x_s ,

$$M_o(t|s) = \text{Moda}[X(t)|X(s) = x_s] = x_s \exp\left(\int_s^t h(\lambda) d\lambda - (t - s) \frac{3\sigma^2}{2}\right), \quad t > s \geq t_0.$$

- Función de cuantiles

$$\begin{aligned} C_\alpha(t) &= \text{Cuantil } \alpha \text{ de}[X(t)] = E[X(t_0)] \exp\left(\int_{t_0}^t h(\lambda) d\lambda - (t - t_0) \frac{\sigma^2}{2} + z_\alpha \sigma \sqrt{t - t_0}\right) \\ & \quad t \geq t_0, \end{aligned}$$

donde z_α es el cuantil de orden α de una distribución normal estándar. En el caso de distribución inicial degenerada

$$C_\alpha(t) = x_0 \exp \left(\int_{t_0}^t h(\lambda) d\lambda - (t - t_0) \frac{\sigma^2}{2} + z_\alpha \sigma \sqrt{t - t_0} \right), \quad t \geq t_0.$$

• Función de cuantiles condicionada. Dados s y x_s ,

$$C_\alpha(t|s) = \text{Cuantil } \alpha \text{ de } [X(t)|X(s) = x_s] = x_s \exp \left(\int_s^t h(\lambda) d\lambda - (t - s) \frac{\sigma^2}{2} + z_\alpha \sigma \sqrt{t - s} \right),$$

$$t > s \geq t_0.$$

1.4. Estimación de los parámetros y funciones paramétricas

En este apartado se resumen resultados referidos a la inferencia sobre los parámetros y sobre algunas funciones paramétricas de interés partiendo de un muestreo discreto del proceso de difusión, esto es, de los valores observados del proceso en ciertos instantes de tiempo t_1, t_2, \dots, t_n .

1.4.1. Planteamiento del problema. Notación

Sea $\{X(t); t_0 \leq t \leq T\}$ el proceso de difusión lognormal no homogéneo, del cual se han obtenido, en el apartado anterior, la función de densidad de transición, distribuciones finito-dimensionales y algunas funciones de interés tales como la media, covarianza, moda y cuantiles.

En este apartado se supondrá que la función del tiempo $h(t)$ que aparece en la definición del proceso (1.4) es una combinación lineal de la forma $\beta_0 + \sum_{j=1}^q \beta_j F_j(t)$ donde F_j son funciones continuas que representan las influencias externas al proceso, llamadas factores exógenos, que actúan de forma simultánea sobre la variable en estudio o endógena. Dichas funciones deben ser parcialmente conocidas (al menos debemos tener información suficiente para calcular su integral entre dos instantes cualesquiera de tiempo) y, en cualquier caso, deben ser independientes de parámetros desconocidos.

Usando la siguiente notación

- $a_0 = \beta_0 - \frac{\sigma^2}{2}$ y $a_j = \beta_j$, $j = 1 \dots, q$;
- $\mathbf{a} = (a_0, a_1, \dots, a_q)'$;
- $\bar{\mathbf{u}}(t, s) = \left(t - s, \int_s^t F_1(\tau) d\tau, \dots, \int_s^t F_q(\tau) d\tau \right)'$;

- $\bar{\mathbf{u}}(t, t_0) = \bar{\mathbf{u}}(t),$

y, considerando la distribución inicial $P[X(t_0) = x_0] = 1$, las funciones de interés se pueden expresar como

- Función media

$$m(t) = x_0 \exp \left(\bar{\mathbf{u}}(t)' \mathbf{a} + \frac{1}{2} \sigma^2 (t - t_0) \right).$$

- Función media condicionada. Dados s y x_s

$$m(t|s) = x_s \exp \left(\bar{\mathbf{u}}(t, s)' \mathbf{a} + \frac{1}{2} \sigma^2 (t - s) \right).$$

- Función covarianza

$$R(t, s) = x_0^2 \exp \left(\bar{\mathbf{u}}(t)' \mathbf{a} + \bar{\mathbf{u}}(s)' \mathbf{a} + \frac{\sigma^2}{2} (t - t_0) + \frac{\sigma^2}{2} (s - t_0) \right) \left(e^{\sigma^2 (t \wedge s - t_0)} - 1 \right).$$

- Función moda

$$M_o(t) = x_0 \exp \left(\bar{\mathbf{u}}(t)' \mathbf{a} - (t - t_0) \sigma^2 \right).$$

- Función moda condicionada. Dados s y x_s

$$M_o(t|s) = x_s \exp \left(\bar{\mathbf{u}}(t, s)' \mathbf{a} - (t - s) \sigma^2 \right).$$

- Función de cuantiles

$$C_\alpha(t) = x_0 \exp \left(\bar{\mathbf{u}}(t)' \mathbf{a} + z_\alpha \sigma \sqrt{t - t_0} \right).$$

- Función de cuantiles condicionada. Dados s y x_s

$$C_\alpha(t|s) = x_s \exp \left(\bar{\mathbf{u}}(t, s)' \mathbf{a} + z_\alpha \sigma \sqrt{t - s} \right).$$

El estudio de estas funciones puede hacerse conjuntamente si se estudian funciones más generales de las cuales éstas son casos particulares. En concreto,

$$\begin{aligned} \theta(C, \mathbf{A}(t, s), B(t, s), k) &= C \exp \left(\mathbf{A}(t, s)' \mathbf{a} + B(t, s) \sigma^k \right) \quad \text{y} \\ \theta^*(C, \mathbf{A}(t, s), B(t, s), D(t, s)) &= \theta(C, \mathbf{A}(t, s), B(t, s), 2) - \theta(C, \mathbf{A}(t, s), D(t, s), 2), \end{aligned}$$

con $C > 0$, $k \in \mathbb{N}$, $\mathbf{A}(t, s) \in \mathbb{R}^{q+1}$ y $B(t, s), D(t, s) \in \mathbb{R}$.

Las funciones media, moda y cuantiles, y sus versiones condicionadas, se pueden expresar en términos de la función θ , con la siguiente elección de los argumentos

Función	C	$\mathbf{A}(t, s)$	$B(t, s)$	k
$m(t)$	x_0	$\bar{\mathbf{u}}(t)$	$\frac{t-t_0}{2}$	2
$M_o(t)$	x_0	$\bar{\mathbf{u}}(t)$	$-(t-t_0)$	2
$C_\alpha(t)$	x_0	$\bar{\mathbf{u}}(t)$	$z_\alpha \sqrt{t-t_0}$	1
$m(t s)$	x_s	$\bar{\mathbf{u}}(t, s)$	$\frac{t-s}{2}$	2
$M_o(t s)$	x_s	$\bar{\mathbf{u}}(t, s)$	$-(t-s)$	2
$C_\alpha(t s)$	x_s	$\bar{\mathbf{u}}(t, s)$	$z_\alpha \sqrt{t-s}$	1

La función covarianza se expresa como una función del tipo θ^* como

$$R(t, s) = \theta^* \left(x_0^2, \bar{\mathbf{u}}(t) + \bar{\mathbf{u}}(s), \frac{t+s}{2} + t \wedge s - 2t_0, \frac{t+s}{2} - t_0 \right).$$

Las funciones del tipo $\theta(C, \mathbf{A}(t, s), B(t, s), k)$ y $\theta^*(C, \mathbf{A}(t, s), B(t, s), D(t, s))$ son funciones dependientes del tiempo. La inferencia sobre ellas se realizará para valores fijos del tiempo, es decir, para las correspondientes funciones paramétricas. A partir de ahora, para valores fijos de t y s , denotaremos a tales funciones $\theta(C, \mathbf{A}_{t,s}, B_{t,s}, k)$ y $\theta^*(C, \mathbf{A}_{t,s}, B_{t,s}, D_{t,s})$.

1.4.2. Estimación máximo verosímil de \mathbf{a} y σ^2

Debido a la naturaleza de los datos que aparecen en las aplicaciones que trataremos, nos limitamos a considerar el caso de disponer de una única trayectoria de observaciones del proceso, pudiendo extenderse el estudio realizado de forma inmediata al caso de considerar más de una trayectoria.

Sea t_1, t_2, \dots, t_n , un conjunto de instantes de tiempo donde el proceso va a ser observado, esto es, se observarán las variables $X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n)$ cuyos valores constituirán la muestra base del estudio inferencial, x_1, x_2, \dots, x_n . Supongamos además que $P[X(t_1) = x_1] = 1$.

La función de verosimilitud asociada a x_1, x_2, \dots, x_n es

$$\begin{aligned} L_{x_1, x_2, \dots, x_n}(\mathbf{a}, \sigma^2) &= \prod_{i=2}^n f(x_i, t_i | x_{i-1}, t_{i-1}) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}} (\sigma^2)^{\frac{(n-1)}{2}}} \prod_{i=2}^n \frac{1}{x_i (t_i - t_{i-1})^{\frac{1}{2}}} \exp \left(\frac{-1}{2\sigma^2} \left[(t_i - t_{i-1})^{-\frac{1}{2}} [\ln(x_i) - \ln(x_{i-1})] - \mathbf{u}'_i \mathbf{a} \right]^2 \right) \end{aligned}$$

con $\mathbf{u}_i = \mathbf{u}(t_i, t_{i-1}) = (t_i - t_{i-1})^{-\frac{1}{2}} \bar{\mathbf{u}}(t_i, t_{i-1})$. Consideraremos que \mathbf{u}_i , $i = 2, \dots, n$ son linealmente independientes.

Se transforma la muestra obtenida en la forma $v_1 = x_1$ y $v_i = (t_i - t_{i-1})^{-\frac{1}{2}} \ln(\frac{x_i}{x_{i-1}})$, $i = 2, \dots, n$, con lo que la función de verosimilitud para la muestra transformada, teniendo en cuenta que v_1 tiene densidad delta de Dirac, es

$$L_{v_2, v_3, \dots, v_n}(\mathbf{a}, \sigma^2) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}} (\sigma^2)^{\frac{n-1}{2}}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=2}^n (v_i - \mathbf{u}'_i \mathbf{a})^2\right).$$

Si notamos por

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= (v_2, \dots, v_n)'_{(n-1) \times 1} \quad \text{y} \\ \mathbf{U} &= (\mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n)_{(q+1) \times (n-1)} \end{aligned}$$

y suponemos que $n > q + 2$, con lo que $\text{rango}(\mathbf{U}) = q + 1$, se deduce que la distribución de \mathbf{v} es normal $(n - 1)$ -dimensional

$$\mathbf{v} \sim \mathcal{N}_{n-1}(\mathbf{U}'\mathbf{a}, \sigma^2 \mathbf{I}_{n-1}),$$

y de ello, que v_2, \dots, v_n son independientes.

Los estimadores máximo verosímiles (EMV) de \mathbf{a} y σ^2 , cuya obtención puede verse en [20], son

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{a}} &= (\mathbf{U}\mathbf{U}')^{-1} \mathbf{U}\mathbf{v} \quad \text{y} \\ \hat{\sigma}^2 &= \frac{1}{n-1} \mathbf{v}' (\mathbf{I}_{n-1} - \mathbf{U}'(\mathbf{U}\mathbf{U}')^{-1} \mathbf{U}) \mathbf{v}, \end{aligned}$$

con distribuciones asociadas

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{a}} &\sim \mathcal{N}_{q+1}(\mathbf{a}, \sigma^2 (\mathbf{U}\mathbf{U}')^{-1}) \quad \text{y} \\ \frac{(n-1)\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} &\sim \chi^2(n-q-2). \end{aligned}$$

De la distribución de $\hat{\mathbf{a}}$ se deduce que el estimador $\hat{\mathbf{a}}$ es insesgado para \mathbf{a} . Por otra parte, definiendo

$$S^2 = \frac{(n-1)\hat{\sigma}^2}{n-q-2}$$

se tiene que S^2 es un estimador insesgado de σ^2 con

$$\frac{(n-q-2)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-q-2).$$

Además, los estimadores $\hat{\mathbf{a}}$ y $\hat{\sigma}^2$ son independientes y son conjuntamente suficientes y completos para (\mathbf{a}, σ^2) (ver [27]).

1.4.3. Estimación máximo verosímil (EMV) de ciertas funciones paramétricas

Gutiérrez y otros en [22] realizan un estudio sobre la estimación de la función media del proceso de difusión lognormal con factores exógenos, desde el punto de vista de la estimación máximo verosímil e insesgada y obteniendo la eficiencia relativa del EMV con respecto al UMVUE. Un caso más general, que contempla el estudio de las funciones paramétricas θ y θ^* , aparece en [25], artículo en el cual se trata la función $\theta(C, \mathbf{A}(t, s), B(t, s), k)$ con $k = 2$ y la función $\theta^*(C, \mathbf{A}(t, s), B(t, s), D(t, s))$ desde el punto de vista de su estimación máximo verosímil e insesgada y se calcula la eficiencia relativa del EMV con respecto al UMVUE de dichas funciones. El estudio de estas funciones contempla como casos particulares a la función media del proceso, función moda y función covarianza.

Generalizando las funciones θ al caso en que k toma cualquier valor, Gutiérrez y otros en [31], dan las expresiones del EMV y del UMVUE de estas funciones paramétricas, así como el UMVUE y la eficiencia relativa en los casos en que $k = 1$ y $k = 2$, esto es, para las funciones media, moda y cuantiles. Además se tiene la expresión del EMV, el UMVUE y la eficiencia relativa del primero con respecto al segundo en el caso de la función paramétrica θ^* , utilizada para la estimación de la función covarianza.

En esta sección se estudian las funciones paramétricas θ y θ^* siguiendo las ideas expuestas en [25] y [31], obteniéndose las expresiones del EMV y el UMVUE de las funciones paramétricas, así como realizándose el estudio de la eficiencia relativa del EMV respecto al UMVUE para este tipo de funciones.

El EMV de $\theta(C, \mathbf{A}_{t,s}, B_{t,s}, k)$ es

$$\hat{\theta}(C, \mathbf{A}_{t,s}, B_{t,s}, k) = C \exp(\mathbf{A}'_{t,s} \hat{\mathbf{a}} + B_{t,s} \hat{\sigma}^k),$$

donde $\hat{\mathbf{a}}$ y $\hat{\sigma}^2$ son los estimadores máximo verosímiles de \mathbf{a} y σ^2 .

Teniendo en cuenta que las funciones θ^* se expresan como combinación lineal de funciones del tipo θ , el EMV de este tipo de funciones, es

$$\hat{\theta}^*(C, \mathbf{A}_{t,s}, B_{t,s}, D_{t,s}) = \hat{\theta}(C, \mathbf{A}_{t,s}, B_{t,s}, 2) - \hat{\theta}(C, \mathbf{A}_{t,s}, D_{t,s}, 2).$$

1.4.4. Distribución del EMV de las funciones θ

Para obtener la distribución de $\hat{\theta}(C, \mathbf{A}_{t,s}, B_{t,s}, k)$, se debe tener en cuenta que $\hat{\mathbf{a}}$ y $\hat{\sigma}^2$ son independientes y tienen distribuciones conocidas. De ello se deduce en primer lugar la independencia de $\mathbf{A}_{t,s} \hat{\mathbf{a}}$ y $B_{t,s} \hat{\sigma}^k$ y, en segundo lugar, las distribuciones asociadas a $\mathbf{A}_{t,s} \hat{\mathbf{a}}$ y $B_{t,s} \hat{\sigma}^k$. La distribución de $\mathbf{A}_{t,s} \hat{\mathbf{a}} + B_{t,s} \hat{\sigma}^k$ se calculará como convolución y de aquí se deduce la distribución de $\hat{\theta}(C, \mathbf{A}_{t,s}, B_{t,s}, k)$.

En la obtención de las distribuciones asociadas a $\mathbf{A}'_{t,s} \hat{\mathbf{a}}$ y a $B_{t,s} \hat{\sigma}^k$, por una parte se tiene

$$\mathbf{A}_{t,s} \hat{\mathbf{a}} \sim \mathcal{N}(\mathbf{A}'_{t,s} \mathbf{a}, \sigma^2 \mathbf{A}'_{t,s} (\mathbf{U}\mathbf{U}')^{-1} \mathbf{A}_{t,s}) \equiv \mathcal{N}(\mathbf{A}'_{t,s} \mathbf{a}, \sigma^2 A_{t,s}^U)$$

donde se ha denotado como $A_{t,s}^U$ a $\mathbf{A}'_{t,s}(\mathbf{U}\mathbf{U}')^{-1}\mathbf{A}_{t,s}$.

Por otra parte, la distribución de $B_{t,s}\hat{\sigma}^k$ se puede calcular a partir de la distribución de $\hat{\sigma}^2$ tomando

$$U = \frac{(n-1)\hat{\sigma}^2}{\sigma^2}$$

$$f_U(u) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n-q-2}{2}\right) 2^{\frac{n-q-2}{2}}} u^{\frac{n-q-2}{2}-1} e^{-\frac{u}{2}}, \quad u > 0,$$

y realizando el cambio de variable dado por

$$V = B_{t,s}\hat{\sigma}^k = B_{t,s} [\hat{\sigma}^2]^{\frac{k}{2}} = B_{t,s} \left(\frac{U\sigma^2}{n-1} \right)^{\frac{k}{2}}$$

$$U = \frac{V^{\frac{2}{k}}(n-1)}{B_{t,s}^{\frac{2}{k}}\sigma^2}$$

$$\frac{dU}{dV} = \frac{\frac{2}{k}V^{\frac{2}{k}-1}(n-1)}{B_{t,s}^{\frac{2}{k}}\sigma^2},$$

la función de densidad de V se obtiene como

$$f_V(v) = \frac{2v^{\frac{n-q-2}{k}-1} e^{-\frac{(n-1)v^{2/k}}{2\sigma^2 B_{t,s}^{2/k}}}}{k\Gamma\left(\frac{n-q-2}{2}\right) \left(2\frac{B_{t,s}^{2/k}\sigma^2}{n-1}\right)^{\frac{n-q-2}{2}}}.$$

La distribución de $W = \mathbf{A}'_{t,s}\hat{\mathbf{a}} + B_{t,s}\hat{\sigma}^k$ se calcula como la convolución siguiente

$$f_W(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f_V(v)f_U(w-v)dv$$

obteniéndose

$$f_W(w) = \frac{\exp\left(-\frac{[w-\mathbf{A}'_{t,s}\hat{\mathbf{a}}]^2}{2\sigma^2 A_{t,s}^U}\right)}{\sigma\sqrt{2\pi A_{t,s}^U}} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{j=0}^l \binom{l}{j} \frac{(-1)^{l+j}}{l!} \frac{2^j (w - \mathbf{A}'_{t,s}\hat{\mathbf{a}})^j}{(2\sigma^2 A_{t,s}^U)^l} E[V^{2l-j}].$$

La esperanza $E[V^{2l-j}]$ se puede calcular, obteniéndose a partir de ella

$$f_W(w) = \frac{\exp\left(-\frac{[w-\mathbf{A}'_{t,s}\hat{\mathbf{a}}]^2}{2\sigma^2 A_{t,s}^U}\right)}{\sigma\sqrt{2\pi A_{t,s}^U}} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n-q-2}{2}\right)} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{j=0}^l \frac{(-1)^{l+j}}{j!(l-j)!} \Gamma\left(\frac{n-q-2+2kl-kj}{2}\right)$$

$$\times \left[\frac{2^{k-1} B_{t,s}^2 \sigma^{2(k-1)}}{(n-1)^k A_{t,s}^U} \right]^l \left[\frac{(w - \mathbf{A}'_{t,s}\hat{\mathbf{a}})(n-1)^{k/2}}{2^{k/2-1} B_{t,s} (\sigma^2)^{k/2}} \right]^j.$$

En términos de polinomios de Hermite, esta expresión se puede reescribir, para $k \in \mathbb{N}$ como sigue

$$f_W(w) = \frac{\exp\left(-\frac{[w - \mathbf{A}'_{t,s}\mathbf{a}]^2}{2\sigma^2 A_{t,s}^U}\right)}{\sigma \sqrt{2\pi A_{t,s}^U} \Gamma\left[\frac{n-q-2}{2}\right]} \sum_{l=0}^{\infty} \left[\frac{B_{t,s} 2^{\frac{k-1}{2}} \sigma^{k-1}}{(n-1)^{\frac{k}{2}} \sqrt{A_{t,s}^U}} \right]^l \Gamma\left[\frac{n-q-2+kl}{2}\right] \frac{1}{l!} H_l\left(\frac{w - \mathbf{A}'_{t,s}\mathbf{a}}{\sigma \sqrt{2A_{t,s}^U}}\right)$$

con

$$H_l(\gamma) = l! \sum_{\alpha=0}^{\lfloor l/2 \rfloor} \frac{(-1)^\alpha}{(l-2\alpha)! \alpha!} (2\gamma)^{l-2\alpha},$$

donde $\lfloor a \rfloor$ denota la parte entera de a .

La función de densidad de $\hat{\theta} = C \exp(\mathbf{A}'_{t,s}\hat{\mathbf{a}} + B_{t,s}\hat{\sigma}^k)$ se puede expresar por tanto como

$$f_{\hat{\theta}}(\hat{\theta}) = \frac{\exp\left(-\frac{[\ln \frac{\hat{\theta}}{C} - \mathbf{A}'_{t,s}\mathbf{a}]^2}{2\sigma^2 A_{t,s}^U}\right)}{\hat{\theta} \sigma \sqrt{2\pi A_{t,s}^U} \Gamma\left(\frac{n-q-2}{2}\right)} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{B_{t,s} 2^{\frac{k-1}{2}} \sigma^{k-1}}{(n-1)^{\frac{k}{2}} \sqrt{A_{t,s}^U}} \right)^l \Gamma\left[\frac{n-q-2+kl}{2}\right] \frac{1}{l!} \\ \times H_l\left(\frac{\ln\left(\frac{\hat{\theta}}{C}\right) - \mathbf{A}'_{t,s}\mathbf{a}}{\sigma \sqrt{2A_{t,s}^U}}\right).$$

1.4.5. Error cuadrático medio del EMV de las funciones paramétricas

Teniendo en cuenta la independencia entre $\hat{\mathbf{a}}$ y $\hat{\sigma}^2$, para $m \in \mathbb{N}$ se puede calcular

$$E\left[\left(\hat{\theta}(C, \mathbf{A}_{t,s}, B_{t,s}, k)\right)^m\right] = C^m E\left[\exp(m\mathbf{A}'_{t,s}\hat{\mathbf{a}})\right] E\left[\exp(mB_{t,s}\hat{\sigma}^k)\right] \\ = C^m M_{\mathbf{A}'_{t,s}\hat{\mathbf{a}}}(m) M_{B_{t,s}\hat{\sigma}^k}(m).$$

Por una parte, la función generatriz de momentos de $\mathbf{A}_{t,s}\hat{\mathbf{a}}$, evaluada en m , es

$$M_{\mathbf{A}'_{t,s}\hat{\mathbf{a}}}(m) = \frac{1}{C^m} [\theta(C, \mathbf{A}_{t,s}, B_{t,s}, k)]^m \exp\left(m\sigma^2 \left[\frac{m\mathbf{A}_{t,s}^U}{2} - B_{t,s}\sigma^{k-2}\right]\right),$$

y por otra parte, la función generatriz de momentos de $B_{t,s}\hat{\sigma}^k$, evaluada en m es

$$M_{B_{t,s}\hat{\sigma}^k}(m) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{n-q-2+kl}{2}\right)}{l! \Gamma\left(\frac{n-q-2}{2}\right)} \left[\frac{2\sigma^2 m^{\frac{2}{k}} B_{t,s}^{\frac{2}{k}}}{n-1} \right]^{\frac{kl}{2}} = \Omega_k(mB_{t,s})$$

donde ³

$$\Omega_k(\gamma) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{n-q-2+kl}{2}\right)}{l! \Gamma\left(\frac{n-q-2}{2}\right)} \left[\frac{2\sigma^2 \gamma^{\frac{2}{k}}}{n-1} \right]^{\frac{kl}{2}}$$

y por lo tanto

$$E \left[\left(\hat{\theta}(C, \mathbf{A}_{t,s}, B_{t,s}, k) \right)^m \right] = [\theta(C, \mathbf{A}_{t,s}, B_{t,s}, k)]^m \exp \left(m\sigma^2 \left[\frac{mA_{t,s}^U}{2} - B_{t,s}\sigma^{k-2} \right] \right) \Omega_k(mB_{t,s}).$$

El ECM será entonces

$$\begin{aligned} ECM[\hat{\theta}(C, \mathbf{A}_{t,s}, B_{t,s}, k)] &= E \left[\left(\hat{\theta}(C, \mathbf{A}_{t,s}, B_{t,s}, k) - \theta(C, \mathbf{A}_{t,s}, B_{t,s}, k) \right)^2 \right] \\ &= E \left[\left(\hat{\theta}(C, \mathbf{A}_{t,s}, B_{t,s}, k) \right)^2 \right] \\ &\quad + [\theta(C, \mathbf{A}_{t,s}, B_{t,s}, k)]^2 - 2\theta(C, \mathbf{A}_{t,s}, B_{t,s}, k) E \left[\hat{\theta}(C, \mathbf{A}_{t,s}, B_{t,s}, k) \right] \\ &= [\theta(C, \mathbf{A}_{t,s}, B_{t,s}, k)]^2 \left[1 + \exp(2\sigma^2[A_{t,s}^U - B_{t,s}\sigma^{k-2}]) \Omega_k(2B_{t,s}) \right. \\ &\quad \left. - 2 \exp \left(\sigma^2 \left[\frac{A_{t,s}^U}{2} - B_{t,s}\sigma^{k-2} \right] \right) \Omega_k(B_{t,s}) \right]. \end{aligned}$$

Obtenemos los momentos de las funciones $\hat{\theta}^*$ usando

$$(\theta(C, \mathbf{A}_{t,s}, B_{t,s}, 2))^{k_1} (\theta(C, \mathbf{A}_{t,s}, D_{t,s}, 2))^{k_2} = \theta(C^{k_1+k_2}, (k_1+k_2)\mathbf{A}_{t,s}, k_1B_{t,s} + k_2D_{t,s}, 2)$$

en el desarrollo de

$$E \left[\left(\hat{\theta}(C, \mathbf{A}_{t,s}, B_{t,s}, 2) - \hat{\theta}(C, \mathbf{A}_{t,s}, D_{t,s}, 2) \right)^m \right].$$

Así,

$$\begin{aligned} &E \left[\left(\hat{\theta}^*(C, \mathbf{A}_{t,s}, B_{t,s}, D_{t,s}) \right)^m \right] \\ &= (\theta^*(C, \mathbf{A}_{t,s}, B_{t,s}, D_{t,s}))^m \frac{\exp \left(m^2 \sigma^2 \frac{A_{t,s}^U}{2} \right)}{(\exp(B_{t,s}\sigma^2) - \exp(D_{t,s}\sigma^2))^m} \\ &\quad \times \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} (-1)^j \Omega_2((m-j)B_{t,s} + jD_{t,s}). \end{aligned}$$

³Para k=2

$$\begin{aligned} B_{t,s}\hat{\sigma}^2 &\sim G \left(\frac{n-q-2}{2}, \frac{n-1}{2B_{t,s}\sigma^2} \right) \\ \Omega_2(\gamma) &= \left(1 - \frac{2\sigma^2}{n-1} \gamma \right)^{-\frac{n-q-2}{2}}, \gamma < \frac{n-1}{2\sigma^2} \end{aligned}$$

A partir de aquí se tienen los valores de la esperanza y la varianza siguientes

$$\begin{aligned} E \left[\hat{\theta}^*(C, \mathbf{A}_{t,s}, B_{t,s}, D_{t,s}) \right] \\ = \theta^*(C, \mathbf{A}_{t,s}, B_{t,s}, D_{t,s}) \frac{\exp \left(\sigma^2 \frac{A_{t,s}^U}{2} \right)}{\exp(B_{t,s}\sigma^2) - \exp(D_{t,s}\sigma^2)} (\Omega_2(B_{t,s}) - \Omega_2(D_{t,s})) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} Var \left[\hat{\theta}^*(C, \mathbf{A}_{t,s}, B_{t,s}, D_{t,s}) \right] &= (\theta^*(C, \mathbf{A}_{t,s}, B_{t,s}, D_{t,s}))^2 \frac{\exp(\sigma^2 A_{t,s}^U)}{(\exp(B_{t,s}\sigma^2) - \exp(D_{t,s}\sigma^2))^2} \\ &\times \left[\exp(\sigma^2 A_{t,s}^U) (\Omega_2(2B_{t,s}) - 2\Omega_2(B_{t,s} + D_{t,s}) + \Omega_2(2D_{t,s})) - (\Omega_2(B_{t,s}) - \Omega_2(D_{t,s}))^2 \right]. \end{aligned}$$

Finalmente, el error cuadrático medio de las funciones θ^* es

$$\begin{aligned} ECM \left[\hat{\theta}^*(C, \mathbf{A}_{t,s}, B_{t,s}, D_{t,s}) \right] &= (\theta^*(C, \mathbf{A}_{t,s}, B_{t,s}, D_{t,s}))^2 \left[\frac{\exp(2\sigma^2 A_{t,s}^U)}{(\exp(B_{t,s}\sigma^2) - \exp(D_{t,s}\sigma^2))^2} \right. \\ &\times [\Omega_2(2B_{t,s}) - 2\Omega_2(B_{t,s} + D_{t,s}) + \Omega_2(2D_{t,s})] \\ &\left. + 2 \frac{\exp \left(\sigma^2 \frac{A_{t,s}^U}{2} \right)}{\exp(B_{t,s}\sigma^2) - \exp(D_{t,s}\sigma^2)} (\Omega_2(B_{t,s}) - \Omega_2(D_{t,s})) + 1 \right]. \end{aligned}$$

1.4.6. Estimación insesgada (UMVUE) de las funciones paramétricas

Para obtener la expresión del UMVUE de la función $\theta(C, \mathbf{A}_{t,s}, B_{t,s}, k)$ se busca una función de $\hat{\mathbf{a}}$ y $\hat{\sigma}^2$ que sea insesgada en $\theta(C, \mathbf{A}_{t,s}, B_{t,s}, k)$.

Teniendo en cuenta la distribución de $\mathbf{A}'_{t,s} \hat{\mathbf{a}}$, se tiene

$$E[\exp(\mathbf{A}'_{t,s} \hat{\mathbf{a}})] = \exp \left(\mathbf{A}'_{t,s} \mathbf{a} + \frac{1}{2} \sigma^2 A_{t,s}^U \right)$$

que se puede expresar como el producto

$$\exp(\mathbf{A}'_{t,s} \mathbf{a} + B_{t,s} \sigma^k) \exp \left(\sigma^2 \left[\frac{1}{2} A_{t,s}^U - B_{t,s} \sigma^{k-2} \right] \right).$$

Como $\hat{\mathbf{a}}$ y $\hat{\sigma}^2$ son independientes, se debe encontrar una función $1(\hat{\sigma})$ verificando

$$E[1(\hat{\sigma})] = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{j=0}^l \frac{(-1)^{l-j} B_{t,s}^j (A_{t,s}^U)^{l-j}}{j!(l-j)!2^{l-j}} \sigma^{kj+2(l-j)}.$$

Dicha función $1(\hat{\sigma})$ es

$$1(\hat{\sigma}) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{j=0}^l \frac{(-1)^{l-j} B_{t,s}^j (A_{t,s}^U)^{l-j} (n-1)^{\frac{kj}{2}+l-j} \Gamma\left(\frac{n-q-2}{2}\right)}{j!(l-j)!\Gamma\left(\frac{n-q-2+kj}{2}+l-j\right) 2^{\frac{kj}{2}+2(l-j)}} \hat{\sigma}^{kj+2(l-j)}$$

y con ello, el estimador insesgado de mínima varianza (UMVUE) viene dado por

$$\hat{\theta}_I(C, \mathbf{A}_{t,s}, B_{t,s}, k) = C \exp(\mathbf{A}'_{t,s} \hat{\mathbf{a}}) 1(\hat{\sigma}).$$

Para la estimación de la función media o moda se utiliza la función $\theta(C, \mathbf{A}_{t,s}, B_{t,s}, k)$ con $k = 2$, mientras que para la de la función de cuantiles, se toma $k = 1$. Para obtener el UMVUE de $\theta(C, \mathbf{A}_{t,s}, B_{t,s}, k)$ en estos dos casos particulares de especial interés, $1(\hat{\sigma})$ se puede expresar de forma particular, en términos de polinomios de Hermite cuando $k = 1$ o de una función hipergeométrica generalizada cuando $k = 2$.

El procedimiento que se sigue para expresar esta función en los casos particulares citados puede verse los trabajos de Gutiérrez y otros [31] y Rico [51] y consiste en separar los términos pares e impares de la suma, obteniendo la expresión de la suma de los términos por separado, de forma que se obtienen las siguientes particularizaciones:

- $k = 1 \Rightarrow 1(\hat{\sigma}) = \Gamma\left(\frac{n-q-2}{2}\right) \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(\hat{\sigma} \sqrt{(n-1)A_{t,s}^U})^l}{l! \Gamma\left(\frac{n-q-2+l}{2}\right) 2^l} H_l\left(\frac{B_{t,s}}{\sqrt{2A_{t,s}^U}}\right)$
- $k = 2 \Rightarrow 1(\hat{\sigma}) = {}_0F_1\left(\frac{n-q-2}{2}; \frac{(n-1)[B_{t,s} - \frac{1}{2}A_{t,s}^U]}{2} \hat{\sigma}^2\right)$

y por lo tanto

$$\hat{\theta}_I(C, \mathbf{A}_{t,s}, B_{t,s}, 1) = C \exp(\mathbf{A}'_{t,s} \hat{\mathbf{a}}) \Gamma\left(\frac{n-q-2}{2}\right) \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(\hat{\sigma} \sqrt{(n-1)A_{t,s}^U})^l}{l! \Gamma\left(\frac{n-q-2+l}{2}\right) 2^l} H_l\left(\frac{B_{t,s}}{\sqrt{2A_{t,s}^U}}\right) \quad y$$

$$\hat{\theta}_I(C, \mathbf{A}_{t,s}, B_{t,s}, 2) = C \exp(\mathbf{A}'_{t,s} \hat{\mathbf{a}}) {}_0F_1\left(\frac{n-q-2}{2}; \frac{(n-1)[B_{t,s} - \frac{1}{2}A_{t,s}^U]}{2} \hat{\sigma}^2\right).$$

Para la estimación de la función covarianza se utiliza la función $\theta^*(C, \mathbf{A}_{t,s}, B_{t,s}, D_{t,s})$, que es combinación lineal de funciones del tipo anterior con $k = 2$. Aplicando la propiedad de linealidad, su UMVUE es

$$\hat{\theta}_I^*(C, \mathbf{A}_{t,s}, B_{t,s}, D_{t,s}) = \hat{\theta}_I(C, \mathbf{A}_{t,s}, B_{t,s}, 2) - \hat{\theta}_I(C, \mathbf{A}_{t,s}, D_{t,s}, 2).$$

1.4.7. Eficiencia relativa del EMV respecto al UMVUE para las funciones θ

El estudio de la eficiencia del EMV respecto al UMVUE de las funciones paramétricas estudiadas $\theta(C, \mathbf{A}_{t,s}, B_{t,s}, k)$ se realizará para los casos particulares en que $k = 1$ y $k = 2$.

Eficiencia relativa del EMV respecto al UMVUE en el caso particular $k = 1$

La expresión del EMV de las funciones θ cuando $k = 1$ es

$$\hat{\theta}(C, \mathbf{A}_{t,s}, B_{t,s}, 1) = C \exp(A'_{t,s} \hat{\mathbf{a}} + B_{t,s} \hat{\sigma}).$$

El error cuadrático medio del estimador máximo verosímil en este caso particular es

$$\begin{aligned} ECM[\hat{\theta}(C, \mathbf{A}_{t,s}, B_{t,s}, 1)] &= [\theta(C, \mathbf{A}_{t,s}, B_{t,s}, 1)]^2 \\ &\times \left(1 + \exp(2\sigma[\sigma A_{t,s}^U - B_{t,s}]) \Omega_1(2B_{t,s}) - 2 \exp\left(\sigma\left[\frac{\sigma A_{t,s}^U}{2} - B_{t,s}\right]\right) \Omega_1(B_{t,s}) \right) \end{aligned}$$

con

$$\Omega_1(\gamma) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n-q-2}{2}\right)} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{n-q-2+l}{2}\right)}{l!} \left[\sqrt{\frac{2}{n-1}} \sigma \gamma \right]^l.$$

Por otra parte, dado que $\hat{\theta}_I(C, \mathbf{A}_{t,s}, B_{t,s}, 1)$ es insesgado, el error cuadrático medio coincide con la varianza, siendo

$$\begin{aligned} Var[\hat{\theta}_I(C, \mathbf{A}_{t,s}, B_{t,s}, 1)] &= E\left[\left(\hat{\theta}_I(C, \mathbf{A}_{t,s}, B_{t,s}, 1)\right)^2\right] - \left(E\left[\hat{\theta}_I(C, \mathbf{A}_{t,s}, B_{t,s}, 1)\right]\right)^2 \\ &= [\theta(C, \mathbf{A}_{t,s}, B_{t,s}, 1)]^2 \left[\exp(2\sigma[\sigma A_{t,s}^U - B_{t,s}]) \Gamma\left(\frac{n-q-2}{2}\right) \right. \\ &\quad \times \left. \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{n-q-2+l+m}{2}\right)}{l!m! \Gamma\left(\frac{n-q-2+l}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n-q-2+m}{2}\right)} (A_{t,s}^U \sigma^2)^{\frac{l+m}{2}} H_l\left(\frac{B_{t,s}}{\sqrt{2A_{t,s}^U}}\right) H_m\left(\frac{B_{t,s}}{\sqrt{2A_{t,s}^U}}\right) - 1 \right]. \end{aligned}$$

Una vez calculado el error cuadrático medio del EMV y la varianza del UMVUE, se calcula la eficiencia relativa como el cociente

$$eff_{\theta(C, \mathbf{A}_{t,s}, B_{t,s}, 1)}(\hat{\theta}(C, \mathbf{A}_{t,s}, B_{t,s}, 1), \hat{\theta}_I(C, \mathbf{A}_{t,s}, B_{t,s}, 1)) = \frac{Var[\hat{\theta}_I(C, \mathbf{A}_{t,s}, B_{t,s}, 1)]}{ECM[\hat{\theta}(C, \mathbf{A}_{t,s}, B_{t,s}, 1)]}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\exp(2\sigma[\sigma A_{t,s}^U - B_{t,s}]) \Gamma\left(\frac{n-q-2}{2}\right)}{1 + \exp(2\sigma[\sigma A_{t,s}^U - B_{t,s}]) \Omega_1(2B_{t,s}) - 2 \exp\left(\sigma\left[\frac{\sigma A_{t,s}^U}{2} - B_{t,s}\right]\right) \Omega_1(B_{t,s})} \\
&\times \left[\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{n-q-2+l+m}{2}\right)}{l!m! \Gamma\left(\frac{n-q-2+l}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n-q-2+m}{2}\right)} (A_{t,s}^U \sigma^2)^{\frac{l+m}{2}} H_l\left(\frac{B_{t,s}}{\sqrt{2A_{t,s}^U}}\right) H_m\left(\frac{B_{t,s}}{\sqrt{2A_{t,s}^U}}\right) \right] \\
&- \frac{1}{1 + \exp(2\sigma[\sigma A_{t,s}^U - B_{t,s}]) \Omega_1(2B_{t,s}) - 2 \exp\left(\sigma\left[\frac{\sigma A_{t,s}^U}{2} - B_{t,s}\right]\right) \Omega_1(B_{t,s})}.
\end{aligned}$$

Eficiencia relativa del EMV respecto al UMVUE en el caso particular $k = 2$

Cuando $k = 2$ el EMV tiene la expresión siguiente

$$\hat{\theta}(C, \mathbf{A}_{t,s}, B_{t,s}, 2) = C \exp(\mathbf{A}'_{t,s} \hat{\mathbf{a}} + B_{t,s} \hat{\sigma}^2).$$

El error cuadrático medio del EMV en este caso particular es

$$\begin{aligned}
ECM[\hat{\theta}(C, \mathbf{A}_{t,s}, B_{t,s}, 2)] &= [\theta(C, \mathbf{A}_{t,s}, B_{t,s}, 2)]^2 \\
&\times \left[1 + \exp(2\sigma^2[A_{t,s}^U - B_{t,s}]) \Omega_2(2B_{t,s}) - 2 \exp\left(\sigma^2\left[\frac{A_{t,s}^U}{2} - B_{t,s}\right]\right) \Omega_2(B_{t,s}) \right].
\end{aligned}$$

La varianza del UMVUE es

$$\begin{aligned}
ECM\left(\hat{\theta}_I(C, \mathbf{A}_{t,s}, B_{t,s}, 2)\right) &= Var[\hat{\theta}_I(C, \mathbf{A}_{t,s}, B_{t,s}, 2)] = \\
&= (\theta(C, \mathbf{A}_{t,s}, B_{t,s}, 2))^2 \left[\exp(\sigma^2 A_{t,s}^U) {}_0F_1\left(\frac{n-q-2}{2}; \left[B_{t,s} - \frac{1}{2}A_{t,s}^U\right]^2 \sigma^4\right) - 1 \right].
\end{aligned}$$

Una vez obtenidos el error cuadrático medio del EMV y del UMVUE, la eficiencia relativa se puede expresar como

$$\begin{aligned}
eff_{\theta(C, \mathbf{A}_{t,s}, B_{t,s}, 2)}(\hat{\theta}(C, \mathbf{A}_{t,s}, B_{t,s}, 2), \hat{\theta}_I(C, \mathbf{A}_{t,s}, B_{t,s}, 2)) &= \frac{Var[\hat{\theta}_I(C, \mathbf{A}_{t,s}, B_{t,s}, 2)]}{ECM[\hat{\theta}(C, \mathbf{A}_{t,s}, B_{t,s}, 2)]} \\
&= \frac{\exp(\sigma^2 A_{t,s}^U) {}_0F_1\left(\frac{n-q-2}{2}; \left[B_{t,s} - \frac{1}{2}A_{t,s}^U\right]^2 \sigma^4\right) - 1}{1 + \exp(2\sigma^2[A_{t,s}^U - B_{t,s}]) \Omega_2(2B_{t,s}) - 2 \exp\left(\sigma^2\left[\frac{1}{2}A_{t,s}^U - B_{t,s}\right]\right) \Omega_2(B_{t,s})}.
\end{aligned}$$

1.4.8. Eficiencia relativa del EMV respecto al UMVUE para las funciones θ^*

El error cuadrático medio de θ_I^* coincide con su varianza, siendo

$$\begin{aligned} \text{Var}[\hat{\theta}_I^*(C, \mathbf{A}_{t,s}, B(t,s), D(t,s))] &= (\theta^*(C, \mathbf{A}_{t,s}, B_{t,s}, D_{t,s}))^2 \\ &\times \left(\frac{\exp(A_{t,s}^U \sigma^2)}{(\exp(B_{t,s} \sigma^2) - \exp(D_{t,s} \sigma^2))^2} \left[\exp(2\sigma^2 B_{t,s}) {}_0F_1 \left(\frac{n-q-2}{2}; (B_{t,s} - \frac{1}{2} A_{t,s}^U)^2 \sigma^4 \right) \right. \right. \\ &+ \exp(2\sigma^2 D_{t,s}) {}_0F_1 \left(\frac{n-q-2}{2}; (D_{t,s} - \frac{1}{2} A_{t,s}^U)^2 \sigma^4 \right) \\ &\left. \left. - 2 \exp(\sigma^2 (B_{t,s} + D_{t,s})) {}_0F_1 \left(\frac{n-q-2}{2}; \left[B_{t,s} - \frac{1}{2} A_{t,s}^U \right] \left[D_{t,s} - \frac{1}{2} A_{t,s}^U \right] \sigma^4 \right) \right] - 1 \right). \end{aligned}$$

La eficiencia relativa del EMV con respecto al UMVUE para las funciones θ^* se calcula como el cociente entre la varianza del UMVUE y el error cuadrático medio del EMV obtenido anteriormente. Obsérvese que el término

$$(\theta^*(C, \mathbf{A}_{t,s}, B_{t,s}, D_{t,s}))^2$$

es común en el numerador y el denominador, por lo que se puede simplificar la expresión de la eficiencia de forma que sólo depende de σ^2 y no de \mathbf{a} , como ocurre también en la eficiencia para las funciones θ .

1.5. Bandas de confianza para las funciones media y moda

En esta sección presentamos el cálculo de bandas de confianzas para el caso particular de las funciones $\theta(C, \mathbf{A}_{t,s}, B_{t,s}, 2)$, que incluyen, como se ha comentado anteriormente, a las funciones media, moda y sus versiones condicionadas. Dichas bandas se basan en el cálculo de intervalos de confianza para valores fijos de t , haciendo luego variar éste en el tiempo. En el caso de las versiones condicionadas se fijan los instantes de tiempo t y s y luego se hace variar t .

Para la obtención y estudio de estas bandas de confianza expresaremos las funciones media y moda y sus versiones condicionadas como funciones del tipo $\exp(\mu(t,s) + \lambda \sigma^2(t,s))$, siendo los valores de $\mu(t,s)$, λ y $\sigma^2(t,s)$, para las funciones de interés, las siguientes:

Función	$\mu(t,s)$	λ	$\sigma^2(t,s)$
$m(t)$	$\ln(x_0) + \bar{\mathbf{u}}'(t)\mathbf{a}$	1/2	$(t-t_0)\sigma^2$
$m(t s)$	$\ln(x_s) + \bar{\mathbf{u}}'(t,s)\mathbf{a}$	1/2	$(t-s)\sigma^2$
$M_o(t)$	$\ln(x_0) + \bar{\mathbf{u}}'(t)\mathbf{a}$	-1	$(t-t_0)\sigma^2$
$M_o(t s)$	$\ln(x_s) + \bar{\mathbf{u}}'(t,s)\mathbf{a}$	-1	$(t-s)\sigma^2$

Este problema, con $\mu(t, s) = \mu$ y $\sigma^2(t, s) = \sigma^2$ constantes, ha sido tratado por Land en [38] y [41], obteniendo intervalos de confianza para funciones del tipo $\exp(\mu + \lambda\sigma^2)$, las cuales incluyen como caso particular la media y la moda de la distribución lognormal $\Lambda(\mu, \sigma^2)$ tomando $\lambda = 1/2$ y $\lambda = -1$ respectivamente.

El procedimiento seguido para el proceso lognormal con factores exógenos que mostramos aquí extiende el anterior y puede verse en los trabajos de Gutiérrez y otros [24] y [31]. Consideraremos el caso más general para las versiones condicionadas ya que el otro es un caso particular para $s = t_0$.

A partir del problema de contraste dado por

$$\begin{cases} H_0 : \mu(t, s) + \lambda\sigma^2(t, s) = \theta_0 \\ H_1 : \mu(t, s) + \lambda\sigma^2(t, s) \neq \theta_0 \end{cases}$$

o equivalentemente,

$$\begin{cases} H_0 : \frac{\mu(t, s) - \theta_0}{\sigma^2(t, s)} = -\lambda \\ H_1 : \frac{\mu(t, s) - \theta_0}{\sigma^2(t, s)} \neq -\lambda, \end{cases}$$

se puede construir un intervalo de confianza para $\mu(t, s) + \lambda\sigma^2(t, s)$ y, tomando exponenciales, para las funciones tendencia y moda y sus versiones condicionadas.

Los estimadores

$$B(t, s) = \ln(x_s) + \bar{\mathbf{u}}'(t, s)\hat{\mathbf{a}} \quad \text{y} \quad S^2(t, s) = (t - s)S^2$$

son conjuntamente suficientes y completos para $(\mu(t, s), \sigma^2(t, s))$. Además,

$$B(t, s) \sim \mathcal{N}_1(\mu(t, s), C(t, s)\sigma^2(t, s)),$$

donde

$$C(t, s) = \frac{\bar{\mathbf{u}}'(t, s)(\mathbf{U}\mathbf{U}')^{-1}\bar{\mathbf{u}}(t, s)}{t - s}$$

y, por otra parte,

$$\frac{(n - q - 2)S^2(t, s)}{\sigma^2(t, s)} \sim \chi^2(n - q - 2).$$

A partir de la independencia de $B(t, s)$ y $S^2(t, s)$ se deduce su densidad conjunta

$$\begin{aligned} & f_{B(t, s), S(t, s)}(b(t, s), s(t, s)) \\ &= \frac{\exp\left(\frac{-(b(t, s) - \mu(t, s))^2}{2C(t, s)\sigma^2(t, s)}\right) \left(\frac{n - q - 2}{\sigma^2(t, s)}\right)^{\frac{n - q - 2}{2}} s(t, s)^{n - q - 3} \exp\left(\frac{-(n - q - 2)s^2(t, s)}{\sigma^2(t, s)}\right)}{\sqrt{2\pi C(t, s)\sigma^2(t, s)} \Gamma\left(\frac{n - q - 2}{2}\right) 2^{\frac{n - q - 2}{2}}}, \end{aligned}$$

con $b(t, s) \in \mathbb{R}$ y $s(t, s) > 0$.

Expresándola en forma exponencial

$$\begin{aligned}
& f_{B(t,s),S(t,s)}(b(t,s),s(t,s)) \\
& \propto s(t,s)^{(n-q-2)-1} \exp\left(\frac{-\left[\frac{(b(t,s)-\theta_0+\theta_0-\mu(t,s))^2}{C(t,s)} + (n-q-2)s^2(t,s)\right]}{2\sigma^2(t,s)}\right) \\
& = s(t,s)^{(n-q-2)-1} \exp\left(\frac{-\left[\frac{(b(t,s)-\theta_0)^2-2(b(t,s)-\theta_0)(\mu(t,s)-\theta_0)+(\mu(t,s)-\theta_0)^2}{C(t,s)} + (n-q-2)s^2(t,s)\right]}{2\sigma^2(t,s)}\right) \\
& \propto s(t,s)^{(n-q-2)-1} \exp\left(\frac{-\left[\frac{(b(t,s)-\theta_0)^2}{C(t,s)} + (n-q-2)s^2(t,s)\right]}{2\sigma^2(t,s)} + \frac{(\mu(t,s)-\theta_0)(b(t,s)-\theta_0)}{C(t,s)\sigma^2(t,s)}\right),
\end{aligned}$$

se deduce que $B(t,s) - \theta_0$ y $V^2(t,s) = \frac{(B(t,s)-\theta_0)^2}{C(t,s)} + (n-q-2)S^2(t,s)$ son suficientes y completos para los parámetros naturales

$$\xi = \frac{\mu(t,s) - \theta_0}{\sigma^2(t,s)} \quad \text{y} \quad \zeta = \frac{-1}{2\sigma^2(t,s)}.$$

Notando ahora $W(t,s) = \frac{B(t,s)-\theta_0}{\sqrt{C(t,s)S^2(t,s)}}$, la transformación $(W(t,s), V(t,s))$ conserva las propiedades de completitud y suficiencia, y su densidad conjunta es proporcional a la expresión

$$f(w(t,s),v(t,s)) \propto v^{n-q-2}(w^2(t,s) + n - q - 2)^{-\frac{n-q-2+1}{2}} \exp\left(\frac{\frac{-v^2(t,s)}{2\sigma^2(t,s)} + \frac{v(t,s)w(t,s)}{C(t,s)} \frac{\mu(t,s)-\theta_0}{\sigma^2(t,s)}}{\sqrt{w^2(t,s) + n - q - 2}}\right),$$

con $v(t,s) > 0$ y $-\infty < w(t,s) < \infty$.

Además, la densidad de $W(t,s)$ condicionada a $V(t,s) = v(t,s)$ cumple

$$f(w(t,s)|v(t,s)) \propto (w^2(t,s) + n - q - 2)^{-\frac{n-q-2+1}{2}} \exp\left(\frac{\xi v(t,s)w(t,s) \frac{1}{\sqrt{C(t,s)}}}{\sqrt{w^2(t,s) + n - q - 2}}\right),$$

con $-\infty < w(t,s) < \infty$. Esta función no depende de ζ aunque sí de $v(t,s)$ y tiene verosimilitud monótona en ξ .

Dado que el problema de contraste planteado se puede expresar en términos de ξ , como

$$\begin{cases} H_0 : \xi = -\lambda \\ H_1 : \xi \neq -\lambda \end{cases}$$

y, cuando es cierta la hipótesis nula H_0 , se tiene

$$f(w(t, s)|v(t, s)) \propto (w^2(t, s) + n - q - 2)^{-\frac{n-q-1}{2}} \exp\left(\frac{-\lambda v(t, s)w(t, s)\frac{1}{\sqrt{C(t, s)}}}{\sqrt{w^2(t, s) + n - q - 2}}\right),$$

con $-\infty < w(t, s) < \infty$, denotando por $z = -\frac{\lambda v(t, s)/\sqrt{C(t, s)}}{n-q-1}$, una región crítica UMP insesgada al nivel de significación α viene dada por

$$\frac{1}{\sqrt{C(t, s)}} \frac{B(t, s) - \theta_0}{S(t, s)} \notin [t_{1, \alpha}(\theta_0), t_{2, \alpha}(\theta_0)]$$

con $t_{1, \alpha}(\theta_0)$ y $t_{2, \alpha}(\theta_0)$ verificando

$$\int_{t_{1, \alpha}(\theta_0)}^{t_{2, \alpha}(\theta_0)} f_{n-q-2, z|V}(w(t, s)) dw(t, s) = (1 - \alpha) \int_{-\infty}^{\infty} f_{n-q-2, z|V}(w(t, s)) dw(t, s)$$

y

$$\begin{aligned} & \int_{t_{1, \alpha}(\theta_0)}^{t_{2, \alpha}(\theta_0)} \frac{w(t, s)}{\sqrt{w^2(t, s) + n - q - 2}} f_{n-q-2, z|V}(w(t, s)) dw(t, s) \\ &= (1 - \alpha) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{w(t, s)}{\sqrt{w^2(t, s) + n - q - 2}} f_{n-q-2, z|V}(w(t, s)) dw(t, s) \end{aligned}$$

donde

$$f_{n-q-2, z|V}(w(t, s)) \propto (w^2(t, s) + n - q - 2)^{-\frac{n-q-1}{2}} \exp\left(\frac{(n - q - 1)zw(t, s)}{\sqrt{w^2(t, s) + n - q - 2}}\right),$$

con $-\infty < w(t, s) < \infty$. De esta forma, se obtiene un intervalo de confianza para $\mu(t, s) + \lambda\sigma^2(t, s)$, para cada (t, s) fijo, resolviendo en θ_0

$$\frac{(B(t, s) - \theta_0)/\sqrt{C(t, s)}}{S(t, s)} = t_{i, \alpha}(\theta_0), \quad i = 1, 2 \quad (1.13)$$

con

$$z(\theta_0) = -\frac{\lambda[(n - q - 2)S^2(t, s) + \frac{(B(t, s) - \theta_0)^2}{C(t, s)}]^{1/2}/\sqrt{C(t, s)}}{n - q - 1}.$$

Finalmente, tomando exponenciales en los extremos obtenidos, se tiene para cada (t, s) un intervalo de confianza para $\exp(\mu(t, s) + \lambda\sigma^2(t, s))$.

Nota 6. El cálculo de bandas de confianza para funciones del tipo $\exp(\mu(t, s) + \lambda\sigma^2(t, s))$ a partir de valores observados de una trayectoria de un proceso lognormal con factores exógenos conlleva en primer lugar el cálculo de $\hat{\mathbf{a}}$ y S^2 . A continuación para cada t y s fijos, hay

que calcular los valores de $1/C(t, s)$, $B(t, s)$ y $S(t, s)$ y resolver las ecuaciones (1.13) para obtener un intervalo de confianza para $\mu(t, s) + \lambda\sigma^2(t, s)$. Finalmente, las exponenciales de los límites de cada intervalo definen un intervalo de confianza para $\exp(\mu(t, s) + \lambda\sigma^2(t, s))$. Repitiendo este proceso para cada valor de t con el mismo nivel de confianza, para s fijo, se obtiene la banda de confianza buscada. Para resolver las ecuaciones (1.13), se puede usar un programa debido a Lyon y Land [43] para obtener intervalos de confianza para funciones lineales de la media y la varianza de una distribución normal, con la siguiente modificación en la entrada de datos:

<i>Degrees of freedom</i>	→	$n - q - 2$
<i>Gamma</i> ²	→	$1/C(t, s)$
<i>Sample mean</i>	→	$B(t, s)$
<i>Sample standard deviation</i>	→	$S(t, s)$.

Capítulo 2

Bandas de confianza aproximadas y generalizada para las funciones media y moda del proceso lognormal

2.1. Introducción

Como ya se ha comentado en la introducción de esta memoria, el uso de la función media y moda del proceso lognormal (así como de sus versiones condicionadas) es de gran utilidad, tanto desde el punto de vista del ajuste como con fines predictivos, en una gran variedad de aplicaciones en las que aparecen series de datos, correspondientes a variables aleatorias continuas, que evolucionan en el tiempo también de forma continua, con tendencia exponencial.

Por ello, la inferencia sobre ambas funciones ha sido un tema ampliamente estudiado tanto desde el punto de vista de la estimación puntual como de la estimación por bandas de confianza.

En el capítulo anterior se han presentado resultados, existentes en la literatura, relativos a estimación puntual considerando ambas funciones como caso particular de una función paramétrica más general, así como relativos a la estimación por bandas de confianza, expresando tales funciones en la forma general $\exp(\mu(t, s) + \lambda\sigma^2(t, s))$.

En concreto, Gutiérrez *et al.* en [31] extienden los resultados de Land dados en [38] y [41] sobre intervalos de confianza exactos, basados en tests de hipótesis uniformemente más potentes insesgados, para la media de una distribución lognormal (y, en general, para una combinación lineal de la media y varianza de una distribución normal) para obtener bandas de confianza para las funciones del tipo $\exp(\mu(t, s) + \lambda\sigma^2(t, s))$ en el proceso lognormal con factores exógenos. Estas bandas presentan, para su cálculo, los mismos inconvenientes que presentaban los intervalos de confianza exactos obtenidos por Land. Esto es, están basados en estadísticos pivotes condicionados y su cálculo es bastante complejo ya que involucra el cálculo de cuantiles a través de integrales que deben ser resueltas numéricamente. Por ello,

es necesario acudir a tablas de cuantiles ([40]), con las restricciones de valores disponibles que esto supone, o a programas de ordenador, como el dado por Lyon y Land en [43], basados en algoritmos numéricos que son inestables para ciertos rangos de valores de los estadísticos media y cuasivarianza muestral de la variable aleatoria con distribución lognormal considerada (o sus correspondientes en el caso del proceso). Además en los trabajos de Singh, Singh y Engelhardt [54], se sugiere que los límites de confianza superiores basados en el método de Land pueden ser demasiado grandes y conducir a conclusiones incorrectas.

Por esta razón, diversos autores han desarrollado intervalos de confianza aproximados para la media de la distribución lognormal y existen trabajos dedicados tanto a su obtención como a su comparación en términos de probabilidad de cobertura, amplitud media, etc, mediante estudios de simulación, como puede verse en los trabajos de Zhou y Gao [61] y de Lefante y Shah [42].

En 1972, Land [39] hace una primera revisión de algunos métodos de construcción de intervalos de confianza aproximados, clasificándolos en métodos de transformación, entre los que destacamos el método *naive* o simplista y la transformación de Patterson, y métodos directos, entre los que destacamos el método de Cox.

En 1988, Angus [2] propone un método conocido en la literatura como *método conservativo de Angus* y, posteriormente, en 1994, [3], un método bootstrap paramétrico. Ambos los englobaremos dentro de la categoría de métodos basados en estadísticos pivote.

En esta memoria presentamos un método alternativo para calcular un intervalo de confianza aproximado para la media de una distribución lognormal que extenderemos, junto con el resto, al caso del proceso lognormal. A partir de ahora nos referiremos a él como *método propuesto*.

Por otra parte, en el año 2003, Krishnamoorthy y Mathew, [37], obtienen un intervalo de confianza generalizado para la media de la distribución lognormal basado en los conceptos de cantidad pivotal generalizada e intervalo de confianza generalizado, debidos a Weerahandi ([60]).

El objetivo de este segundo capítulo es la obtención de bandas de confianza aproximadas y generalizada para las funciones media y moda del proceso lognormal, mediante la conveniente adaptación de los correspondientes métodos disponibles para la media de una distribución lognormal. Como ya se comentó en el apartado correspondiente a bandas de confianza exactas, en el Capítulo 1, el cálculo de éstas se basa en el de intervalos de confianza para valores fijos de t , haciendo luego variar éste en el tiempo (en el caso de las versiones condicionadas se fijan los instantes de tiempo t y s y luego se hace variar t con $t > s$).

Comenzamos con un breve resumen de los métodos que consideraremos¹, en el contexto

¹Nos limitamos a comentar aquellos métodos de construcción de intervalos de confianza para la distribución lognormal que pueden ser adaptados al caso del proceso lognormal y, dentro de ellos, a los más utilizados. Notemos que en el caso de la distribución, la inferencia se realiza basándose en la información proporcionada por muestras aleatorias simples de la variable bajo estudio, mientras que en el caso del proceso, en trayectorias muestrales basadas en observaciones no necesariamente independientes. Por ello,

de la distribución.

A continuación, trataremos por separado los casos homogéneo y no homogéneo del proceso lognormal debido a las particularidades que presentan cada uno de ellos como veremos posteriormente.

2.1.1. Caso de la distribución lognormal

Sea X una variable aleatoria con distribución $\Lambda_1(\mu, \sigma^2)$, es decir $Y = \ln(X) \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ y sea Y_1, \dots, Y_n una muestra aleatoria simple de Y . Notemos por \bar{Y} y S^2 su media y cuasivarianza muestrales, respectivamente.

Intervalos de confianza aproximados

Dentro de los métodos de construcción de intervalos de confianza aproximados para $E[X] = \exp(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2)$ distinguimos entre métodos de transformación, directos, basados en estadísticos pivote y propuesto.

• Métodos de transformación

Estos métodos parten de un intervalo de confianza para $\mu = E[\ln(X)]$ que luego transforman mediante algunas funciones apropiadas para dar lugar a un intervalo de confianza para $E[X]$.

La diferencia entre los distintos métodos consiste en la transformación considerada en cada caso. Destacamos entre ellos:

- El **método naive**, o simplista, que considera la transformación exponencial, para obtener el siguiente intervalo de confianza al nivel $1 - \alpha$

$$\exp\left(\bar{Y} \pm z_{1-\alpha/2} \frac{S}{\sqrt{n}}\right)$$

ó

$$\exp\left(\bar{Y} \pm t_{n-1, 1-\alpha/2} \frac{S}{\sqrt{n}}\right),$$

con z_α y $t_{n,\alpha}$ los cuantiles de orden α de una normal estándar y una t de Student con n grados de libertad, respectivamente.

Este método es sesgado porque calcula realmente un intervalo de confianza para $\exp(\mu)$.

no consideremos algunos métodos, como por ejemplo aquellos basados en el Teorema Central del Límite, que no son aplicables a nuestros datos.

- La **transformación de Patterson**, propuesta por el autor en [48] con el objeto de eliminar el sesgo que proporciona el método anterior, considera la transformación exponencial después de haber sumado la estimación insesgada de $\sigma^2/2$, dando lugar a

$$\exp\left(\bar{Y} + \frac{S^2}{2} \pm z_{1-\alpha/2} \frac{S}{\sqrt{n}}\right)$$

ó

$$\exp\left(\bar{Y} + \frac{S^2}{2} \pm t_{n-1, 1-\alpha/2} \frac{S}{\sqrt{n}}\right).$$

• Métodos directos

Estos métodos se basan en distribuciones aproximadas de estimadores de $E[X]$ o de alguna función de $E[X]$. Suponen que tales estimadores se distribuyen normalmente con varianza conocida o estimada y se calculan intervalos de confianza consistentes con dichas suposiciones.

Los métodos directos ofrecen la ventaja, frente a los métodos de transformación, de que los intervalos de confianza se obtienen para $E[X]$ o para alguna función de ella y, por tanto, es poco probable que fallen debido a la dependencia de tal esperanza en los parámetros desconocidos. Sin embargo, presentan el inconveniente de que al suponer la normalidad de estimadores de funciones paramétricas con rango restringido (valores positivos en nuestro caso), pueden dar lugar a intervalos de confianza inadmisibles.

El método directo más utilizado en la literatura para calcular intervalos de confianza aproximados para la media de una distribución lognormal es el **método de Cox**, propuesto por él mismo en una comunicación personal a Land, que aparece en [39]. Para su construcción parte de $\bar{Y} + S^2/2$ (UMVUE de $\ln(E[X])$) y, teniendo en cuenta que

$$\frac{S^2}{n} + \frac{S^4}{2(n+1)}$$

es el UMVUE de

$$\text{Var}\left[\bar{Y} + \frac{S^2}{2}\right] = \frac{\sigma^2}{n} + \frac{\sigma^2}{2(n-1)},$$

propone como intervalo de confianza para $E[X]$, al nivel $1 - \alpha$,

$$\exp\left(\bar{Y} + \frac{S^2}{2} \pm z_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{S^2}{n} + \frac{S^4}{2(n+1)}}\right).$$

Existe una versión de este método, la considerada por Zhou y Gao en [61], en el que simplemente se estima

$$\text{Var}\left[\bar{Y} + \frac{S^2}{2}\right] = \frac{\sigma^2}{n} + \frac{\sigma^2}{2(n-1)}$$

por

$$\frac{S^2}{n} + \frac{S^4}{2(n-1)},$$

obteniendo

$$\exp\left(\bar{Y} + \frac{S^2}{2} \pm z_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{S^2}{n} + \frac{S^4}{2(n-1)}}\right).$$

• Métodos basados en estadísticos pivote

Entre ellos se pueden citar el método conservativo de Angus y el método bootstrap paramétrico.

- **Método conservativo de Angus.** Angus [2] propone el estadístico pivote aproximado

$$\frac{\sqrt{n} \left[\bar{Y} + \frac{S^2}{2} - \left(\mu + \frac{\sigma^2}{2} \right) \right]}{\sqrt{S^2 \left(1 + \frac{S^2}{2} \right)}}$$

el cual es asintóticamente equivalente al estadístico del test de razón de verosimilitudes para contrastes sobre $\mu + \sigma^2/2$, cuya función de distribución es monótona creciente en σ y tiende a la de una t de Student con $n-1$ grados de libertad, cuando $\sigma \rightarrow 0$ y a la de

$$\sqrt{\frac{n}{2}} \left(1 - \frac{1}{W} \right)$$

con $(n-1)W \sim \chi^2(n-1)$, cuando $\sigma \rightarrow \infty$. A partir de este resultado, deduce un intervalo de confianza conservativo, al nivel de confianza $1-\alpha$, para $\exp(\mu + \sigma^2/2)$ como

$$\left(\exp\left(\bar{Y} + \frac{S^2}{2} - t_{n-1;1-\alpha/2} \frac{1}{\sqrt{n}} [S^2(1+S^2/2)]^{1/2}\right), \right. \\ \left. \exp\left(\bar{Y} + \frac{S^2}{2} + q_{n-1,\alpha/2} \frac{1}{\sqrt{n}} [S^2(1+S^2/2)]^{1/2}\right) \right),$$

donde

$$q_{n-1,\alpha/2} = \sqrt{\frac{n}{2}} \left(\frac{n-1}{\chi_{n-1,\alpha/2}^2} - 1 \right)$$

con $\chi_{n,\alpha}^2$ el cuantil de orden α de una distribución $\chi^2(n)$.

Este intervalo se llama conservativo ya que proviene de límites de confianza conservativos en el sentido de que la probabilidad de contener al verdadero valor de $\exp(\mu + \sigma^2/2)$ es mayor o igual que el nivel de confianza especificado. Consecuentemente, suelen dar lugar a intervalos de confianza más *amplios*.

- **Método bootstrap paramétrico.** Angus en [3] desarrolla un procedimiento bootstrap para calcular intervalos de confianza para la media de una distribución lognormal y un algoritmo Monte Carlo para su implementación. Los intervalos de confianza obtenidos mediante este método son bastante próximos a los exactos de Land, por lo que se proponen como una buena alternativa a éstos y al método conservativo.

Partiendo del estadístico pivote aproximado del método anterior y, dado que su distribución puede obtenerse en términos del parámetro desconocido σ^2 y de variables aleatorias con distribuciones normal estándar y $\chi^2(n-1)$, se aplica el método de los percentiles descrito por Hall en [34] para la obtención de intervalos de confianza bootstrap. Para ello, se obtienen valores del estadístico pivote a partir de la estimación de σ^2 por S^2 y de la generación de valores independientes de distribuciones $\mathcal{N}(0,1)$ y $\chi^2(n-1)$, independientes a su vez. La expresión resultante es igual a la que proporciona el método conservativo, sustituyendo los valores $t_{n-1,1-\alpha/2}$ y $-q_{n-1,\alpha/2}$ por los correspondientes cuantiles de los valores obtenidos.

Método propuesto

Tomando como punto de partida los métodos de transformación, se puede observar que en la construcción de los intervalos de confianza se ha tenido en cuenta solamente la variabilidad de μ en ambos métodos. El método que proponemos tiene en cuenta la variabilidad de σ^2 , construyéndose un intervalo de confianza para $\exp(\mu + \sigma^2/2)$ combinando los extremos de los correspondientes intervalos de confianza óptimos para cada uno de los parámetros y tomando exponenciales. Se obtiene así

$$\left(\exp\left(\bar{Y} - t_{n-1,1-\alpha/2} \frac{S}{\sqrt{n}} + \frac{1}{2} \frac{(n-1)S^2}{\chi_{n-1,1-\alpha/2}^2}\right), \exp\left(\bar{Y} + t_{n-1,1-\alpha/2} \frac{S}{\sqrt{n}} + \frac{1}{2} \frac{(n-1)S^2}{\chi_{n-1,\alpha/2}^2}\right) \right).$$

Intervalo de confianza generalizado

Krishnamoorthy y Mathew en [37] obtienen un intervalo de confianza generalizado para la media de la distribución lognormal basado en los conceptos de cantidad pivotal generalizada ² e intervalo de confianza generalizado ³, debidos a Weerahandi ([60]).

²Sea X un vector aleatorio con función de distribución $F(x|\nu)$ donde $\nu = (\theta, \delta)$ es un vector de parámetros desconocidos con θ el parámetro de interés y δ un parámetro de ruido. Sea $R = r(X; x, \nu)$ una función de X , x y ν (pero no necesariamente función de todos). Se dice que R es una *cantidad pivotal generalizada* si cumple

- La distribución de R es independiente de parámetros desconocidos.
- El valor observado del pivote, $r_{\text{obs}} = r(x; x, \nu)$, no depende del parámetro de ruido δ .

³En las condiciones de la definición anterior, sea Θ el espacio paramétrico de θ . Si un subconjunto

La cantidad pivotal considerada es

$$R = \bar{y} - \frac{\bar{Y} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}} \frac{s}{\sqrt{n}} + \frac{1}{2} \frac{\sigma^2}{S^2} s^2$$

que tiene la misma distribución que

$$\bar{y} - \frac{Z}{\frac{U}{\sqrt{n-1}}} \frac{s}{\sqrt{n}} + \frac{1}{2} \frac{s^2}{\frac{U^2}{n-1}}$$

con $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$ y $U^2 \sim \chi^2(n-1)$. Observemos que en el caso que nos ocupa, la obtención de un intervalo de confianza generalizado para la media de una distribución lognormal y, en primera instancia para su logaritmo, el parámetro de interés es $\theta = \mu + \sigma^2/2$ y no existen parámetros de ruido.

Dado que $r_{\text{obs}} = \mu + \sigma^2/2$, un intervalo de confianza generalizado para $\ln(E[X]) = \mu + \sigma^2/2$, al nivel de confianza $1 - \alpha$, viene dado por $(R(\alpha/2), R(1 - \alpha/2))$, con $R(\alpha)$ el cuantil de orden α de R , los cuales pueden ser obtenidos mediante simulación de valores de su distribución. Finalmente, el intervalo de confianza generalizado para $E[X]$ viene dado por

$$(\exp(R(\alpha/2)), \exp(R(1 - \alpha/2))).$$

2.2. Caso del proceso de difusión lognormal homogéneo

Sea $\{X(t); t_0 \leq t \leq T\}$ el proceso de difusión lognormal homogéneo, con momentos infinitesimales $A_1(x) = mx$ y $A_2(x) = \sigma^2 x^2$ con $\sigma > 0$, $m \in \mathbb{R}$ y distribución inicial $P[X(t_0) = x_0] = 1$. Tomando $a = m - \frac{\sigma^2}{2}$, las funciones media, moda y sus versiones condicionadas se pueden escribir en la forma $\exp(\mu(t, s) + \lambda \sigma^2(t, s))$ con

Función	$\mu(t, s)$	λ	$\sigma^2(t, s)$
$m(t)$	$\ln(x_0) + a(t - t_0)$	1/2	$(t - t_0)\sigma^2$
$m(t s)$	$\ln(x_s) + a(t - s)$	1/2	$(t - s)\sigma^2$
$M_o(t)$	$\ln(x_0) + a(t - t_0)$	-1	$(t - t_0)\sigma^2$
$M_o(t s)$	$\ln(x_s) + a(t - s)$	-1	$(t - s)\sigma^2$

Antes de estudiar el problema de la obtención de bandas de confianza aproximadas y generalizada para tales funciones, exponemos brevemente la particularización en este caso de algunos resultados de inferencia, que se deducen de los presentados en el Capítulo 1.

Sea t_1, \dots, t_n un conjunto de instantes de tiempo en los cuales se realiza un muestreo discreto del proceso, obteniéndose las observaciones x_1, \dots, x_n .

$C_{1-\alpha}$ del espacio muestral de R verifica que $P[R \in C_{1-\alpha}] = 1 - \alpha$, entonces al subconjunto Θ_C del espacio paramétrico dado por $\Theta_C(1 - \alpha) = \{\theta \in \Theta | r_{\text{obs}} \in C_{1-\alpha}\}$ se le denomina *intervalo de confianza generalizado* para θ al nivel de confianza $1 - \alpha$.

Suponiendo que $P[X(t_1) = x_1] = 1$, los estimadores de máxima verosimilitud de los parámetros a y σ^2 son

$$\hat{a} = \frac{1}{t_n - t_1} \ln \left(\frac{x_n}{x_1} \right)$$

y

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1} (\mathbf{v} - \hat{a}\mathbf{u})' (\mathbf{v} - \hat{a}\mathbf{u})$$

donde la notación usada es $\mathbf{v} = (v_2, \dots, v_n)'$, con $v_i = (t_i - t_{i-1})^{-1/2} (\ln(x_i) - \ln(x_{i-1}))$, $i = 2, \dots, n$, y $\mathbf{u} = (\sqrt{t_2 - t_1}, \dots, \sqrt{t_n - t_{n-1}})'$.

Dichos estimadores son conjuntamente suficientes y completos para (a, σ^2) con distribuciones asociadas

$$\hat{a} \sim \mathcal{N} \left(a, \frac{\sigma^2}{t_n - t_1} \right)$$

$$\frac{(n-1)\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-2)$$

Por último, notando por $B(t, s)$ al estimador máximo verosímil de $\mu(t, s)$ y por $S^2(t, s)$ al estimador insesgado de $\sigma^2(t, s)$, para valores fijos de t y s

$$B(t, s) = \begin{cases} \ln(x_1) + (t - t_1)\hat{a} & \text{para la versión sin condicionar} \\ \ln(x_s) + (t - s)\hat{a} & \text{para versión condicionada} \end{cases}$$

$$S^2(t, s) = \begin{cases} (t - t_1)S^2 & \text{para la versión sin condicionar} \\ (t - s)S^2 & \text{para la versión condicionada} \end{cases}$$

siendo $S^2 = \frac{(n-1)\hat{\sigma}^2}{n-2}$ el estimador insesgado de σ^2 . Dichos estimadores son conjuntamente suficientes y completos para $(\mu(t, s), \sigma^2(t, s))$ con distribuciones asociadas

$$B(t, s) \sim \mathcal{N}(\mu(t, s), C(t, s)\sigma^2(t, s))$$

$$\frac{(n-2)S^2(t, s)}{\sigma^2(t, s)} \sim \chi^2(n-2)$$

con

$$C(t, s) = \begin{cases} \frac{t - t_1}{t_n - t_1} & \text{para la versión sin condicionar} \\ \frac{t - s}{t_n - t_1} & \text{para la versión condicionada} \end{cases}$$

2.2.1. Bandas de confianza aproximadas

A continuación se trata el problema de construcción de bandas de confianza para las funciones $\exp(\mu(t, s) + \lambda\sigma^2(t, s))$, considerando el caso general de las versiones condicionadas ya que el caso de las versiones sin condicionar es un caso particular del primero.

Métodos de transformación

Consisten en la consideración, para cada t y s , de intervalos de confianza para la esperanza de alguna función de $X(t)|X(s) = x_s$ y posteriormente, su transformación mediante alguna función apropiada para dar lugar a intervalos de confianza aproximados para $E[X(t)|X(s) = x_s]$.

- **Método *naive*.** Se construye un intervalo de confianza para $E[\ln(X(t))|X(s) = x_s]$ para cada t y s , es decir, para $\mu(t, s)$, al cual notamos como $(\mu_\alpha^I(t, s), \mu_\alpha^S(t, s))$ en general y, posteriormente, se transforma tomando exponenciales. Este método es sesgado, ya que realmente calcula bandas de confianza para $\exp(\mu(t, s))$, pero puede ser adecuado para valores pequeños de $\sigma^2(t, s) = (t - s)\sigma^2$. La banda obtenida es

$$\exp\left(B(t, s) \pm t_{n-2; 1-\alpha/2} \sqrt{C(t, s)} S(t, s)\right).$$

- **Transformación de Patterson.** Para eliminar el sesgo que proporciona el método anterior, Patterson propuso una transformación, que en el caso del proceso es $\exp(\mu_\alpha(t, s) + \lambda S^2(t, s))$, donde por $\mu_\alpha(t, s)$ se entiende el extremo inferior o el superior del intervalo obtenido en el primer paso del método *naive*. La banda obtenida mediante esta transformación es

$$\exp\left(B(t, s) + \lambda S^2(t, s) \pm t_{n-2; 1-\alpha/2} \sqrt{C(t, s)} S(t, s)\right).$$

Métodos directos

Estos métodos se basan en estimadores de $E[X(t)|X(s)]$ o de alguna función de ella. Suponen que tales estimadores se distribuyen normalmente con varianza conocida o estimada, y se calculan intervalos de confianza consistentes con dichas suposiciones.

Generalizando el **método de Cox**, se considera la función $\ln(E[X(t)|X(s) = x_s]) = \mu(t, s) + \lambda\sigma^2(t, s)$ y como estimador, su UMVUE

$$B(t, s) + \lambda S^2(t, s).$$

A continuación, después de estimar $Var[B(t, s) + \lambda S^2(t, s)]$ por su UMVUE

$$UMVUE[Var(B(t, s) + \lambda S^2(t, s))] = C(t, s) S^2(t, s) + \frac{2\lambda^2}{n} S^4(t, s)$$

se supone que

$$B(t, s) + \lambda S^2(t, s) \sim \mathcal{N} \left(\mu(t, s) + \lambda \sigma^2(t, s), C(t, s) S^2(t, s) + \frac{2\lambda^2}{n} S^4(t, s) \right),$$

a partir de lo cual se deduce la banda de confianza aproximada

$$\exp \left(B(t, s) + \lambda S^2(t, s) \pm z_{1-\alpha/2} \sqrt{C(t, s) S^2(t, s) + \frac{2\lambda^2}{n} S^4(t, s)} \right).$$

El método de Cox considerado aquí es la adaptación del método de Cox que aparece en [39] y que fue el que originalmente Cox le sugirió a Land. Existen otras versiones de este método y, siguiendo a otros autores (Zhou and Gao en [61] y Lefante and Shah en [42]), se podría considerar la estimación de

$$\text{Var}(B(t, s) + \lambda S^2(t, s)) = C(t, s) \sigma^2(t, s) + \frac{2\lambda^2}{n-2} \sigma^4(t, s)$$

sin más que sustituir $\sigma^2(t, s)$ por $S^2(t, s)$, con lo cual se supone

$$B(t, s) + \lambda S^2(t, s) \sim \mathcal{N} \left(\mu(t, s) + \lambda \sigma^2(t, s), C(t, s) S^2(t, s) + \frac{2\lambda^2}{n-2} S^4(t, s) \right),$$

a partir de lo cual se deduce la banda de confianza aproximada

$$\exp \left(B(t, s) + \lambda S^2(t, s) \pm z_{1-\alpha/2} \sqrt{C(t, s) S^2(t, s) + \frac{2\lambda^2}{n-2} S^4(t, s)} \right).$$

Métodos basados en estadísticos pivote

■ Método conservativo de Angus

La adaptación del método de Angus nos conduce al estadístico pivote

$$\frac{B(t, s) + \lambda S^2(t, s) - (\mu(t, s) + \lambda \sigma^2(t, s))}{\sqrt{S^2(t, s) C(t, s) + \frac{2\lambda^2}{n-2} S^4(t, s)}}$$

que es asintóticamente equivalente al estadístico del test de razón de verosimilitudes para contrastes sobre $\mu(t, s) + \lambda \sigma^2(t, s)$. Dicho pivote se distribuye como

$$\frac{N + \frac{\lambda}{\sqrt{C(t, s)}} \sigma(t, s) (W - 1)}{\sqrt{W \left(1 + \frac{2\lambda^2 W}{C(t, s)(n-2)} \sigma^2(t, s) \right)}}$$

donde W y N son independientes, $N \sim \mathcal{N}(0, 1)$ y $(n - 2)W \sim \chi^2(n - 2)$. Para cada (t, s) fijos, la función de distribución del estadístico pivote es monótona creciente en $\sigma(t, s)$ y

$$\lim_{\sigma(t,s) \rightarrow 0} \frac{N + \frac{\lambda}{\sqrt{C(t,s)}}\sigma(t,s)(W-1)}{\sqrt{W \left(1 + \frac{2\lambda^2 W}{C(t,s)(n-2)}\sigma^2(t,s)\right)}} = \frac{N}{\sqrt{W}} \rightarrow t(n-2)$$

$$\lim_{\sigma(t,s) \rightarrow \infty} \frac{N + \frac{\lambda}{\sqrt{C(t,s)}}\sigma(t,s)(W-1)}{\sqrt{W \left(1 + \frac{2\lambda^2 W}{C(t,s)(n-2)}\sigma^2(t,s)\right)}} = \sqrt{\frac{n-2}{2}} \left(1 - \frac{1}{W}\right)$$

a partir de lo cual se obtiene una banda de confianza conservativa para $\exp(\mu(t, s) + \lambda\sigma^2(t, s))$ como

$$\left(\exp \left(B(t, s) + \lambda S^2(t, s) - t_{n-2; 1-\alpha/2} \sqrt{C(t, s)S^2(t, s) + \frac{2\lambda^2}{n-2}S^4(t, s)} \right), \right.$$

$$\left. \exp \left(B(t, s) + \lambda S^2(t, s) + \sqrt{\frac{n-2}{2}} \left(\frac{n-2}{\chi_{n-2; \alpha/2}^2} - 1 \right) \sqrt{C(t, s)S^2(t, s) + \frac{2\lambda^2}{n-2}S^4(t, s)} \right) \right).$$

■ Método bootstrap paramétrico

Se trata de calcular un intervalo bootstrap aplicando el método de t-percentiles al estadístico pivote usado en el método de Angus. Para ello, condicionada a la observación de $(B(t, s), S^2(t, s))$, sean $\underline{X}_1^*, \dots, \underline{X}_k^*$, k trayectorias independientes del proceso de difusión lognormal con valores comunes $(B(t, s)$ y $S^2(t, s))$. Si P^* denota la probabilidad condicionada a la observación $(B(t, s), S^2(t, s))$, sean $t \equiv t(1 - \alpha/2)$ y $q \equiv q(\alpha/2)$, las soluciones a

$$P^* \left[\frac{B^*(t, s) + \lambda S^{2*}(t, s) - B(t, s) - \lambda S^2(t, s)}{\sqrt{C^*(t, s)S^{2*}(t, s) \left(1 + \frac{2\lambda^2}{n-2} \frac{S^{2*}(t, s)}{C^*(t, s)}\right)}} \leq t \right] = 1 - \alpha/2$$

y

$$P^* \left[\frac{B^*(t, s) + \lambda S^{2*}(t, s) - B(t, s) - \lambda S^2(t, s)}{\sqrt{C^*(t, s)S^{2*}(t, s) \left(1 + \frac{2\lambda^2}{n-2} \frac{S^{2*}(t, s)}{C^*(t, s)}\right)}} \geq -q \right] = 1 - \alpha/2.$$

Entonces un intervalo de confianza bootstrap, al nivel de confianza $1 - \alpha$, para la función $\exp(\mu(t, s) + \lambda\sigma^2(t, s))$ es

$$\left(\exp \left(B(t, s) + \lambda S^2(t, s) - t(1 - \alpha/2) \sqrt{C(t, s)S^2(t, s) + \frac{2\lambda^2}{n-2}S^4(t, s)} \right), \right. \\ \left. \exp \left(B(t, s) + \lambda S^2(t, s) + q(\alpha/2) \sqrt{C(t, s)S^2(t, s) + \frac{2\lambda^2}{n-2}S^4(t, s)} \right) \right).$$

Sin embargo, la distribución de

$$\frac{B^*(t, s) + \lambda S^{2*}(t, s) - B(t, s) - \lambda S^2(t, s)}{\sqrt{C^*(t, s)S^{2*}(t, s) \left(1 + \frac{2\lambda^2}{n-2} \frac{S^{2*}(t, s)}{C^*(t, s)}\right)}}$$

conduce a que la resolución de las ecuaciones anteriores involucre complejas integraciones numéricas. Por ello dado que, a partir del resultado proporcionado por el método anterior, tal distribución puede expresarse en términos de $\sigma(t, s)$ y de variables con distribuciones conocidas, se propone, siguiendo la idea de Angus en [3], el siguiente procedimiento alternativo:

- Se generan k valores, N_1^*, \dots, N_k^* , de una distribución $\mathcal{N}(0, 1)$ y k valores, $\chi_1^{2*}, \dots, \chi_k^{2*}$, de una distribución $\chi^2(n-2)$, de forma independiente.

- Para cada t y s , se calculan los valores $T_i^*(t, s)$, $i = 1, \dots, k$, como

$$T_i^*(t, s) = \frac{N_i^* + \frac{\lambda}{\sqrt{C(t, s)}}S(t, s) \left(\frac{\chi_i^{2*}}{n-2} - 1 \right)}{\sqrt{\frac{\chi_i^{2*}}{n-2} \left(1 + \frac{2\lambda^2}{C(t, s)(n-2)^2} \chi_i^{2*} S^2(t, s) \right)}}.$$

- Para cada t y s , los valores $T_i^*(t, s)$ se ordenan en $T_{(1)}^*(t, s) < \dots < T_{(k)}^*(t, s)$ y se calcula $t_{1-\alpha/2}^{boot}(t, s) = T_{[(1-\alpha/2)k]}^*(t, s)$ y $t_{\alpha/2}^{boot}(t, s) = T_{[(\alpha/2)k]}^*(t, s)$ donde $[a]$ denota el entero menor o igual a a .

- Con estos valores se construye la banda de confianza bootstrap, después de tomar exponenciales, para $\exp(\mu(t, s) + \lambda\sigma^2(t, s))$ como

$$\left(\exp \left(B(t, s) + \lambda S^2(t, s) - t_{1-\alpha/2}^{boot}(t, s) \sqrt{C(t, s)S^2(t, s) + \frac{2\lambda^2}{n-2}S^4(t, s)} \right), \right. \\ \left. \exp \left(B(t, s) + \lambda S^2(t, s) - t_{\alpha/2}^{boot}(t, s) \sqrt{C(t, s)S^2(t, s) + \frac{2\lambda^2}{n-2}S^4(t, s)} \right) \right).$$

Método propuesto

A partir de la consideración de intervalos de confianza para $\mu(t, s)$ y de $\sigma^2(t, s)$

$$\left(B(t, s) - t_{n-2;1-\alpha/2}S(t, s)\sqrt{C(t, s)}, B(t, s) + t_{n-2;1-\alpha/2}S(t, s)\sqrt{C(t, s)} \right)$$

y

$$\left(\frac{(n-2)S^2(t, s)}{\chi_{n-2;\alpha/2}^2}, \frac{(n-2)S^2(t, s)}{\chi_{n-2;1-\alpha/2}^2} \right)$$

respectivamente, se combinan adecuadamente los extremos de estos intervalos y se toman exponenciales, dando lugar a

$$\left(\exp \left(B(t, s) - t_{n-2;1-\alpha/2}S(t, s)\sqrt{C(t, s)} + \lambda \frac{n-2}{\chi_{n-2;1-\alpha/2}^2} S^2(t, s) \right) \right. \\ \left. \exp \left(B(t, s) + t_{n-2;1-\alpha/2}S(t, s)\sqrt{C(t, s)} + \lambda \frac{n-2}{\chi_{n-2;\alpha/2}^2} S^2(t, s) \right) \right).$$

2.2.2. Banda de confianza generalizada

Para el caso del proceso lognormal homogéneo proponemos, para cada t y s , la siguiente cantidad pivotal

$$R(t, s) = b(t, s) - \frac{B(t, s) - \mu(t, s)}{\sqrt{C(t, s)}S(t, s)}\sqrt{C(t, s)}s(t, s) + \lambda \frac{\sigma^2(t, s)}{S^2(t, s)}s^2(t, s)$$

que tiene la misma distribución que

$$b(t, s) - \frac{Z}{\frac{U}{\sqrt{n-2}}}\sqrt{C(t, s)}s(t, s) + \lambda \frac{s^2(t, s)}{\frac{U^2}{n-2}}$$

con Z y U independientes, $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$ y $U^2 \sim \chi^2(n-2)$.

Dado que $r_{\text{obs}}(t, s) = \mu(t, s) + \sigma^2(t, s)/2$, basta obtener los cuantiles correspondientes para construir la banda de confianza deseada. Para ello seguimos el siguiente procedimiento:

- A partir de una trayectoria del proceso se obtienen los valores de $b(t, s)$ y $s^2(t, s)$.
- A continuación, se generan k valores de las variables $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$ y $U^2 \sim \chi^2(n-2)$, valores llamados Z_i y U_i^2 , $i = 1, \dots, k$.
- Se calculan

$$R_i(t, s) = b(t, s) - \frac{Z_i}{\frac{U_i}{\sqrt{n-2}}}C(t, s)s(t, s) + \lambda \frac{s^2(t, s)}{\frac{U_i^2}{n-2}}, \quad i = 1, 2, \dots, k$$

y a partir de dichos valores, los cuantiles de orden $\alpha/2$ y $1-\alpha/2$, denotados como $R_{(t,s)}(\alpha/2)$ y $R_{(t,s)}(1-\alpha/2)$, respectivamente.

La banda de confianza generalizada, al nivel de confianza $1-\alpha$, para $\exp(\mu(t,s) + \lambda\sigma^2(t,s))$ se obtiene finalmente como

$$\left(\exp\left(R_{(t,s)}(\alpha/2)\right), \exp\left(R_{(t,s)}(1-\alpha/2)\right) \right).$$

Notemos que esta banda obedece a un esquema tipo Monte Carlo de la banda obtenida mediante el *método propuesto*.

2.2.3. Estudio comparativo

A continuación se va a realizar un estudio comparativo de las bandas de confianza obtenidas para el caso homogéneo mediante la aplicación a trayectorias simuladas. Este estudio es similar al realizado por Zhou y Gao en [61] en el caso de la distribución lognormal basado en observaciones simuladas de ella. Dicha comparación se realizará en términos de errores de cobertura (diferencia en valor absoluto entre el nivel de confianza considerado en la construcción del intervalo de confianza y la probabilidad de cobertura obtenida) y amplitudes medias.

Para ello hay que tener en cuenta las siguientes consideraciones previas:

- Independencia del parámetro m . Dado que, para cada valor de (t, s) , un cambio en la estimación de m , \hat{m}_1 por \hat{m}_2 , sólo afecta en un cambio de escala en la estimación del correspondiente intervalo de confianza para $\mu(t, s) + \lambda\sigma^2(t, s)$ supuesto que n y S^2 permanecen invariantes, consideraremos por simplicidad en nuestro estudio el caso $m = 0$.
- La probabilidad de cobertura permanece constante a lo largo del tiempo en los intervalos de confianza que constituyen la banda. Notemos que para cada (t, s) , los intervalos de confianza obtenidos se pueden expresar en la forma general

$$\begin{aligned} & \left(x_s \exp \left(\hat{a}(t-s) + K_1 \lambda S^2(t-s) - K_2 \sqrt{\frac{t-s}{t_n - t_1}} S^2(t-s) + K_3 \lambda^2 S^4(t-s)^2 \right), \right. \\ & \left. x_s \exp \left(\hat{a}(t-s) + K_1 \lambda S^2(t-s) - K_2^* \sqrt{\frac{t-s}{t_n - t_1}} S^2(t-s) + K_3 \lambda^2 S^4(t-s)^2 \right) \right) \\ &= \left(x_s \exp \left(\left(\hat{a} + K_1 \lambda S^2 - K_2 \sqrt{\frac{S^2}{t_n - t_1} + K_3 \lambda^2 S^4} \right) (t-s) \right), \right. \\ & \left. x_s \exp \left(\left(\hat{a} + K_1 \lambda S^2 - K_2^* \sqrt{\frac{S^2}{t_n - t_1} + K_3 \lambda^2 S^4} \right) (t-s) \right) \right) \end{aligned}$$

con K_i , $i = 1, 2, 3$ y K_2^* constantes e independientes del tiempo.

El verdadero valor de las funciones para las que calculamos dichos intervalos es igual a

$$x_s \exp(a(t-s) + \lambda\sigma^2(t-s)) = x_s \exp((a + \lambda\sigma^2)(t-s))$$

y, por tanto, cada intervalo de confianza contendrá al verdadero valor si y sólo si

$$\hat{a} + K_1\lambda S^2 - K_2\sqrt{\frac{S^2}{t_n - t_1} + K_3\lambda^2 S^4} \leq a + \lambda\sigma^2 \leq \hat{a} + K_1\lambda S^2 + K_2^*\sqrt{\frac{S^2}{t_n - t_1} + K_3\lambda^2 S^4}$$

condición independiente de los valores de (t, s) .

- La amplitud de los intervalos aumenta, en general, con el valor de t , en el caso de las versiones sin condicionar y con el valor de t para cada s fijo en las versiones condicionadas. Sin embargo, en el caso particular en el que s y t varían pero $t - s$ es constante, la amplitud no varía. Por ello compararemos los valores de las amplitudes medias para los instantes de tiempo comunes en las simulaciones.

Estudio de simulación

Para realizar nuestro estudio se han simulado los valores de 1000 trayectorias en instantes de tiempo $t_1 = 0$ a $t_n = n - 1$ de procesos de difusión lognormales homogéneos con momentos infinitesimales $A_1(x) = 0$ y $A_2(x) = \sigma^2 x^2$, con $n = 11, 51$ y 101 y σ^2 igual a $0.0000001, 0.000001, 0.00001, 0.0001, 0.001, 0.01$ y 0.1 (notemos que valores superiores de σ^2 disparan la varianza del proceso ya que es de tipo exponencial). A partir de tales trayectorias se han calculado las bandas de confianza aproximadas y generalizada que aparecen en esta memoria (no se incluyen los resultados para la banda obtenida mediante la adaptación de la versión de Zhou y Gao del método de Cox ya que los resultados son similares a dicho método) para un nivel de confianza de 0.9 y en el caso concreto de la función media, así como sus probabilidades de cobertura, errores de cobertura y rango de variación de la amplitud media en los instantes de tiempo comunes a todas ellas (de $t_2 = 1$ a $t_{11} = 10$), mostrándose estos últimos en las tablas 2.1 a 2.3.

Tabla 2.1: Probabilidades de cobertura, errores de cobertura y rango de variación de las amplitudes medias (del instante $t_2 = 1$ a $t_{11} = 10$) para los intervalos de confianza aproximados, al nivel de confianza 0.90, para la media del proceso lognormal homogéneo con $m = 0$ y número de datos en la trayectoria $n = 11$.

σ^2	Métodos	Probabilidad de cobertura	Error de cobertura	Amplitud media
0.0000001	<i>Naive</i>	0.913	0.013	0.0003564-0.0035640
	Patterson	0.913	0.013	0.0003564-0.0035640
	Cox	0.872	0.028	0.0003198-0.0031980
	Conservativo	0.958	0.058	0.0005302-0.0053063
	Bootstrap	0.906	0.006	0.0000356-0.0035564
	Propuesto	0.914	0.014	0.0003565-0.0035651
	Generalizado	0.902	0.002	0.0003562-0.0035619
0.000001	<i>Naive</i>	0.913	0.013	0.0011270-0.0112708
	Patterson	0.913	0.013	0.0011270-0.0112708
	Cox	0.872	0.028	0.0010113-0.0101133
	Conservativo	0.958	0.058	0.0016769-0.0168141
	Bootstrap	0.895	0.005	0.0011293-0.0112957
	Propuesto	0.915	0.015	0.0011281-0.0112817
	Generalizado	0.909	0.009	0.0011275-0.0112739
0.00001	<i>Naive</i>	0.913	0.013	0.0035640-0.0356462
	Patterson	0.913	0.013	0.0035640-0.0356481
	Cox	0.873	0.027	0.0031980-0.0319868
	Conservativo	0.958	0.058	0.0053064-0.0535184
	Bootstrap	0.909	0.009	0.0035575-0.0356060
	Propuesto	0.915	0.015	0.0035749-0.0357576
	Generalizado	0.904	0.004	0.0035705-0.0357025

Tabla 2.1. (Continuación)

σ^2	Métodos	Probabilidad de cobertura	Error de cobertura	Amplitud media
0.0001	<i>Naive</i>	0.908	0.008	0.0112703-0.1128133
	Patterson	0.912	0.012	0.0112709-0.1128755
	Cox	0.873	0.027	0.0101137-0.1012736
	Conservativo	0.958	0.058	0.0168147-0.1729746
	Bootstrap	0.9	0	0.0112324-0.1127104
	Propuesto	0.916	0.016	0.0113795-0.1140008
	Generalizado	0.908	0.008	0.0112854-0.1129605
0.001	<i>Naive</i>	0.903	0.003	0.0356301-0.3589797
	Patterson	0.907	0.007	0.0356498-0.3609727
	Cox	0.87	0.03	0.0319979-0.3235931
	Conservativo	0.959	0.059	0.0535372-0.5934041
	Bootstrap	0.905	0.005	0.0359096-0.3663855
	Propuesto	0.917	0.017	0.0367452-0.3734176
	Generalizado	0.907	0.007	0.0356949-0.3615229
0.01	<i>Naive</i>	0.899	0.001	0.1123068-1.2022780
	Patterson	0.903	0.003	0.1129275-1.2727249
	Cox	0.86	0.04	0.1016279-1.1314999
	Conservativo	0.963	0.063	0.1736008-2.7675592
	Bootstrap	0.899	0.001	0.1145303-1.3489968
	Propuesto	0.938	0.038	0.1242309-1.4695335
	Generalizado	0.9	0	0.1133606-1.3042131
0.1	<i>Naive</i>	0.852	0.048	0.3431827-6.5378620
	Patterson	0.833	0.017	0.3628282-12.810234
	Cox	0.859	0.041	0.3352252-10.909627
	Conservativo	0.972	0.072	0.6175711-145.65238
	Bootstrap	0.89	0.01	0.3863324-20.831938
	Propuesto	0.962	0.062	0.4936840-49.981146
	Generalizado	0.9	0	0.3910155-24.972282

Tabla 2.2: Probabilidades de cobertura, errores de cobertura y rango de variación de las amplitudes medias (del instante $t_2 = 1$ a $t_{11} = 10$) para los intervalos de confianza aproximados, al nivel de confianza 0.90, para la media del proceso lognormal homogéneo con $m = 0$ y número de datos en la trayectoria $n = 51$.

σ^2	Métodos	Probabilidad de cobertura	Error de cobertura	Amplitud media
0.0000001	Naive	0.902	0.002	0.0001485-0.0014851
	Patterson	0.902	0.002	0.0001485-0.0014851
	Cox	0.895	0.005	0.0001457-0.0014570
	Conservativo	0.937	0.037	0.0001716-0.0017164
	Bootstrap	0.893	0.007	0.0001484-0.0014845
	Propuesto	0.902	0.002	0.0001485-0.0014855
	Generalizado	0.896	0.004	0.0001483-0.0014830
0.000001	Naive	0.902	0.002	0.0004696-0.0046964
	Patterson	0.902	0.002	0.0004696-0.0046964
	Cox	0.895	0.005	0.0004608-0.0046076
	Conservativo	0.937	0.037	0.0005427-0.0054293
	Bootstrap	0.891	0.009	0.0004689-0.0046891
	Propuesto	0.902	0.002	0.0004700-0.0046999
	Generalizado	0.897	0.003	0.0004675-0.0046752
0.00001	Naive	0.902	0.002	0.0014851-0.0148514
	Patterson	0.902	0.002	0.0014851-0.0148521
	Cox	0.895	0.005	0.0014570-0.0145714
	Conservativo	0.937	0.037	0.0017164-0.0171836
	Bootstrap	0.891	0.009	0.0014844-0.0148480
	Propuesto	0.902	0.002	0.0014886-0.0148871
	Generalizado	0.887	0.013	0.0014841-0.0148403

Tabla 2.2. (Continuación)

σ^2	Métodos	Probabilidad de cobertura	Error de cobertura	Amplitud media
0.0001	<i>Naive</i>	0.902	0.002	0.0046962-0.0469560
	Patterson	0.902	0.002	0.0046964-0.0469797
	Cox	0.895	0.005	0.0046078-0.0460925
	Conservativo	0.937	0.037	0.0054294-0.0544946
	Bootstrap	0.889	0.011	0.0047011-0.0470565
	Propuesto	0.902	0.002	0.0047314-0.0473315
	Generalizado	0.89	0.01	0.0046943-0.0469475
0.001	<i>Naive</i>	0.894	0.006	0.0148447-0.1481270
	Patterson	0.901	0.001	0.0148522-0.1488774
	Cox	0.895	0.005	0.0145751-0.1460938
	Conservativo	0.937	0.037	0.0171880-0.1741673
	Bootstrap	0.902	0.002	0.0148056-0.1487085
	Propuesto	0.905	0.005	0.0152023-0.1524592
	Generalizado	0.896	0.004	0.0148439-0.1487008
0.01	<i>Naive</i>	0.881	0.019	0.0467452-0.4561909
	Patterson	0.898	0.002	0.0469817-0.4799223
	Cox	0.891	0.009	0.0462119-0.4718736
	Conservativo	0.933	0.033	0.0546364-0.5789422
	Bootstrap	0.895	0.005	0.0469288-0.4836606
	Propuesto	0.923	0.023	0.0505015-0.5189044
	Generalizado	0.895	0.005	0.0470348-0.4803992
0.1	<i>Naive</i>	0.689	0.211	0.1416091-1.0997731
	Patterson	0.887	0.013	0.1489545-1.8442148
	Cox	0.887	0.013	0.1498652-1.8573884
	Conservativo	0.932	0.032	0.1787217-2.5674450
	Bootstrap	0.891	0.009	0.1535661-2.0236103
	Propuesto	0.942	0.042	0.1849976-2.5237803
	Generalizado	0.89	0.01	0.1530534-1.9617903

Tabla 2.3: Probabilidades de cobertura, errores de cobertura y rango de variación de las amplitudes medias (del instante $t_2 = 1$ a $t_{11} = 10$) para los intervalos de confianza aproximados, al nivel de confianza 0.90, para la media del proceso lognormal homogéneo con $m = 0$ y número de datos en la trayectoria $n = 101$.

σ^2	Métodos	Probabilidad de cobertura	Error de cobertura	Amplitud media
0.0000001	Naive	0.904	0.004	0.0001044-0.0010439
	Patterson	0.903	0.003	0.0001044-0.0010439
	Cox	0.896	0.004	0.0001034-0.0010342
	Conservativo	0.936	0.036	0.0001152-0.0011522
	Bootstrap	0.894	0.006	0.0001043-0.0010427
	Propuesto	0.903	0.003	0.0001044-0.0010442
	Generalizado	0.893	0.007	0.0001046-0.001046
0.000001	Naive	0.903	0.003	0.0003301-0.0033011
	Patterson	0.904	0.004	0.0003301-0.0033012
	Cox	0.896	0.004	0.0003270-0.0032703
	Conservativo	0.937	0.037	0.0003644-0.0036441
	Bootstrap	0.885	0.015	0.0003290-0.0032897
	Propuesto	0.904	0.004	0.0003304-0.0033035
	Generalizado	0.887	0.013	0.0003301-0.0033011
0.00001	Naive	0.899	0.001	0.0010439-0.0104382
	Patterson	0.904	0.004	0.0010439-0.0104387
	Cox	0.896	0.004	0.0010342-0.0103410
	Conservativo	0.937	0.037	0.0011522-0.0115275
	Bootstrap	0.889	0.011	0.0010399-0.0103999
	Propuesto	0.904	0.004	0.0010463-0.0104626
	Generalizado	0.897	0.003	0.0010411-0.0104092

Tabla 2.3. (Continuación)

σ^2	Métodos	Probabilidad de cobertura	Error de cobertura	Amplitud media
0.0001	<i>Naive</i>	0.894	0.006	0.0033010-0.0329909
	Patterson	0.903	0.003	0.0033012-0.0330075
	Cox	0.896	0.004	0.0032703-0.0326994
	Conservativo	0.937	0.037	0.0036442-0.0364942
	Bootstrap	0.889	0.011	0.0033000-0.0330119
	Propuesto	0.904	0.004	0.0033251-0.0332474
	Generalizado	0.888	0.012	0.0032915-0.0329057
0.001	<i>Naive</i>	0.883	0.017	0.0104335-0.1038929
	Patterson	0.898	0.002	0.0104387-0.1044156
	Cox	0.896	0.004	0.0103437-0.1034634
	Conservativo	0.934	0.034	0.0115304-0.1159130
	Bootstrap	0.884	0.016	0.0103886-0.1040943
	Propuesto	0.91	0.01	0.0106781-0.1068343
	Generalizado	0.883	0.017	0.0103982-0.1039628
0.01	<i>Naive</i>	0.834	0.066	0.0328428-0.3162741
	Patterson	0.896	0.004	0.0330080-0.3325816
	Cox	0.894	0.006	0.0327818-0.3302680
	Conservativo	0.932	0.032	0.0365864-0.3747990
	Bootstrap	0.899	0.001	0.0331478-0.3361306
	Propuesto	0.919	0.019	0.0354075-0.3577523
	Generalizado	0.889	0.011	0.0331653-0.3340895
0.1	<i>Naive</i>	0.552	0.378	0.0993213-0.6913130
	Patterson	0.879	0.021	0.1044358-1.1481913
	Cox	0.882	0.018	0.1060520-1.1675100
	Conservativo	0.924	0.024	0.1188299-1.3926257
	Bootstrap	0.879	0.021	0.1072681-1.2167276
	Propuesto	0.942	0.042	0.1286942-1.4806681
	Generalizado	0.889	0.011	0.1072597-1.1961074

De los resultados anteriores, se deduce que el método *naive* no es apropiado. Ya se había comentado que este método proporcionaba realmente intervalos de confianza para $\exp(\mu(t, s))$ y no para $\exp(\mu(t, s) + \lambda\sigma^2(t, s))$. Ahora se comprueba que su error de cobertura crece tanto con σ^2 como con n , llegando a valores inaceptables.

Cuando el tamaño muestral es pequeño, se comportan bien el método bootstrap, Patterson y propuesto, excepto este último cuando aumenta σ^2 .

El método conservativo, por la forma como se calcula, tiene probabilidades de cobertura grandes, superiores al nivel de confianza considerado y, por tanto, errores de cobertura grandes.

El método de Cox se comporta mejor a medida que aumenta el tamaño muestral, llegando a tener un comportamiento muy parecido al de Patterson.

El comportamiento de la banda de confianza generalizada, al ser un esquema Monte Carlo de la banda propuesta, será similar al de ésta cuando se genere un número suficientemente grande de datos en la aplicación de dicho esquema (en el estudio realizado se han considerado 100 valores, por lo que se observan ciertas diferencias).

En resumen, elegiremos el método bootstrap para muestras pequeñas y el de Patterson o Cox para muestras pequeñas y grandes. Además, estos métodos son los que proporcionan amplitudes medias menores en todos los casos considerados.

2.3. Caso del proceso lognormal no homogéneo

Sea $\{X(t), t_0 \leq t \leq T\}$ el proceso de difusión lognormal no homogéneo o con factores exógenos, definido en el capítulo anterior, con momentos infinitesimales

$$A_1(x, t) = \left(\beta_0 + \sum_{j=1}^q \beta_j F_j(t) \right) x$$

$$A_2(x, t) = \sigma^2 x^2, \quad \sigma > 0$$

y distribución inicial $P[X(t_0) = x_0] = 1$. Considerando

- $a_0 = \beta_0 - \frac{\sigma^2}{2}$ y $a_j = \beta_j$, $j = 1 \dots, q$;
- $\mathbf{a} = (a_0, a_1, \dots, a_q)'$;
- $\bar{\mathbf{u}}(t, s) = \left(t - s, \int_s^t F_1(\tau) \tau d\tau, \dots, \int_s^t F_q(\tau) d\tau \right)'$;
- $\bar{\mathbf{u}}(t, t_0) = \bar{\mathbf{u}}(t)$,

las funciones media, moda y sus versiones condicionadas se pueden escribir en la forma

$$\exp(\mu(t, s) + \lambda \sigma^2(t, s))$$

con

Función	$\mu(t, s)$	λ	$\sigma^2(t, s)$
$m(t)$	$\ln(x_0) + \bar{\mathbf{u}}'(t) \mathbf{a}$	1/2	$(t - t_0) \sigma^2$
$m(t s)$	$\ln(x_s) + \bar{\mathbf{u}}'(t, s) \mathbf{a}$	1/2	$(t - s) \sigma^2$
$M_o(t)$	$\ln(x_0) + \bar{\mathbf{u}}'(t) \mathbf{a}$	-1	$(t - t_0) \sigma^2$
$M_o(t s)$	$\ln(x_s) + \bar{\mathbf{u}}'(t, s) \mathbf{a}$	-1	$(t - s) \sigma^2$

Sea t_1, \dots, t_n un conjunto de instantes de tiempo en los cuales se realiza un muestreo discreto del proceso y para los cuales se obtienen las observaciones x_1, \dots, x_n .

Bajo la suposición $P[X(t_1) = x_1] = 1$, se tiene la siguiente expresión de los estimadores máximo verosímiles de \mathbf{a} y σ^2

$$\hat{\mathbf{a}} = (\mathbf{U}\mathbf{U}')^{-1}\mathbf{U}\mathbf{v} \quad \text{y}$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1}\mathbf{v}'(\mathbf{I}_{n-1} - \mathbf{U}'(\mathbf{U}\mathbf{U}')^{-1}\mathbf{U})\mathbf{v}$$

donde

- $\mathbf{u}_i = \mathbf{u}(t_i, t_{i-1}) = (t_i - t_{i-1})^{-\frac{1}{2}}\bar{\mathbf{u}}(t_i, t_{i-1});$
- $v_i = (t_i - t_{i-1})^{-\frac{1}{2}} \ln\left(\frac{x_i}{x_{i-1}}\right);$
- $\mathbf{v} = (v_2, \dots, v_n)'_{(n-1) \times 1};$
- $\mathbf{U} = (\mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n)_{(q+1) \times (n-1)}.$

Estos estimadores son conjuntamente suficientes y completos para (\mathbf{a}, σ^2) y tienen distribuciones asociadas

$$\hat{\mathbf{a}} \sim \mathcal{N}_{q+1}(\mathbf{a}, \sigma^2(\mathbf{U}\mathbf{U}')^{-1}) \quad \text{y}$$

$$\frac{(n-1)\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} \sim \chi_{n-q-2}^2.$$

Notando por $B(t, s)$ al estimador máximo verosímil de $\mu(t, s)$ y por $S^2(t, s)$ al estimador insesgado de $\sigma^2(t, s)$, para valores fijos de t y s

$$B(t, s) = \begin{cases} \ln(x_1) + \bar{\mathbf{u}}'(t)\hat{\mathbf{a}} & \text{para la versión sin condicionar} \\ \ln(x_s) + \bar{\mathbf{u}}'(t, s)\hat{\mathbf{a}} & \text{para la versión condicionada} \end{cases}$$

$$S^2(t, s) = \begin{cases} (t - t_1)S^2 & \text{para la versión sin condicionar} \\ (t - s)S^2 & \text{para la versión condicionada} \end{cases}$$

siendo $S^2 = \frac{(n-1)\hat{\sigma}^2}{n-q-2}$ el estimador insesgado de σ^2 , dichos estimadores son conjuntamente suficientes y completos para $(\mu(t, s), \sigma^2(t, s))$ con distribuciones asociadas

$$B(t, s) \sim \mathcal{N}(\mu(t, s), C(t, s)\sigma^2(t, s))$$

$$\frac{(n-q-2)S^2(t, s)}{\sigma^2(t, s)} \sim \chi^2(n-q-2)$$

con

$$C(t, s) = \begin{cases} \frac{\bar{\mathbf{u}}'(t)(\mathbf{U}\mathbf{U}')^{-1}\bar{\mathbf{u}}(t)}{t - t_1} & \text{para la versión sin condicionar} \\ \frac{\bar{\mathbf{u}}'(t, s)(\mathbf{U}\mathbf{U}')^{-1}\bar{\mathbf{u}}(t, s)}{t - s} & \text{para la versión condicionada.} \end{cases}$$

La obtención de las bandas de confianza, tanto aproximadas como generalizadas, en este caso, es totalmente análoga al caso homogéneo, debido a la unificación en la notación. Sin embargo, dado que las estimaciones de los parámetros son distintas (más complejas en este caso), las expresiones resultantes tienen variaciones en lo que respecta a las distribuciones que aparecen, presentan otro tipo de planteamiento en su cálculo y, como se verá en un estudio posterior, tienen un comportamiento diferente en cuanto a sus probabilidades de cobertura a lo largo del tiempo, a diferencia de lo que ocurría en el caso homogéneo, en el que las probabilidades de cobertura asociadas a cada uno de los intervalos que constituyen la banda de confianza se mantenían constantes. Esta dependencia viene motivada por la inclusión de los factores exógenos y su comportamiento vendrá influenciado por el de ellos.

2.3.1. Bandas aproximadas

Métodos de transformación

- Método *naive*

$$\left(\exp \left(B(t, s) \pm t_{n-q-2; 1-\alpha/2} \sqrt{C(t, s)S(t, s)} \right) \right).$$

- Transformación de Patterson

$$\left(\exp \left(B(t, s) + \lambda S^2(t, s) \pm t_{n-q-2; 1-\alpha/2} \sqrt{C(t, s)S(t, s)} \right) \right).$$

Método directo: Método de Cox

Dado que ahora

$$\begin{aligned} & UMVUE [Var (B(t, s) + \lambda S^2(t, s))] \\ &= UMVUE \left[C(t, s)\sigma^2(t, s) + 2\lambda^2 \frac{\sigma^4(t, s)}{n - q - 2} \right] \\ &= C(t, s)S^2(t, s) + 2\lambda^2 \frac{S^4(t, s)}{n - q} \end{aligned}$$

la banda de confianza adopta la forma

$$\left(\exp \left(B(t, s) + \lambda S^2(t, s) \pm z_{1-\alpha/2} \sqrt{C(t, s)S^2(t, s) + 2\lambda^2 \frac{S^4(t, s)}{n-q}} \right) \right)$$

y la adaptación de la versión de Zhou y Gao da lugar a

$$\left(\exp \left(B(t, s) + \lambda S^2(t, s) \pm z_{1-\alpha/2} \sqrt{C(t, s)S^2(t, s) + 2\lambda^2 \frac{S^4(t, s)}{n-q-2}} \right) \right).$$

Métodos basados en estadísticos pivote

- **Método conservativo de Angus**

$$\left(\exp \left(B(t, s) + \lambda S^2(t, s) - t_{n-q-2; 1-\alpha/2} \sqrt{C(t, s)S^2(t, s) + 2\lambda^2 \frac{S^4(t, s)}{n-q-2}} \right), \right. \\ \left. \exp \left(B(t, s) + \lambda S^2(t, s) + \sqrt{\frac{n-q-2}{2}} \left(\frac{n-q-2}{\chi_{n-q-2; \alpha/2}^2} - 1 \right) \sqrt{C(t, s)S^2(t, s) + 2\lambda^2 \frac{S^4(t, s)}{n-q-2}} \right) \right).$$

- **Método bootstrap paramétrico**

En este caso, se generan k valores N_i^* de una distribución $\mathcal{N}(0, 1)$ y χ_i^{2*} de una χ_{n-q-2}^2 con $i = 1, \dots, k$ de forma independiente, calculando, a partir de los valores simulados,

$$T_i^*(t, s) = \frac{N_i^* + \frac{\lambda S(t, s)}{\sqrt{C(t, s)}} \left(\frac{\chi_i^{2*}}{n-q-2} - 1 \right)}{\sqrt{\frac{\chi_i^{2*}}{n-q-2} \left(1 + 2\lambda^2 \frac{S^2(t, s)}{C(t, s)} \frac{\chi_i^{2*}}{(n-q-2)^2} \right)}}.$$

Los valores $T_i^*(t, s)$ se ordenan en $T_{(1)}^*(t, s) < T_{(2)}^*(t, s) < \dots < T_{(k)}^*(t, s)$ y se calculan $k_1(t, s)$ y $k_2(t, s)$ como

$$k_1^{boot}(t, s) = T_{[(1-\alpha)k]}^*(t, s) \quad \text{y} \quad -k_2^{boot}(t, s) = T_{[\alpha k]}^*(t, s)$$

donde $[a]$ denota el entero menor o igual a a . El intervalo para cada (t, s) tiene la forma siguiente

$$\left(\exp \left(B(t, s) + \lambda S^2(t, s) - k_1^{boot}(t, s) \sqrt{C(t, s)S^2(t, s) + \frac{2\lambda^2}{n-q-2} S^4(t, s)} \right), \right. \\ \left. \exp \left(B(t, s) + \lambda S^2(t, s) + k_2^{boot}(t, s) \sqrt{C(t, s)S^2(t, s) + \frac{2\lambda^2}{n-q-2} S^4(t, s)} \right) \right).$$

Método propuesto

$$\left(\exp \left(B(t, s) - t_{n-q-2; \alpha/2} S(t, s) \sqrt{C(t, s)} + \lambda \frac{(n-q-2)S^2(t, s)}{\chi_{n-q-2; 1-\alpha/2}^2} \right), \right. \\ \left. \exp \left(B(t, s) + t_{n-q-2; \alpha/2} S(t, s) \sqrt{C(t, s)} + \lambda \frac{(n-q-2)S^2(t, s)}{\chi_{n-q-2; \alpha/2}^2} \right) \right).$$

2.3.2. Banda generalizada

Este método es análogo al caso homogéneo, salvo que los valores U_i^* se generan a partir de una distribución $\chi^2(n-q-2)$.

2.3.3. Estudio comparativo. Consideraciones generales

En este caso, las bandas de confianza que se han obtenido se pueden expresar en la forma general

$$\left(x_s \exp \left(\bar{\mathbf{u}}'(t, s) \hat{\mathbf{a}} + K_1 \lambda S^2(t-s) - K_2 \sqrt{\bar{\mathbf{u}}'(t, s) (\mathbf{U}\mathbf{U}')^{-1} \bar{\mathbf{u}}(t, s) S^2 + K_3 \lambda^2 S^4(t-s)^2} \right), \right. \\ \left. x_s \exp \left(\bar{\mathbf{u}}'(t, s) \hat{\mathbf{a}} + K_1 \lambda S^2(t-s) - K_2^* \sqrt{\bar{\mathbf{u}}'(t, s) (\mathbf{U}\mathbf{U}')^{-1} \bar{\mathbf{u}}(t, s) S^2 + K_3 \lambda^2 S^4(t-s)^2} \right) \right)$$

y para realizar un estudio en términos de probabilidades y errores de cobertura y amplitudes medias hay que tener en cuenta, en este caso, las siguientes consideraciones previas:

- Independencia de los parámetros β_j , $j = 0, 1, \dots, q$. Para cada valor de (t, s) fijo, un cambio en las estimaciones de los coeficientes β_j , $j = 0, 1, \dots, q$, afecta a la estimación del vector de parámetros \mathbf{a} y sólo en un cambio de escala en la estimación del correspondiente intervalo de confianza para $\mu(t, s) + \lambda \sigma^2(t, s)$, supuesto que n y S^2 permanecen invariantes, dado que el vector $\bar{\mathbf{u}}(t, s)$ y la forma cuadrática $\bar{\mathbf{u}}'(t, s) (\mathbf{U}\mathbf{U}')^{-1} \bar{\mathbf{u}}(t, s)$ dependen de los factores exógenos pero son independientes de los parámetros desconocidos.
- Dependencia de la probabilidad de cobertura en el tiempo. A partir de la expresión general que adoptan los intervalos de confianza que constituyen las bandas, se deduce que la influencia o no en el tiempo de la probabilidad de cobertura va a depender de la forma que adopten el vector $\bar{\mathbf{u}}(t, s)$ y la forma cuadrática $\bar{\mathbf{u}}'(t, s) (\mathbf{U}\mathbf{U}')^{-1} \bar{\mathbf{u}}(t, s)$ que dependen, a su vez, de los factores exógenos incluidos en el modelo. Así, en general, y a diferencia con el caso homogéneo, no se tiene garantizada la independencia de la probabilidad de cobertura a lo largo del tiempo. A modo ilustrativo, en el Anexo 1 se presenta un estudio para el caso $h(t) = m + bt$ y el intervalo de confianza más simple, el *naive*, particularizado en el caso de la función media sin condicionar.

La dependencia en el tiempo viene, por tanto, determinada por el comportamiento de los factores exógenos incluidos en el modelo. Así pues, el estudio comparativo de los distintos intervalos de confianza aproximados debe hacerse para un modelo concreto, esto es, para funciones F_i fijadas de antemano.

- Dependencia de la amplitud de los intervalos en el tiempo. En este caso hay una dependencia en el tiempo de la amplitud de los intervalos que viene determinada también por el comportamiento de los factores exógenos. Por ello tampoco puede hacerse un estudio general.

A continuación vamos a considerar dos estudios comparativos concretos para diferentes elecciones de los factores exógenos. En el primero de ellos se considera un modelo teórico con factores exógenos funcionalmente conocidos, mientras que en el segundo se trata un modelo de difusión lognormal que permite modelizar la evolución del Producto Interior Bruto en España, modelo introducido por Gutiérrez *et al.* en [23].

Estudio de simulación para el proceso lognormal con factores exógenos $F_i(t) = t^i$, $i = 1, 2, 3$

Para realizar el estudio se han simulado los valores de 1000 trayectorias en instantes de tiempo $t_1 = 0$ a $t_n = n - 1$ de procesos de difusión lognormales homogéneos con momentos infinitesimales

$$\begin{aligned} A_1(x, t) &= x (\beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 t^2 + \beta_3 t^3) \\ A_2(x, t) &= x^2 \sigma^2 \end{aligned} \quad (2.1)$$

con $\beta_0 = \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 10^{-7}$. Tales valores se han considerado con objeto de no obtener valores excesivamente grandes en las trayectorias y evitar con ello errores de desbordamiento y/o truncamiento computacionales que pudieran provocar sesgos en las conclusiones posteriores (recordemos que el estudio es independiente de los valores de los parámetros β_j). Asimismo, se han tomado para σ^2 y n los mismos valores que en el caso homogéneo.

A partir de tales trayectorias se han calculado las bandas de confianza aproximadas y generalizada que aparecen en esta memoria (no se incluyen los resultados para la banda obtenida mediante la adaptación de la versión de Zhou y Gao del método de Cox) para un nivel de confianza de 0.9 y en el caso concreto de la función media, así como la media y el rango de variación, a lo largo del tiempo, de sus probabilidades de cobertura, errores de cobertura y rango de variación de sus amplitudes medias en los instantes de tiempo comunes a todas ellas (de $t_2 = 1$ a $t_{11} = 10$), mostrando estos últimos en las tablas 2.4 a 2.6.

Tabla 2.4: Rango de variación de la probabilidad de cobertura, probabilidad de cobertura media, rango de variación del error de cobertura, error de cobertura medio y rango de variación de las amplitudes medias para las bandas de confianza aproximadas y generalizada, al nivel de confianza 0.9, para la media del proceso lognormal con factores exógenos $F_i(t) = t^i$, $i = 1, 2, 3$. Caso $n = 11$.

σ^2	Métodos	Prob. cob. variación	Prob. cob. media	Error cob. variación	Error cob. media	Ampl. media variación
0.0000001	Naive	0.895-0.906	0.9016	0.001-0.006	0.0036	0.001-0.0037
	Patterson	0.895-0.906	0.9017	0.001-0.006	0.0035	0.001-0.0037
	Cox	0.847-0.865	0.8547	0.035-0.053	0.0453	0.0009-0.0031
	Conservativo	0.945-0.958	0.95	0.0449-0.0579	0.0499	0.0026-0.0093
	Bootstrap	0.889-0.899	0.8925	0.001-0.011	0.0075	0.001-0.0037
	Propuesto	0.895-0.906	0.9017	0.001-0.006	0.0035	0.001-0.0037
	Generalizado	0.887-0.899	0.8943	0.001-0.013	0.0057	0.001-0.0037
0.000001	Naive	0.895-0.906	0.9016	0.001-0.006	0.0036	0.0033-0.0117
	Patterson	0.895-0.906	0.9017	0.001-0.006	0.0035	0.0033-0.0117
	Cox	0.847-0.865	0.8546	0.035-0.053	0.0454	0.0028-0.0099
	Conservativo	0.945-0.958	0.95	0.0449-0.0579	0.0499	0.0084-0.0297
	Bootstrap	0.891-0.904	0.8972	0-0.009	0.004	0.0033-0.0118
	Propuesto	0.895-0.906	0.9019	0.001-0.006	0.0037	0.0033-0.0117
	Generalizado	0.89 -0.903	0.8952	0.001-0.01	0.0054	0.0033-0.0117
0.00001	Naive	0.894-0.906	0.9014	0.001-0.006	0.0036	0.0106-0.0371
	Patterson	0.895-0.906	0.9017	0.001-0.006	0.0035	0.0106-0.0371
	Cox	0.848-0.865	0.8547	0.035-0.052	0.0453	0.009-0.0314
	Conservativo	0.945-0.958	0.95	0.0449-0.0579	0.0499	0.0269-0.0961
	Bootstrap	0.887-0.9	0.8924	0-0.013	0.0076	0.0107-0.0374
	Propuesto	0.895-0.906	0.902	0-0.006	0.0036	0.0106-0.0373
	Generalizado	0.885-0.896	0.8897	0.004-0.015	0.0103	0.0107-0.0373
0.0001	Naive	0.894-0.906	0.9012	0-0.006	0.0032	0.0337-0.1177
	Patterson	0.894-0.907	0.9014	0-0.007	0.0034	0.0337-0.1178
	Cox	0.848-0.864	0.8549	0.036-0.052	0.0451	0.0285-0.0997
	Conservativo	0.945-0.959	0.9502	0.0449-0.0589	0.0501	0.0869-0.3266
	Bootstrap	0.877-0.898	0.8869	0.002-0.023	0.0131	0.0339-0.1187
	Propuesto	0.896-0.908	0.9033	0.002-0.008	0.0045	0.0338-0.1194
	Generalizado	0.878-0.896	0.8853	0.004-0.022	0.0147	0.0338-0.1179

Tabla 2.4. (Continuación)

σ^2	Métodos	Prob. cob. variación	Prob. cob. media	Error cob. variación	Error cob. media	Ampl. media variación
0.001	Naive	0.898-0.907	0.9026	0-0.007	0.0032	0.1066-0.3758
	Patterson	0.898-0.907	0.9026	0-0.007	0.0032	0.1066-0.3758
	Cox	0.842-0.866	0.8543	0.034-0.058	0.0457	0.0903-0.3194
	Conservativo	0.947-0.96	0.9507	0.0469-0.0599	0.0506	0.293-1.346
	Bootstrap	0.882-0.904	0.8936	0-0.018	0.0072	0.1072-0.3839
	Propuesto	0.903-0.911	0.9068	0.003-0.011	0.0068	0.1083-0.3971
	Generalizado	0.881-0.903	0.8938	0.0010-0.019	0.0068	0.1068-0.378
0.01	Naive	0.893-0.912	0.902	0-0.012	0.0046	0.3385-1.2833
	Patterson	0.896-0.907	0.9016	0.001-0.007	0.0026	0.3405-1.3637
	Cox	0.844-0.86	0.8518	0.04-0.056	0.0482	0.2878-1.1351
	Conservativo	0.949-0.962	0.9545	0.0489-0.0619	0.0544	1.1686-14.9864
	Bootstrap	0.881-0.898	0.8913	0.002-0.019	0.0087	0.3438-1.4657
	Propuesto	0.907-0.92	0.9157	0.007-0.02	0.0157	0.359 -1.7067
	Generalizado	0.886-0.895	0.8899	0.005-0.014	0.0101	0.3399-1.4306
0.1	Naive	0.866-0.898	0.8814	0.002-0.034	0.0186	1.1166-8.2549
	Patterson	0.885-0.907	0.8937	0-0.015	0.0077	1.1853-19.0751
	Cox	0.844-0.859	0.8479	0.041-0.056	0.0521	0.9912-14.6259
	Conservativo	0.955-0.971	0.9627	0.0549-0.0709	0.0626	10.739-1.25 $\times 10^6$
	Bootstrap	0.881-0.896	0.8879	0.004-0.019	0.0121	1.2793-132.6722
	Propuesto	0.921-0.945	0.938	0.021-0.0449	0.03794	1.4941-467.6995
	Generalizado	0.879-0.895	0.8881	0.005-0.021	0.0119	1.2698-412.0306

Tabla 2.5: Rango de variación de la probabilidad de cobertura, probabilidad de cobertura media, rango de variación del error de cobertura, error de cobertura medio y rango de variación de las amplitudes medias para las bandas de confianza aproximadas y generalizada, al nivel de confianza 0.9, para la media del proceso lognormal con factores exógenos $F_i(t) = t^i$, $i = 1, 2, 3$. Caso $n = 51$.

σ^2	Métodos	Prob. cob. variación	Prob. cob. media	Error cob. variación	Error cob. media	Ampl. media variación
0.0000001	Naive	0.897-0.907	0.9036	0.001-0.007	0.0042	0.0005-0.003
	Patterson	0.897-0.907	0.9035	0.001-0.007	0.0041	0.0005-0.003
	Cox	0.891-0.905	0.898	0-0.009	0.0032	0.0005-0.003
	Conservativo	0.944-0.952	0.9477	0.0439-0.0519	0.0476	0.0007-0.004
	Bootstrap	0.885-0.9	0.8902	0-0.015	0.0098	0.0005-0.003
	Propuesto	0.897-0.907	0.9035	0.001-0.007	0.0041	0.0005-0.003
	Generalizado	0.886-0.898	0.8923	0.002-0.014	0.0077	0.0005-0.003
0.000001	Naive	0.898-0.907	0.9037	0.001-0.007	0.0041	0.0017-0.0097
	Patterson	0.897-0.907	0.9035	0.001-0.007	0.0041	0.0017-0.0097
	Cox	0.891-0.905	0.898	0-0.009	0.0032	0.0017-0.0095
	Conservativo	0.944-0.952	0.9477	0.0439-0.0519	0.0476	0.0022-0.0126
	Bootstrap	0.893-0.903	0.8965	0-0.007	0.0041	0.0017-0.0096
	Propuesto	0.893-0.907	0.9027	0.001-0.007	0.0045	0.0017-0.0097
	Generalizado	0.891-0.898	0.8951	0.002-0.009	0.0049	0.0017-0.0096
0.00001	Naive	0.897-0.906	0.9037	0.001-0.006	0.0043	0.0055-0.0308
	Patterson	0.898-0.907	0.9036	0.001-0.007	0.004	0.0055-0.0308
	Cox	0.891-0.905	0.8981	0-0.009	0.0033	0.0054-0.0302
	Conservativo	0.945-0.952	0.9479	0.0449-0.0519	0.0478	0.0072-0.0402
	Bootstrap	0.892-0.903	0.8987	0.001-0.008	0.0027	0.0055-0.0307
	Propuesto	0.898-0.907	0.9039	0.001-0.007	0.0043	0.0055-0.0308
	Generalizado	0.898-0.91	0.9017	0-0.01	0.0023	0.0055-0.0308
0.0001	Naive	0.895-0.907	0.9035	0.001-0.007	0.0045	0.0175-0.0976
	Patterson	0.898-0.907	0.9037	0.001-0.007	0.0041	0.0175-0.0976
	Cox	0.891-0.904	0.8979	0-0.009	0.0033	0.0172-0.0956
	Conservativo	0.945-0.952	0.9479	0.0449-0.0519	0.0478	0.0228-0.1286
	Bootstrap	0.887-0.901	0.8941	0.001-0.013	0.0061	0.0175-0.0976
	Propuesto	0.898-0.908	0.9043	0.001-0.008	0.0047	0.0176-0.098
	Generalizado	0.887-0.896	0.8913	0.004-0.013	0.0087	0.0175-0.0973

Tabla 2.5. (Continuación)

σ^2	Métodos	Prob. cob. variación	Prob. cob. media	Error cob. variación	Error cob. media	Ampl. media variación
0.001	Naive	0.899-0.906	0.9031	0.001-0.006	0.0033	0.0555-0.3098
	Patterson	0.895-0.907	0.9037	0.001-0.007	0.0047	0.0555-0.3114
	Cox	0.891-0.904	0.8975	0-0.009	0.0035	0.0544-0.3051
	Conservativo	0.945-0.951	0.9481	0.0449-0.0509	0.048	0.0727-0.4246
	Bootstrap	0.893-0.906	0.9015	0.002-0.007	0.0043	0.0554-0.3116
	Propuesto	0.9-0.911	0.906	0-0.011	0.006	0.0559-0.3153
	Generalizado	0.894-0.907	0.9012	0.001-0.007	0.004	0.0553-0.309
0.01	Naive	0.896-0.906	0.901	0.001-0.006	0.0026	0.1754-1.0112
	Patterson	0.897-0.907	0.9037	0.001-0.007	0.0043	0.1763-1.0646
	Cox	0.891-0.902	0.8978	0-0.009	0.003	0.1728-1.0421
	Conservativo	0.946-0.953	0.9488	0.0459-0.0529	0.0487	0.2353-1.6474
	Bootstrap	0.895-0.904	0.8991	0-0.005	0.0027	0.177 -1.0868
	Propuesto	0.904-0.917	0.9104	0.004-0.017	0.0104	0.1801-1.1137
	Generalizado	0.889-0.906	0.8977	0-0.011	0.0049	0.1762-1.0561
0.1	Naive	0.856-0.903	0.8732	0.003-0.044	0.0274	0.5444-4.2309
	Patterson	0.898-0.905	0.9023	0-0.005	0.0027	0.573 -7.1821
	Cox	0.892-0.902	0.8963	0-0.008	0.0041	0.5623-7.0135
	Conservativo	0.948-0.952	0.95	0.0479-0.0519	0.0499	0.818 -19.4914
	Bootstrap	0.889-0.899	0.8937	0.001-0.011	0.0063	0.5802-8.1338
	Propuesto	0.92-0.931	0.9267	0.02-0.031	0.0267	0.615 -9.3355
	Generalizado	0.89-0.899	0.8947	0.001-0.01	0.0053	0.5702-7.4266

Tabla 2.6: Rango de variación de la probabilidad de cobertura, probabilidad de cobertura media, rango de variación del error de cobertura, error de cobertura medio y rango de variación de las amplitudes medias para las bandas de confianza aproximadas y generalizada, al nivel de confianza 0.9, para la media del proceso lognormal con factores exógenos $F_i(t) = t^i$, $i = 1, 2, 3$. Caso $n = 101$.

σ^2	Métodos	Prob. cob. variación	Prob. cob. media	Error cob. variación	Error cob. media	Ampl. media variación
0.0000001	Naive	0.906-0.914	0.9094	0.006-0.014	0.0094	0.0004-0.0029
	Patterson	0.906-0.914	0.9096	0.006-0.014	0.0096	0.0004-0.0029
	Cox	0.901-0.912	0.9062	0.001-0.012	0.0062	0.0003-0.0028
	Conservativo	0.938-0.943	0.9411	0.0379-0.0429	0.041	0.0004-0.0034
	Bootstrap	0.894-0.9	0.8967	0-0.006	0.0033	0.0004-0.0029
	Propuesto	0.906-0.914	0.9096	0.006-0.014	0.0096	0.0004-0.0029
	Generalizado	0.893-0.901	0.8969	0.001-0.007	0.0033	0.0004-0.0029
0.000001	Naive	0.905-0.914	0.9093	0.005-0.014	0.0093	0.0012-0.0092
	Patterson	0.906-0.914	0.9096	0.006-0.014	0.0096	0.0012-0.0092
	Cox	0.901-0.912	0.9061	0.001-0.012	0.0061	0.0012-0.0091
	Conservativo	0.938-0.943	0.9413	0.0379-0.0429	0.0412	0.0015-0.0109
	Bootstrap	0.892-0.903	0.897	0.001-0.008	0.0042	0.0012-0.0091
	Propuesto	0.893-0.914	0.9081	0.006-0.014	0.0095	0.0012-0.0092
	Generalizado	0.898-0.904	0.9018	0.001-0.004	0.0024	0.0012-0.0091
0.00001	Naive	0.905-0.914	0.909	0.005-0.014	0.009	0.004-0.0291
	Patterson	0.906-0.914	0.9095	0.006-0.014	0.0095	0.004-0.0291
	Cox	0.901-0.911	0.906	0.001-0.011	0.006	0.0039-0.0288
	Conservativo	0.938-0.943	0.9412	0.0379-0.0429	0.0411	0.0048-0.0347
	Bootstrap	0.896-0.903	0.8992	0-0.004	0.002	0.0039-0.0288
	Propuesto	0.906-0.914	0.9096	0.006-0.014	0.0096	0.004-0.0291
	Generalizado	0.898-0.905	0.9021	0.001-0.005	0.0029	0.0039-0.0288
0.0001	Naive	0.904-0.913	0.9089	0.004-0.013	0.0089	0.0127-0.0922
	Patterson	0.906-0.914	0.9094	0.006-0.014	0.0094	0.0127-0.0922
	Cox	0.902-0.911	0.906	0.002-0.011	0.006	0.0126-0.0913
	Conservativo	0.938-0.943	0.9412	0.0379-0.0429	0.0411	0.0152-0.1107
	Bootstrap	0.897-0.902	0.8992	0-0.003	0.0014	0.0127-0.0919
	Propuesto	0.907-0.915	0.9102	0.007-0.015	0.0102	0.0127-0.0925
	Generalizado	0.894-0.9	0.8976	0-0.006	0.0024	0.0126-0.0915

Tabla 2.6. (Continuación)

σ^2	Métodos	Prob. cob. variación	Prob. cob. media	Error cob. variación	Error cob. media	Ampl. media variación
0.001	Naive	0.905-0.911	0.9079	0.005-0.011	0.0079	0.0403-0.2923
	Patterson	0.906-0.914	0.9093	0.006-0.014	0.0093	0.0403-0.2937
	Cox	0.903-0.911	0.9062	0.003-0.011	0.0062	0.0399-0.2909
	Conservativo	0.938-0.943	0.9412	0.0379-0.0429	0.0411	0.0482-0.3598
	Bootstrap	0.892-0.899	0.8964	0.001-0.008	0.0036	0.0401-0.2933
	Propuesto	0.909-0.917	0.9124	0.009-0.017	0.0124	0.0406-0.2963
	Generalizado	0.893-0.899	0.8962	0.001-0.007	0.0038	0.04-0.2904
0.01	Naive	0.899-0.904	0.9014	0.001-0.004	0.0018	0.1271-0.9444
	Patterson	0.905-0.914	0.9088	0.005-0.014	0.0088	0.1278-0.9935
	Cox	0.901-0.912	0.9058	0.001-0.012	0.0058	0.1266-0.9836
	Conservativo	0.939-0.943	0.941	0.0389-0.0429	0.0409	0.154-1.3104
	Bootstrap	0.899-0.906	0.9035	0-0.006	0.0037	0.1276-1.0091
	Propuesto	0.915-0.919	0.9168	0.015-0.019	0.0168	0.1303-1.0243
	Generalizado	0.895-0.899	0.8975	0.001-0.005	0.0025	0.1272-0.9827
0.1	Naive	0.854-0.874	0.8632	0.026-0.046	0.0368	0.3892-3.6497
	Patterson	0.905-0.911	0.9078	0.005-0.011	0.0078	0.4094-6.115
	Cox	0.902-0.91	0.9059	0.002-0.01	0.0059	0.4061-6.0524
	Conservativo	0.938-0.944	0.9415	0.0379-0.0439	0.0414	0.5086-11.0824
	Bootstrap	0.895-0.899	0.8968	0.001-0.005	0.0032	0.4126-6.6533
	Propuesto	0.924-0.931	0.9281	0.024-0.031	0.0281	0.4357-7.196
	Generalizado	0.893-0.898	0.8954	0.002-0.007	0.0046	0.4075-6.1082

Dichas tablas permiten, en la aplicación práctica de este modelo teórico a datos concretos, la elección de la *mejor* banda de confianza aproximada, o generalizada, en función del tamaño muestral n y el valor de la estimación de σ^2 en tal caso.

Estudio de simulación en un proceso lognormal con factores exógenos que modeliza el P.I.B. en España

El modelo. Consideraciones sobre los factores exógenos

Gutiérrez y otros en [23], plantearon un modelo que ajusta el comportamiento del P.I.B. en España mediante un proceso de difusión lognormal con factores exógenos.

La primera cuestión de interés en dicho estudio fue la de decidir cuál era la información *externa* que había de incluirse en el modelo y que constituye, en esencia, la que proporcionan los factores exógenos así como la forma de incorporar dicha información. En ese sentido, y

puesto que el P.I.B. depende fundamentalmente de la Demanda Nacional⁴, la búsqueda de los factores exógenos se restringió a sus componentes⁵. En cuanto a la forma de introducir la información, en estudios de este tipo (ver Tintner y Sengupta [57], Gutiérrez y otros [20]) habitualmente se ha considerado que las variables exógenas son constantes entre cada dos instantes de observación del proceso (usualmente igualmente espaciados). Esta suposición no respeta la hipótesis de continuidad que se ha establecido en la definición del proceso y, además, es discutible en el sentido de que las variables económicas, en esencia, evolucionan de forma continua y no a saltos.

Atendiendo a las dos cuestiones planteadas, Gutiérrez y otros en [23] propusieron dos procedimientos que salvan ambas problemáticas:

1. En cuanto a la selección de los factores exógenos, se planteó un estudio de regresión de la demanda frente a sus componentes.
2. Seleccionados los factores, se construye una función de ellos, mediante poligonales, de tal forma que la integral entre dos instantes de tiempo consecutivos coincida con el valor observado de las variables exógenas. Esto es, los factores exógenos realmente, son funciones no directamente observables pero cuya influencia en el proceso viene dada por los valores observados de las variables consideradas.

A continuación describimos con más detalle, ambas cuestiones, considerando, como se ha hecho a lo largo de esta memoria, el caso de un muestreo discreto del proceso en instantes de tiempo t_1, \dots, t_n y $P[X(t_1) = x_1] = 1$, siendo x_1, \dots, x_n los valores observados de la variable endógena.

Teniendo en cuenta que

$$E[X(t)] = E[X(s)] \exp \left(\int_s^t h(\theta) d\theta \right),$$

podemos escribir,

$$\ln \left(\frac{X(t_i)}{X(t_{i-1})} \right) = \int_{t_{i-1}}^{t_i} h(\tau) d\tau, \quad i = 2, \dots, n.$$

La idea es, primeramente, seleccionar de entre las variables externas Y_1, \dots, Y_k que se observan en los mismos instantes de tiempo que la endógena, aquellas con mayor influencia sobre ella. Así pues se plantea el modelo

$$\ln \left(\frac{X(t_i)}{X(t_{i-1})} \right) = \alpha_0 + \alpha_1 Y_1(t_i) + \dots + \alpha_k Y_k(t_i), \quad i = 2, \dots, n$$

⁴El P.I.B. se calcula como la Demanda Nacional más el Saldo Neto Exterior, entendiéndose por esto último la diferencia entre la exportación e importación de bienes y servicios.

⁵Las componentes de la Demanda Nacional son, según las bases de la Contabilidad Nacional: el Consumo Privado, el Consumo Público, la Formación Interior Bruta de Capital Fijo y la Variación de Existencias.

mediante el cual, y a través de técnicas de selección de regresores, se eligen cuáles son las variables realmente influyentes, Y_{i_1}, \dots, Y_{i_q} donde $\{i_1, \dots, i_q\} \subseteq \{1, \dots, k\}$.

Una vez establecido el subconjunto óptimo de regresores, el siguiente paso es determinar la forma funcional de los factores que se construyen a partir de ellos. Para ello, y teniendo en cuenta que la influencia real de los factores exógenos sobre la variable endógena se expresa a partir de las integrales entre dos instantes consecutivos de tiempo, se consideran las funciones F_j , asociadas a cada Y_j seleccionada, como las poligonales que verifican

$$\int_{t_{i-1}}^{t_i} F_j(\tau) d\tau = Y_j(t_i), \quad i = 2, \dots, n, \quad F_j(t_1) \text{ fijo}, \quad j = i_1, \dots, i_q$$

esto es

$$F_j(t) = F_j(t_{i-1}) + \frac{2}{t_i - t_{i-1}} \left[\frac{Y_j(t_i)}{t_i - t_{i-1}} - F_j(t_{i-1}) \right] (t - t_{i-1}); \quad \begin{array}{l} t_{i-1} \leq t \leq t_i \\ i = 2, \dots, n \\ j = i_1, \dots, i_q \end{array} \quad (2.2)$$

Siguiendo las pautas comentadas, presentamos los resultados referentes a la selección de los factores y estimación del modelo, una vez completada y actualizada hasta el año 2002.

- **Selección de los factores:** a partir de la tabla 2.7, se ha realizado una regresión *stepwise* de la variable *logaritmos de los incrementos de la Demanda Nacional*⁶ frente a

- Y_1 : *Incrementos*⁷ *del Consumo Privado*.
- Y_2 : *Incrementos del Consumo Público*.
- Y_3 : *Incrementos de la Formación Bruta de Capital Fijo*.
- Y_4 : *Incrementos de la Variación de Existencias*.

resultando seleccionadas las variables Y_1 e Y_3 , las cuales, además explican el 98.37% de la variabilidad de la variable dependiente. Por tanto, seleccionamos como factores exógenos las funciones poligonales F_1 y F_2 tales que

$$\int_{t_{i-1}}^{t_i} F_1(\tau) d\tau = Y_1(t_i), \quad \int_{t_{i-1}}^{t_i} F_2(\tau) d\tau = Y_3(t_i), \quad i = 2, \dots, n, \quad Y_1(t_1) = Y_3(t_1) = 1.$$

⁶Puesto que la Demanda Nacional es la principal componente del P.I.B., se ha considerado ésta como variable dependiente en la regresión realizada.

⁷El considerar los incrementos de las variables exógenas es habitual ya que más que el valor concreto de las mismas, es más informativo tener en cuenta la variación de los mismos entre dos intervalos de tiempo consecutivos, o sea la tasa de variación.

- **Estimación del modelo:** a partir de la selección anterior y teniendo en cuenta los datos de la tabla 2.7, las estimaciones de los parámetros del modelo, calculadas según lo determinado en el Capítulo 1, son:

$$\hat{\beta}_0 = -0.7146756702074915$$

$$\hat{\beta}_1 = 0.6297030524705661$$

$$\hat{\beta}_2 = 0.09370917397490128$$

$$\hat{\sigma}^2 = 0.00003799426796598253$$

Estudio de las bandas aproximadas y generalizada

Con objeto de decidir qué banda de confianza aproximada o generalizada sería la *óptima* con respecto al modelo considerado, y con los datos disponibles, se han simulado 1000 trayectorias del proceso de difusión con momentos infinitesimales

$$A_1(x, t) = [-0.7146756702074915 + 0.6297030524705661F_1(t) + 0.09370917397490128F_2(t)]x$$

$$A_2(x, t) = 0.00003799426796598253x^2.$$

Cada trayectoria consta de 32 datos entre los años 1971 y 2002 partiendo del año $t_1 = 1970$ y valor inicial $x_1 = 213032$.

A partir de tales trayectorias se han calculado las bandas de confianza aproximadas y generalizada que aparecen en esta memoria (no se incluyen los resultados para la banda obtenida mediante la adaptación de la versión de Zhou y Gao del método de Cox) para un nivel de confianza de 0.9 y en el caso concreto de la función media, así como la media y el rango de variación, a lo largo del tiempo, de sus probabilidades de cobertura, errores de cobertura y rango de variación de las amplitudes medias en los instantes de tiempo de observación de las trayectorias.

Los resultados para todos los instantes de tiempo se muestran en la tabla 2.8 y permiten la comparación de los métodos de forma global.

A la vista de los resultados obtenidos, la banda de confianza generalizada es la que presenta un rango de variación de las probabilidades de cobertura menor, conteniendo al nivel de confianza impuesto. Dado que esta banda corresponde a un esquema Monte Carlo de la banda obtenida por el método propuesto, y sus variaciones son debidas al número de valores generados para su cálculo, podemos seleccionar cualquiera de ellas.

En este caso, la banda *naive* es similar, en cuanto a error de cobertura, a la proporcionada por el método propuesto pero con menor rango para las amplitudes medias (la optimalidad en este caso de esta banda es debida a un valor muy pequeño en la estimación de σ^2).

Si nuestro interés se centra prioritariamente en la amplitud de las bandas conseguidas siempre que el error de cobertura sea aceptable, elegiremos la banda proporcionada por el método de Cox.

Tabla 2.7: Valores del P.I.B. (millones de euros constantes de 1995) y de los incrementos de las componentes de la Demanda Nacional entre los años 1971 y 2002. Fuente: BBVA.

Año	P.I.B.	Incr. Gasto Privado	Incr. Gasto Público	Incr. F.B.C.F.	Incr. Var. existencias	Ln(Incr. Demanda)
1971	222299	1.05100587	1.042984855	0.96999327	1.169094923	0.031475266
1972	241525	1.082994443	1.052015656	1.14200302	1.199018127	0.089870585
1973	261070	1.078003866	1.063990476	1.129991959	0.926299213	0.083053662
1974	276858	1.050997581	1.093010245	1.062001898	2.035362122	0.067173864
1975	278385	1.018000197	1.051985028	0.955003648	0.946207818	0.005010991
1976	288514	1.056000318	1.069000122	0.992001746	0.96345339	0.040108967
1977	294720	1.015000942	1.039000939	0.990994248	0.584570277	0.004536543
1978	298043	1.009001129	1.053991896	0.973006836	0.313793103	-0.000758669
1979	299791	1.012997725	1.042004364	0.955990937	2.536463536	0.010008506
1980	304227	1.006000571	1.042006332	1.007007553	1.533280819	0.01554237
1981	303814	0.989998556	1.040623953	0.983474992	-0.14153609	-0.019135815
1982	307606	1.000406182	1.047820489	1.010122921	0.542649728	0.010177911
1983	313054	1.003904013	1.032495173	0.987626547	2.879598662	0.003180093
1984	318635	0.998014103	1.018594471	0.952181266	-1.067363531	-0.001681525
1985	326033	1.022823506	1.043290495	1.067002555	0.116430903	0.03105686
1986	336642	1.034027531	1.046513488	1.104613242	10.02803738	0.051455448
1987	355316	1.059517903	1.091663004	1.1219996	1.550792171	0.076032867
1988	373415	1.048913925	1.036460704	1.135527019	1.712740385	0.066007814
1989	391444	1.054271001	1.083309408	1.120099932	0.979298246	0.070480455
1990	406250	1.03511339	1.062700714	1.06451022	0.99605876	0.045101012
1991	416585	1.02886329	1.060350898	1.016620443	0.93381295	0.030022658
1992	420461	1.021742896	1.034960294	0.958690111	1.149460709	0.00994046
1993	416124	0.980973811	1.026574343	0.910901783	0.031836461	-0.033815908
1994	426037	1.010824866	1.005351772	1.018515985	16	0.014719416
1995	437788	1.017151406	1.02436276	1.077452649	0.985526316	0.030538633
1996	448456	1.021545714	1.012656627	1.020747836	0.834445928	0.018948087
1997	466513	1.03164067	1.028730179	1.049548082	0.9648	0.034274117
1998	486783	1.043549498	1.036593803	1.100110555	1.654228856	0.054971913
1999	507219	1.047460088	1.04153104	1.087456695	1.177443609	0.054713809
2000	528442	1.039473117	1.050419885	1.056720169	0.805023414	0.043456136
2001	542569	1.02518424	1.030629936	1.032219213	0.875727129	0.026938672
2002	553477	1.018830288	1.038182762	1.014283909	1.47826087	0.022215677

Las bandas conservativas y bootstrap presentan los mayores errores de cobertura, siendo, además, la conservativa la de mayor amplitud.

Para mostrar las posibilidades de las bandas a la hora de futuras predicciones, se mues-

tran los resultados en el último año en la tabla 2.9, siendo las conclusiones similares a las anteriormente establecidas.

Tabla 2.8: Rango de variación de la probabilidad de cobertura, probabilidad de cobertura media, rango de variación del error de cobertura, error de cobertura medio y rango de variación de las amplitudes medias para las bandas de confianza aproximadas y generalizada, al nivel de confianza 0.9, para la función media que modeliza el P.I.B.

Métodos	Prob. cob. variación	Prob. cob. media	Error cob. variación	Error cob. media	Amplitud media variación
Naive	0.882-0.909	0.89178125	0-0.018	0.00946875	2417.9491-65302.5648
Patterson	0.881-0.907	0.8913125	0-0.019	0.0096875	2417.9968-65343.8726
Cox	0.87 -0.9	0.88125	0-0.03	0.01875	2340.7633-63254.8897
Conservativo	0.938-0.955	0.94453125	0.017-0.055	0.04378125	3248.8546-89484.6992
Bootstrap	0.872-0.952	0.8881875	0.001-0.052	0.016	2421.0044-65539.2623
Propuesto	0.882-0.908	0.89209375	0-0.018	0.00909375	2422.0445-65675.1914
Generalizado	0.884-0.911	0.89646875	0-0.016	0.00540625	2489.6651-67243.7583

Tabla 2.9: Probabilidad de cobertura, error de cobertura y amplitud media para las bandas de confianza aproximadas y generalizado, al nivel de confianza 0.90, para la media estimada del P.I.B. en el instante de tiempo $t = 2002$.

Métodos	Probabilidad de cobertura ($t = 2002$)	Error de cobertura ($t = 2002$)	Amplitud media ($t = 2002$)
Naive	0.89	0.01	65302.5648
Patterson	0.888	0.012	65343.8726
Cox	0.877	0.023	63254.8897
Conservativa	0.939	0.039	89484.6992
Bootstrap	0.878	0.022	65539.2623
Propuesto	0.89	0.01	65675.1914
Generalizado	0.894	0.006	67243.7583

Capítulo 3

Proceso lognormal con factores exógenos de tipo polinómico

En este capítulo realizamos un estudio sobre el proceso de difusión lognormal con factores exógenos polinómicos.

La consideración de este modelo plantea una solución al problema que se presenta cuando no hay disponible información muestral sobre las influencias externas (factores exógenos) en el estudio del proceso lognormal no homogéneo con momentos infinitesimales

$$\begin{aligned}A_1(x, t) &= h(t)x \\ A_2(x, t) &= \sigma^2 x^2\end{aligned}$$

donde $\sigma > 0$, y lleva implícito una hipótesis de regularidad sobre la función h que le permite ser desarrollada en serie.

A continuación vamos a profundizar, en primer lugar, en la estimación máximo verosímil de los parámetros del modelo. Si bien este problema está resuelto en el Capítulo 1, ya que el modelo aquí planteado es un caso particular del allí expuesto, la forma funcional de los factores exógenos considerados permiten plantear procedimientos secuenciales (tipo *forward*) de introducción sucesiva de polinomios que ayuden a aproximar mejor el fenómeno en estudio. Ello conducirá a la obtención de expresiones recursivas para los estimadores máximo verosímiles de los parámetros que permitirán actualizar la estimación en cada etapa del procedimiento iterativo en función de los estimadores de etapas precedentes.

A partir de tales expresiones recursivas se obtendrán otras para los estimadores máximo verosímiles de las funciones paramétricas introducidas en el Capítulo 1. En el caso de los estimadores insesgados de mínima varianza y del cálculo de bandas de confianza, dada su complejidad, no se conseguirá tal fin, pero sí se podrán obtener fórmulas de este tipo para algunos de los argumentos de las funciones involucradas en sus expresiones.

3.1. Planteamiento del modelo

Sea $\{X^k(t); t_0 \leq t \leq T\}$ el proceso de difusión lognormal no homogéneo con momentos infinitesimales

$$\begin{aligned} A_1^k(x, t) &= x \left(\sum_{j=0}^k \beta_j^k P_j^k(t) \right) \\ A_2^k(x, t) &= \sigma_k^2 x^2, \quad \sigma_k > 0 \end{aligned}$$

donde P_j^k es un polinomio de grado k para $j = 1, \dots, k$ y $P_0^k(t) = 1, \forall t \in [t_0, T]$.

Teniendo en cuenta la notación que se ha seguido hasta ahora, consideremos

$$\begin{aligned} a_0^k &= \beta_0^k - \frac{1}{2}\sigma_k^2 \\ \mathbf{a}_k &= \left(a_0^k, \beta_1^k, \dots, \beta_k^k \right)' \\ \bar{\mathbf{u}}^k(t, s) &= \left(t - s, \int_s^t P_1^k(\tau) d\tau, \dots, \int_s^t P_k^k(\tau) d\tau \right)' \\ \bar{\mathbf{u}}^k(t) &= \bar{\mathbf{u}}^k(t, t_0). \end{aligned}$$

Como se comentó en el Capítulo 1, las principales características del proceso se pueden expresar como casos particulares de las funciones

$$\theta_k(C, \mathbf{A}^k(t, s), B(t, s), l) = C \exp\left(\mathbf{A}^{k'}(t, s)\mathbf{a}_k + B(t, s)\sigma_k^l\right) \quad (3.1)$$

y

$$\theta_k^*(C, \mathbf{A}^k(t, s), B(t, s), D(t, s)) = \theta_k(C, \mathbf{A}^k(t, s), B(t, s), 2) - \theta_k(C, \mathbf{A}^k(t, s), D(t, s), 2) \quad (3.2)$$

con $C > 0$, $l \in \mathbb{N}$, $\mathbf{A}^k(t, s) \in \mathbb{R}^{k+1}$ y $B(t, s) \in \mathbb{R}$, donde hemos adaptado la notación al caso concreto que nos ocupa.

Puesto que algunas de esas características serán utilizadas con posterioridad, recordemos las expresiones que adoptan. Concretamente, considerando la distribución inicial $P[X^k(t_0) = x_0] = 1$, se tiene

$$\begin{aligned} m^k(t) &= \theta_k\left(x_0, \bar{\mathbf{u}}^k(t), \frac{1}{2}(t - t_0), 2\right), \quad t \geq t_0 \\ M_o^k(t) &= \theta_k\left(x_0, \bar{\mathbf{u}}^k(t), -(t - t_0), 2\right), \quad t \geq t_0 \\ C_\alpha^k(t) &= \theta_k\left(x_0, \bar{\mathbf{u}}^k(t), z_\alpha \sqrt{t - t_0}, 1\right), \quad t \geq t_0, \end{aligned}$$

mientras que para las versiones condicionadas, dados s y x_s ,

$$\begin{aligned} m^{(k)}(t|s) &= \theta_k \left(x_s, \bar{\mathbf{u}}^{(k)}(t, s), \frac{1}{2}(t-s), 2 \right), \quad t > s \geq t_0 \\ M_o^{(k)}(t|s) &= \theta_k \left(x_s, \bar{\mathbf{u}}^{(k)}(t, s), -(t-s), 2 \right), \quad t > s \geq t_0 \\ C_\alpha^{(k)}(t|s) &= \theta_k \left(x_s, \bar{\mathbf{u}}^{(k)}(t, s), z_\alpha \sqrt{t-s}, 1 \right), \quad t > s \geq t_0. \end{aligned}$$

Por último, la función covarianza se expresa como

$$R^{(k)}(t, s) = \theta_k^* \left(x_0^2, \bar{\mathbf{u}}^{(k)}(t) + \bar{\mathbf{u}}^{(k)}(s), \frac{t+s}{2} - 2t_0 + t \wedge s, \frac{t+s}{2} - t_0 \right).$$

Por otra parte, para el desarrollo de bandas de confianza para las funciones media y moda, así como para sus versiones condicionadas, estas funciones se notarán en la forma $\exp(\mu_k(t, s) + \lambda \sigma_k^2(t, s))$, con

	Media	Media condicionada	Moda	Moda condicionada
$\mu_k(t, s)$	$\ln(x_0) + \bar{\mathbf{u}}^{(k)'}(t) \mathbf{a}_k$	$\ln(x_s) + \bar{\mathbf{u}}^{(k)'}(t, s) \mathbf{a}_k$	$\ln(x_0) + \bar{\mathbf{u}}^{(k)'}(t) \mathbf{a}_k$	$\ln(x_s) + \bar{\mathbf{u}}^{(k)'}(t, s) \mathbf{a}_k$
λ	1/2	1/2	-1	-1
$\sigma_k^2(t, s)$	$(t-t_0)\sigma_k^2$	$(t-s)\sigma_k^2$	$(t-t_0)\sigma_k^2$	$(t-s)\sigma_k^2$

3.2. Estimación MV de los parámetros del modelo. Expresiones recursivas

Consideremos x_1, x_2, \dots, x_n las observaciones obtenidas a partir de un muestreo discreto en los instantes de tiempo t_1, t_2, \dots, t_n , siendo $n > k+2$, y supongamos $P[X^{(k)}(t_1) = x_1] = 1$.

Teniendo en cuenta que el modelo planteado es un caso particular del estudiado en el Capítulo 1, a partir de los estimadores máximo verosímiles allí obtenidos, se tienen las siguientes expresiones para los correspondientes estimadores de los parámetros \mathbf{a}_k y σ_k^2 :

$$\hat{\mathbf{a}}_k = \mathbf{V}_k \mathbf{v} \quad (3.3)$$

$$\hat{\sigma}_k^2 = \frac{1}{n-1} \mathbf{v}' \mathbf{H}_k \mathbf{v} \quad (3.4)$$

donde se ha mantenido la notación del Capítulo 1, siendo ahora

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= (v_2, \dots, v_n)' \\ \mathbf{u}_i^{(k)} &= (t_i - t_{i-1})^{-\frac{1}{2}} \bar{\mathbf{u}}^{(k)}(t_i, t_{i-1}) \\ \mathbf{U}_k &= (\mathbf{u}_2^{(k)}, \dots, \mathbf{u}_n^{(k)}) \\ \mathbf{V}_k &= (\mathbf{U}_k \mathbf{U}_k')^{-1} \mathbf{U}_k \\ \mathbf{H}_k &= \mathbf{I}_{n-1} - \mathbf{U}_k' \mathbf{V}_k. \end{aligned}$$

Una vez obtenidas las expresiones de los estimadores, nos planteamos qué tipo de cambios se producirían en ellas si modificásemos la expresión de la función h mediante la inclusión de un nuevo término, $\beta_{k+1}^{k+1} P_{k+1}^{k+1}$, donde P_{k+1}^{k+1} es ahora un polinomio de grado $k+1$.

Sumando este término a la función $\sum_{j=0}^k \beta_j^k P_j^k(t)$ que interviene en la media infinitesimal del proceso, se tiene un nuevo proceso $\{X^{k+1}(t); t_0 \leq t \leq T\}$ cuyos momentos infinitesimales serán ahora

$$A_1^{k+1}(x, t) = x \left(\sum_{j=0}^{k+1} \beta_j^{k+1} P_j^{k+1}(t) \right)$$

$$A_2^{k+1}(x, t) = \sigma_{k+1}^2 x^2, \quad \sigma_{k+1} > 0.$$

La información muestral asociada a este último término, en cada intervalo $[t_{i-1}, t_i]$, se incorpora a \mathbf{u}_i^k , dando origen al vector \mathbf{u}_i^{k+1} , cuyas primeras $k+1$ componentes coinciden con las de \mathbf{u}_i^k , siendo la última igual a $f_i = (t_i - t_{i-1})^{-\frac{1}{2}} \int_{t_{i-1}}^{t_i} P_{k+1}^{k+1}(\tau) d\tau$. De esta forma podemos expresar la matriz \mathbf{U}_{k+1} , que contiene la información global de todos los factores exógenos, en la forma

$$\mathbf{U}_{k+1} = \begin{pmatrix} \mathbf{U}_k \\ \mathbf{d}'_{k+1} \end{pmatrix}$$

donde $\mathbf{d}_{k+1} = (f_2, \dots, f_n)'$. Así, pues

$$\mathbf{U}_{k+1} \mathbf{U}'_{k+1} = \begin{pmatrix} \mathbf{U}_k \\ \mathbf{d}'_{k+1} \end{pmatrix} (\mathbf{U}'_k | \mathbf{d}_{k+1}) = \begin{pmatrix} \mathbf{U}_k \mathbf{U}'_k & \mathbf{U}_k \mathbf{d}_{k+1} \\ \mathbf{d}'_{k+1} \mathbf{U}'_k & \mathbf{d}'_{k+1} \mathbf{d}_{k+1} \end{pmatrix}$$

de donde, teniendo en cuenta la expresión de la inversa de una matriz por cajas y notando $e_{k+1} = \mathbf{d}'_{k+1} \mathbf{H}_k \mathbf{d}_{k+1}$, se obtiene

$$(\mathbf{U}_{k+1} \mathbf{U}'_{k+1})^{-1} = \frac{1}{e_{k+1}} \begin{pmatrix} [e_{k+1} + (\mathbf{U}_k \mathbf{U}'_k)^{-1} \mathbf{U}_k \mathbf{d}_{k+1} \mathbf{d}'_{k+1} \mathbf{U}'_k] (\mathbf{U}_k \mathbf{U}'_k)^{-1} & -(\mathbf{U}_k \mathbf{U}'_k)^{-1} \mathbf{U}_k \mathbf{d}_{k+1} \\ -\mathbf{d}'_{k+1} \mathbf{U}'_k (\mathbf{U}_k \mathbf{U}'_k)^{-1} & 1 \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

y

$$\mathbf{H}_{k+1} = \mathbf{I}_{n-1} - (\mathbf{U}'_k | \mathbf{d}_{k+1})' (\mathbf{U}_k \mathbf{U}'_k)^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{U}_k \\ \mathbf{d}'_{k+1} \end{pmatrix} = \mathbf{H}_k - \frac{\mathbf{H}_k \mathbf{d}_{k+1} \mathbf{d}'_{k+1} \mathbf{H}_k}{e_{k+1}}. \quad (3.6)$$

A partir de las expresiones anteriores, teniendo en cuenta (3.3) y (3.4), se obtienen las siguientes fórmulas recursivas para los estimadores máximo verosímiles de los parámetros

$$\hat{\mathbf{a}}_{k+1} = \mathbf{V}_{k+1} \mathbf{v} = (\mathbf{U}_{k+1} \mathbf{U}'_{k+1})^{-1} \mathbf{U}_{k+1} \mathbf{v}$$

$$= \frac{1}{e_{k+1}} \left[\begin{pmatrix} e_{k+1} \mathbf{I}_{k+1} + \mathbf{V}_k \mathbf{d}_{k+1} \mathbf{d}'_{k+1} \mathbf{U}'_k \\ -\mathbf{d}'_{k+1} \mathbf{U}'_k \end{pmatrix} \hat{\mathbf{a}}_k + \begin{pmatrix} -\mathbf{V}_k \mathbf{d}_{k+1} \\ 1 \end{pmatrix} \mathbf{d}'_{k+1} \mathbf{v} \right] \quad (3.7)$$

y

$$\hat{\sigma}_{k+1}^2 = \hat{\sigma}_k^2 - \frac{\mathbf{v}'\mathbf{H}_k\mathbf{d}_{k+1}\mathbf{d}'_{k+1}\mathbf{H}_k\mathbf{v}}{(n-1)e_{k+1}}. \quad (3.8)$$

3.3. Estimación de funciones paramétricas. Expresiones recursivas

A continuación vamos a profundizar en el cálculo de los estimadores máximo verosímiles e insesgados de mínima varianza para las funciones paramétricas (3.1) y (3.2). Puesto que dichas funciones vienen expresadas en términos de los parámetros del modelo, y para ellos hay fórmulas recursivas para sus estimadores máximo verosímiles, la cuestión que nos planteamos es si esa propiedad de recursividad es transmitida a los estimadores de las funciones paramétricas consideradas. En lo que sigue, y al igual que se hizo en el Capítulo 1, para t y s fijos, notaremos $\mathbf{A}_{t,s}^{(k)}$ y $B_{t,s}$ a $\mathbf{A}^{(k)}(t,s)$ y $B(t,s)$, respectivamente.

Los estimadores máximo verosímiles de las funciones (3.1) y (3.2) se obtienen a partir de los correspondientes de \mathbf{a}_k y σ_k^2 vía el teorema de Zehna. Así se tiene

$$\hat{\theta}_k(C, \mathbf{A}_{t,s}^{(k)}, B_{t,s}, l) = C \exp\left(\mathbf{A}_{t,s}^{(k)'}\hat{\mathbf{a}}_k + B_{t,s}\hat{\sigma}_k^l\right).$$

Por otra parte, como se mostró en el Capítulo 1 de esta memoria, el UMVUE de las funciones θ_k se expresa de forma diferente cuando $l = 1$ y $l = 2$, mientras que el de las funciones θ_k^* se obtiene a partir de ellas gracias a la propiedad de linealidad. A partir de los resultados obtenidos en el Capítulo 1,

$$\hat{\theta}_k^I(C, \mathbf{A}_{t,s}^{(k)}, B_{t,s}, 1) = C \exp\left(\mathbf{A}_{t,s}^{(k)'}\hat{\mathbf{a}}_k\right) {}_0F_1\left(\frac{n-k-2}{2}; \frac{(n-1)\left[B_{t,s} - \frac{1}{2}A_{t,s}^{U_k}\right]}{2}\hat{\sigma}_k^2\right)$$

y

$$\hat{\theta}_k^I(C, \mathbf{A}_{t,s}^{(k)}, B_{t,s}, 2) = C \exp\left(\mathbf{A}_{t,s}^{(k)'}\hat{\mathbf{a}}_k\right) \Gamma\left(\frac{n-k-2}{2}\right) \sum_{v=0}^{\infty} \frac{\left(\hat{\sigma}_k\sqrt{(n-1)A_{t,s}^{U_k}}\right)^v}{v!\Gamma\left(\frac{n-k-2+v}{2}\right)2^v} H_v\left(\frac{B_{t,s}}{\sqrt{2A_{t,s}^{U_k}}}\right)$$

respectivamente, con $A_{t,s}^{U_k} = \mathbf{A}_{t,s}^{(k)'}(\mathbf{U}_k\mathbf{U}_k')^{-1}\mathbf{A}_{t,s}^{(k)}$, siendo H_l el polinomio de Hermite definido por

$$H_l(\gamma) = l! \sum_{\alpha=0}^{\lfloor l/2 \rfloor} \frac{(-1)^\alpha}{(l-2\alpha)! \alpha!} (2\gamma)^{l-2\alpha},$$

donde $[a]$ denota la parte entera de a .

Puesto que los estimadores máximo verosímiles de las funciones θ viene dado en términos de una función exponencial, cuyos argumentos son los estimadores máximo verosímiles de los parámetros, para los cuales hay expresiones recursivas aditivas, es posible obtener expresiones recursivas para ellos. Para ello tengamos en cuenta que, a partir de (3.8), se puede escribir

$$\hat{\sigma}_{k+1}^l = \hat{\sigma}_k^l + \left[\hat{\sigma}_k^2 - \frac{\mathbf{v}'\mathbf{H}_k\mathbf{d}_{k+1}\mathbf{d}'_{k+1}\mathbf{H}_k\mathbf{v}}{(n-1)e_{k+1}} \right]^{\frac{l}{2}} - \hat{\sigma}_k^l. \quad (3.9)$$

Además, podemos expresar el vector $\mathbf{A}_{t,s}^{k+1)}$ en función de $\mathbf{A}_{t,s}^{k)}$ en la forma

$$\mathbf{A}_{t,s}^{k+1)} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{t,s}^{k)} \\ \delta_{k+1} \end{pmatrix} \quad (3.10)$$

donde $\delta_{k+1} \in \mathbb{R}$. Observemos que, en sentido estricto, a partir de la definición de las funciones paramétricas, el vector $\mathbf{A}_{t,s}^{k)}$ es, simplemente, un vector $k+1$ dimensional, por lo que en principio, no tiene por qué existir esa forma recursiva anteriormente expuesta para él. Lo que ocurre es que, en el caso que nos ocupa del proceso lognormal con factores exógenos polinómicos, dicho vector contiene la información muestral, en el intervalo $[s, t]$, sobre los factores exógenos. De esta forma, con el planteamiento que estamos tratando de inclusión sucesiva de funciones polinómicas, tiene pleno sentido la partición que se ha hecho para $\mathbf{A}_{t,s}^{k+1)}$ en función de $\mathbf{A}_{t,s}^{k)}$.

Así pues, a partir de (3.7), (3.8), (3.9) y (3.10), se tiene:

$$\begin{aligned} \hat{\theta}_{k+1} \left(C, \mathbf{A}_{t,s}^{k+1)}, B_{t,s}, l \right) &= \hat{\theta}_k \left(C, \mathbf{A}_{t,s}^{k)}, B_{t,s}, l \right) \\ &\times \exp \left(\frac{\mathbf{A}_{t,s}^{k+1)'} }{e_{k+1}} \left[\begin{pmatrix} \mathbf{V}_k \mathbf{d}_{k+1} \mathbf{d}'_{k+1} \mathbf{U}'_k \\ -\mathbf{d}'_{k+1} \mathbf{U}'_k \end{pmatrix} \hat{\mathbf{a}}_k + \begin{pmatrix} -\mathbf{V}_k \mathbf{d}_{k+1} \\ 1 \end{pmatrix} \mathbf{d}'_{k+1} \mathbf{v} \right] \right. \\ &\left. + B_{t,s} \left[\left[\hat{\sigma}_k^2 - \frac{\mathbf{v}'\mathbf{H}_k\mathbf{d}_{k+1}\mathbf{d}'_{k+1}\mathbf{H}_k\mathbf{v}}{(n-1)e_{k+1}} \right]^{\frac{l}{2}} - \hat{\sigma}_k^l \right] \right) \end{aligned} \quad (3.11)$$

y puesto que las funciones del tipo θ_k^* son combinaciones lineales de las de tipo θ_k para

$l = 2$, se deduce

$$\begin{aligned}
\hat{\theta}_{k+1}^* \left(C, \mathbf{A}_{t,s}^{k+1}, B_{t,s}, D_{t,s} \right) &= \hat{\theta}_k \left(C, \mathbf{A}_{t,s}^k, B_{t,s}, 2 \right) \exp \left(\frac{\mathbf{A}_{t,s}^{k+1}'}{e_{k+1}} \left[\begin{pmatrix} \mathbf{V}_k \mathbf{d}_{k+1} \mathbf{d}'_{k+1} \mathbf{U}'_k \\ -\mathbf{d}'_{k+1} \mathbf{U}'_k \end{pmatrix} \hat{\mathbf{a}}_k \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \begin{pmatrix} -\mathbf{V}_k \mathbf{d}_{k+1} \\ 1 \end{pmatrix} \mathbf{d}'_{k+1} \mathbf{v} \right] - \frac{B_{t,s}}{(n-1)e_{k+1}} \mathbf{v}' \mathbf{H}_k \mathbf{d}_{k+1} \mathbf{d}'_{k+1} \mathbf{H}_k \mathbf{v} \right) \\
&\quad - \hat{\theta}_k \left(C, \mathbf{A}_{t,s}^k, D_{t,s}, 2 \right) \exp \left(\frac{\mathbf{A}_{t,s}^{k+1}'}{e_{k+1}} \left[\begin{pmatrix} \mathbf{V}_k \mathbf{d}_{k+1} \mathbf{d}'_{k+1} \mathbf{U}'_k \\ -\mathbf{d}'_{k+1} \mathbf{U}'_k \end{pmatrix} \hat{\mathbf{a}}_k \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \begin{pmatrix} -\mathbf{V}_k \mathbf{d}_{k+1} \\ 1 \end{pmatrix} \mathbf{d}'_{k+1} \mathbf{v} \right] - \frac{D_{t,s}}{(n-1)e_{k+1}} \mathbf{v}' \mathbf{H}_k \mathbf{d}_{k+1} \mathbf{d}'_{k+1} \mathbf{H}_k \mathbf{v} \right)
\end{aligned} \tag{3.12}$$

Tomando los valores apropiados en la expresión (3.11) se tiene que los EMV de las funciones media, moda y de cuantiles, así como sus versiones condicionadas, pueden calcularse de forma recursiva. Otro tanto ocurre con la función de covarianza a partir de (3.12). Veamos las expresiones recursivas que se obtienen:

- **Expresión recursiva para el EMV de la función media**

$$\begin{aligned}
\hat{m}^{k+1}(t) &= \hat{m}^k(t) \exp \left(\frac{\bar{\mathbf{u}}^{k+1}'(t)}{e_{k+1}} \left[\begin{pmatrix} \mathbf{V}_k \mathbf{d}_{k+1} \mathbf{d}'_{k+1} \mathbf{U}'_k \\ -\mathbf{d}'_{k+1} \mathbf{U}'_k \end{pmatrix} \hat{\mathbf{a}}_k \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \begin{pmatrix} -\mathbf{V}_k \mathbf{d}_{k+1} \\ 1 \end{pmatrix} \mathbf{d}'_{k+1} \mathbf{v} \right] - \frac{t-t_0}{2(n-1)e_{k+1}} \mathbf{v}' \mathbf{H}_k \mathbf{d}_{k+1} \mathbf{d}'_{k+1} \mathbf{H}_k \mathbf{v} \right).
\end{aligned}$$

- **Expresión recursiva para el EMV de la función moda**

$$\begin{aligned}
\hat{M}_o^{k+1}(t) &= \hat{M}_o^k(t) \exp \left(\frac{\bar{\mathbf{u}}^{k+1}'(t)}{e_{k+1}} \left[\begin{pmatrix} \mathbf{V}_k \mathbf{d}_{k+1} \mathbf{d}'_{k+1} \mathbf{U}'_k \\ -\mathbf{d}'_{k+1} \mathbf{U}'_k \end{pmatrix} \hat{\mathbf{a}}_k \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \begin{pmatrix} -\mathbf{V}_k \mathbf{d}_{k+1} \\ 1 \end{pmatrix} \mathbf{d}'_{k+1} \mathbf{v} \right] + \frac{t-t_0}{(n-1)e_{k+1}} \mathbf{v}' \mathbf{H}_k \mathbf{d}_{k+1} \mathbf{d}'_{k+1} \mathbf{H}_k \mathbf{v} \right).
\end{aligned}$$

- **Expresión recursiva para el EMV de la función de cuantiles**

$$\begin{aligned}
\hat{C}_\alpha^{k+1}(t) &= \hat{C}_\alpha^k(t) \exp \left(\frac{\bar{\mathbf{u}}^{k+1}'(t)}{e_{k+1}} \left[\begin{pmatrix} \mathbf{V}_k \mathbf{d}_{k+1} \mathbf{d}'_{k+1} \mathbf{U}'_k \\ -\mathbf{d}'_{k+1} \mathbf{U}'_k \end{pmatrix} \hat{\mathbf{a}}_k + \begin{pmatrix} -\mathbf{V}_k \mathbf{d}_{k+1} \\ 1 \end{pmatrix} \mathbf{d}'_{k+1} \mathbf{v} \right] \right. \\
&\quad \left. + z_\alpha \sqrt{t-t_0} \left[\left[\hat{\sigma}_k^2 - \frac{\mathbf{v}' \mathbf{H}_k \mathbf{d}_{k+1} \mathbf{d}'_{k+1} \mathbf{H}_k \mathbf{v}}{(n-1)e_{k+1}} \right]^{\frac{1}{2}} - \hat{\sigma}_k \right] \right).
\end{aligned}$$

- **Expresión recursiva para el EMV de la función media condicionada**

$$\begin{aligned} \hat{m}^{k+1}(t|s) = \hat{m}^k(t|s) \exp & \left(\frac{\bar{\mathbf{u}}^{k+1}'(t, s)}{e_{k+1}} \left[\begin{pmatrix} \mathbf{V}_k \mathbf{d}_{k+1} \mathbf{d}'_{k+1} \mathbf{U}'_k \\ -\mathbf{d}'_{k+1} \mathbf{U}'_k \end{pmatrix} \hat{\mathbf{a}}_k \right. \right. \\ & \left. \left. + \begin{pmatrix} -\mathbf{V}_k \mathbf{d}_{k+1} \\ 1 \end{pmatrix} \mathbf{d}'_{k+1} \mathbf{v} \right] - \frac{t-s}{2(n-1)e_{k+1}} \mathbf{v}' \mathbf{H}_k \mathbf{d}_{k+1} \mathbf{d}'_{k+1} \mathbf{H}_k \mathbf{v} \right). \end{aligned}$$

- **Expresión recursiva para el EMV de la función moda condicionada**

$$\begin{aligned} \hat{M}_o^{k+1}(t|s) = \hat{M}_o^k(t|s) \exp & \left(\frac{\bar{\mathbf{u}}^{k+1}'(t, s)}{e_{k+1}} \left[\begin{pmatrix} \mathbf{V}_k \mathbf{d}_{k+1} \mathbf{d}'_{k+1} \mathbf{U}'_k \\ -\mathbf{d}'_{k+1} \mathbf{U}'_k \end{pmatrix} \hat{\mathbf{a}}_k \right. \right. \\ & \left. \left. + \begin{pmatrix} -\mathbf{V}_k \mathbf{d}_{k+1} \\ 1 \end{pmatrix} \mathbf{d}'_{k+1} \mathbf{v} \right] + \frac{t-s}{(n-1)e_{k+1}} \mathbf{v}' \mathbf{H}_k \mathbf{d}_{k+1} \mathbf{d}'_{k+1} \mathbf{H}_k \mathbf{v} \right). \end{aligned}$$

- **Expresión recursiva para el EMV de la función de cuantiles condicionada**

$$\begin{aligned} \hat{C}_\alpha^{k+1}(t|s) = \hat{C}_\alpha^k(t|s) \exp & \left(\frac{\bar{\mathbf{u}}^{k+1}'(t, s)}{e_{k+1}} \left[\begin{pmatrix} \mathbf{V}_k \mathbf{d}_{k+1} \mathbf{d}'_{k+1} \mathbf{U}'_k \\ -\mathbf{d}'_{k+1} \mathbf{U}'_k \end{pmatrix} \hat{\mathbf{a}}_k + \begin{pmatrix} -\mathbf{V}_k \mathbf{d}_{k+1} \\ 1 \end{pmatrix} \mathbf{d}'_{k+1} \mathbf{v} \right] \right. \\ & \left. + z_\alpha \sqrt{t-s} \left[\left[\hat{\sigma}_k^2 - \frac{\mathbf{v}' \mathbf{H}_k \mathbf{d}_{k+1} \mathbf{d}'_{k+1} \mathbf{H}_k \mathbf{v}}{(n-1)e_{k+1}} \right]^{\frac{1}{2}} - \hat{\sigma}_k \right] \right). \end{aligned}$$

- **Expresión recursiva para el EMV de la función covarianza $s < t$**

Operando, a partir de (3.12) y para $s < t$ (el caso $s > t$ es análogo), se tiene

$$\begin{aligned} \hat{R}^{k+1}(t, s) = \frac{\hat{R}^k(t, s)}{\exp((s-t_0)\hat{\sigma}_k^2) - 1} \exp & \left(\frac{(\bar{\mathbf{u}}^{k+1}(t) - \bar{\mathbf{u}}^{k+1}(s))'}{e_{k+1}} \left[\begin{pmatrix} \mathbf{V}_k \mathbf{d}_{k+1} \mathbf{d}'_{k+1} \mathbf{U}'_k \\ -\mathbf{d}'_{k+1} \mathbf{U}'_k \end{pmatrix} \hat{\mathbf{a}}_k \right. \right. \\ & \left. \left. + \begin{pmatrix} -\mathbf{V}_k \mathbf{d}_{k+1} \\ 1 \end{pmatrix} \mathbf{d}'_{k+1} \mathbf{v} \right] - \frac{\frac{t+s}{2} - t_0}{(n-1)e_{k+1}} \mathbf{v}' \mathbf{H}_k \mathbf{d}_{k+1} \mathbf{d}'_{k+1} \mathbf{H}_k \mathbf{v} \right) \\ & \times \left(\exp \left((s-t_0) \left[\hat{\sigma}_k^2 - \frac{\mathbf{v}' \mathbf{H}_k \mathbf{d}_{k+1} \mathbf{d}'_{k+1} \mathbf{H}_k \mathbf{v}}{(n-1)e_{k+1}} \right] \right) - 1 \right). \end{aligned}$$

Sin embargo, este tipo de expresiones recursivas no pueden ser obtenidas para los UM-VUE en los casos particulares aquí considerados ($l = 1$ y $l = 2$), puesto que tanto la función hipergeométrica generalizada como los polinomios de Hermite que aparecen en sus

expresiones no permiten hacer recursivo su cálculo. Sin embargo existen expresiones que son utilizadas en el cálculo del UMVUE de las funciones paramétricas θ_k y que sí pueden expresarse de forma recursiva. En concreto nos referimos a los argumentos $\mathbf{A}_{t,s}^{(k)'} \hat{\mathbf{a}}_k$ y $A_{t,s}^{U_k}$. Considerando ya el caso concreto que estamos tratando, $\mathbf{A}_{t,s}^{(k)} = \bar{\mathbf{u}}^{(k)}(t, s)$, se tiene

$$\begin{aligned} & \bar{\mathbf{u}}^{(k+1)'}(t, s) \hat{\mathbf{a}}_{k+1} \\ &= \bar{\mathbf{u}}^{(k)'}(t, s) \hat{\mathbf{a}}_k + \frac{1}{e_{k+1}} \left[\left(\bar{\mathbf{u}}^{(k)'}(t, s) \mathbf{V}_k \mathbf{d}_{k+1} - \int_s^t P_{k+1}^{(k+1)}(\tau) d\tau \right) \mathbf{d}'_{k+1} (\mathbf{U}'_k \hat{\mathbf{a}}_k - \mathbf{v}) \right] \end{aligned} \quad (3.13)$$

y

$$A_{t,s}^{U_{k+1}} = A_{t,s}^{U_k} + \frac{1}{e_{k+1}} \left[\bar{\mathbf{u}}^{(k)'}(t, s) \mathbf{V}_k \mathbf{d}_{k+1} - \int_s^t P_{k+1}^{(k+1)}(\tau) d\tau \right]^2. \quad (3.14)$$

3.4. Bandas de confianza

Dado que la obtención de bandas de confianza involucra en el caso de las exactas el cálculo de cuantiles a través de la resolución numérica de integrales y, tanto en éstas como en las aproximadas, las distribuciones asociadas dependen del número de factores exógenos considerados, en este caso número de polinomios incluidos, no es posible proporcionar expresiones recursivas para su cálculo.

Sin embargo sí es posible dar fórmulas recursivas para ciertas expresiones involucradas en su desarrollo. En concreto,

$$\begin{aligned} B(t, s) &= \ln(x_s) + \bar{\mathbf{u}}'(t, s) \hat{\mathbf{a}} \\ S^2(t, s) &= \frac{(n-1)\hat{\sigma}^2}{n-q-2}(t-s) \\ C(t, s) &= \frac{\bar{\mathbf{u}}'(t, s)(\mathbf{U}\mathbf{U}')^{-1}\bar{\mathbf{u}}(t, s)}{t-s}, \end{aligned}$$

que en el modelo considerado en este capítulo dan origen a

$$\begin{aligned} B^k(t, s) &= \ln(x_s) + \bar{\mathbf{u}}^{(k)'}(t, s) \hat{\mathbf{a}}_k \\ S_k^2(t, s) &= \frac{(n-1)\hat{\sigma}_k^2}{n-k-2}(t-s) \\ C^k(t, s) &= \frac{A_{t,s}^{U_k}}{t-s}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

- **Expresiones recursivas para el cálculo de bandas de confianza exactas, aproximadas y generalizada**

$$B^{k+1}(t, s) = B^k(t, s) + \frac{1}{e_{k+1}} \left[\bar{\mathbf{u}}^{(k)'}(t, s) \mathbf{V}_k \mathbf{d}_{k+1} - \int_s^t P_{k+1}^{k+1}(\tau) d\tau \right] \mathbf{d}'_{k+1} (\mathbf{U}'_k \hat{\mathbf{a}}_k - \mathbf{v})$$

$$S_{k+1}^2(t, s) = \frac{n-k-2}{n-k-3} S_k^2(t, s) - \frac{(t-s)}{n-k-3} \frac{\mathbf{v}' \mathbf{H}_k \mathbf{d}_{k+1} \mathbf{d}'_{k+1} \mathbf{H}_k \mathbf{v}}{e_{k+1}}$$

$$C^{k+1}(t, s) = C^k(t, s) + \frac{1}{e_{k+1}(t-s)} \left[\bar{\mathbf{u}}^{(k)'}(t, s) \mathbf{V}_k \mathbf{d}_{k+1} - \int_s^t P_{k+1}^{k+1}(\tau) d\tau \right]^2.$$

3.5. Aplicación: Emisiones de metano

En 1998 Stern y Kaufmann, [55], publicaron un estudio sobre las emisiones globales de metano producidas por el hombre desde 1860 hasta 1994. En este estudio los autores proporcionaron la estimación, en el periodo de tiempo mencionado, de las emisiones totales teniendo en cuenta cada una de las siete componentes que las conforman. La emisión global de metano es la suma de cada componente, donde las emisiones de cada una se estiman a partir de otras variables tales como la población o la producción de carbón. El objeto final del estudio fue obtener una aproximación al valor de las emisiones actuales de metano y otros combustibles fósiles que fueran consistentes con las estimaciones del *Intergovernmental Panel on Climate Change*.

El gráfico 3.1 representa los datos de las emisiones entre 1860 y 1994 (que están disponibles en la página web <http://cdiac.esd.ornl.gov/trends/trends.htm>), mostrando una tendencia exponencial. Por este motivo, a la hora de ajustar estos datos, el proceso de difusión lognormal parece un modelo válido para tal fin.

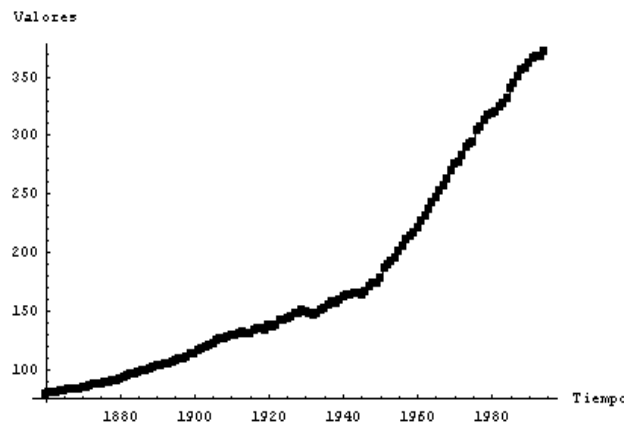


Gráfico 3.1: Emisiones globales de metano en teragramos (1 Tg=10¹² gr.) en el periodo 1860-1994.

Sin embargo, cuando se ajusta un modelo de difusión lognormal homogéneo a estos

datos ($\hat{m} = 0.0115561$ y $\hat{\sigma}^2 = 0.000082932$), se observa que la tendencia estimada muestra desviaciones con respecto a los datos observados. Este hecho se pone de manifiesto en el gráfico 3.2. Es por ello por lo que se puede pensar en la existencia de algunas influencias externas al proceso y que el modelo homogéneo no considera. Estas influencias deben ser variables dependientes del tiempo que afectan a la tendencia y que son, sin embargo, desconocidas.

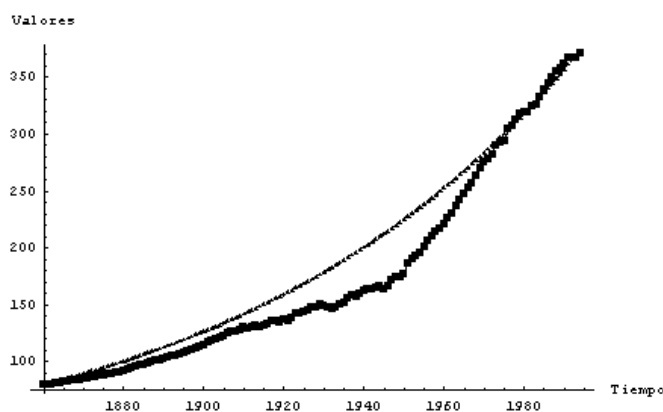


Gráfico 3.2: Emisiones globales de metano y tendencia del proceso de difusión lognormal homogéneo ajustado.

En [32], Gutiérrez, Rico y otros realizan, para estos datos, una estimación recursiva del proceso de difusión lognormal con factores exógenos de tipo polinómico basándose en los resultados expuestos anteriormente. El estudio contiene tanto la estimación recursiva de los modelos resultantes de la introducción sucesiva de los polinomios como la selección del modelo óptimo. El criterio de optimalidad se basó en el poder predictivo del modelo. Esto es debido a que el criterio que se emplee no debe basarse solamente en la bondad del ajuste del modelo a los datos ya que esta propiedad puede desaparecer cuando se emplee el modelo con fines predictivos. Por tanto, necesitamos encontrar una solución que abarque los dos aspectos mencionados: ajuste y predicción.

A continuación presentamos este estudio y lo completamos con otro sobre bandas de confianza aproximadas y generalizada, en la línea que se ha establecido en esta memoria.

Metodología. Consideraciones previas a la estimación del modelo

Partiendo del hecho de que $P[X(t_1) = x_1] = 1$ ($t_1 = 1860$, $x_1 = 79.3$), y puesto que

$$E[X(t)] = x_1 \exp\left(\int_{t_1}^t h(s) ds\right),$$

se tiene

$$\ln\left(\frac{E[X(t)]}{x_1}\right) = \int_{t_1}^t h(s) ds = H(t)$$

por lo que se pueden considerar los valores

$$f_i = \ln \left(\frac{x_i}{x_1} \right), \quad i = 1, 2, \dots, 134$$

como una aproximación de $H(t_i)$. Con estos valores, se ajusta un polinomio de grado $k + 1$, $M_k(t) = \sum_{i=1}^{k+1} \gamma_i Q_i(t)$ (siendo $\{Q_i(t), i = 1, \dots, k + 1\}$ una base del espacio de polinomios de grado $k + 1$) y se aproxima el proceso observado mediante el proceso no homogéneo $\{X^k(t); t_0 \leq t \leq T\}$ con momentos infinitesimales

$$A_1^k(x, t) = x \left(\sum_{j=0}^k \beta_j^k P_j^k(t) \right)$$

$$A_2^k(x, t) = \sigma_k^2 x^2, \quad \sigma_k > 0$$

tomando $P_j^k(t) = \gamma_{j+1} Q'_{j+1}(t)$, $j = 1, 2, \dots, k$ y $P_0^k(t) = 1$. El hecho de no tomar $\sum_{i=1}^k P_i^k(t)$ como un único factor se debe a que es posible que, en un estudio posterior, alguna de las funciones P_i^k no sean relevantes.

Observemos que, como $f_1 = H(t_1) = 0$, hemos tomado $Q_i(t) = (t - 1860)^i$, $i = 1, 2, \dots$ como los generadores de los polinomios que vamos a considerar (evidentemente, el polinomio M_k no tendrá término constante en cada iteración del procedimiento). Por otra parte, para tener una idea a priori del máximo grado del polinomio que se debe tomar en el factor exógeno, se realiza el ajuste de una recta de regresión a los valores f_i y se contabiliza el número de puntos de corte que existen entre esta recta y los datos (ver gráfico 3.3). En nuestro caso se observan 4 ó 5 puntos de corte, lo que indica que el grado máximo de los polinomios que actúan como factores exógenos en el proceso debe ser 3 ó 4 (posteriormente veremos que nuestra intuición está próxima a la solución que se adoptará).

Con esta idea en mente, para cada modelo con k factores exógenos polinómicos, se ajusta, a los datos f_i , un polinomio de la forma $M_k(t) = \sum_{i=1}^{k+1} \gamma_i Q_i(t)$, $k = 1, \dots, 5$. Las derivadas de cada sumando de la expresión de M_k , salvo el del primero, proporcionarán los factores exógenos para los procesos $\{X^k(t); t_0 \leq t \leq T\}$, $k = 1, \dots, 5$. Estos cálculos se resumen en la tabla 3.1.

Estimación de los parámetros. Selección del modelo

Una vez establecidos los modelos que van a ser objeto de estudio, la tabla 3.2 contiene las estimaciones máximo verosímiles de los parámetros, obtenidas haciendo uso de las expresiones recursivas que se han calculado con anterioridad. Hay que tener en cuenta que

Tabla 3.1: Polinomios ajustados y factores exógenos para los modelos $X^k(t)$, $k = 1, \dots, 5$.

Modelo	Polinomio ajustado	Factor exógeno
$X^1(t)$	$M_2(t) = 6.45906 \times 10^{-3}(t - 1860) + 3.99983 \times 10^{-5}(t - 1860)^2$	$P_1^1(t) = 7.99966 \times 10^{-5}(t - 1860)$
$X^2(t)$	$M_3(t) = 9.23765 \times 10^{-3}(t - 1860) - 2.93828 \times 10^{-5}(t - 1860)^2 + 3.89796 \times 10^{-7}(t - 1860)^3$	$P_1^2(t) = -5.87655 \times 10^{-5}(t - 1860)$ $P_2^2(t) = 1.16939 \times 10^{-6}(t - 1860)^2$
$X^3(t)$	$M_4(t) = 1.05839 \times 10^{-2}(t - 1860) - 8.98972 \times 10^{-5}(t - 1860)^2 + 1.18312 \times 10^{-6}(t - 1860)^3 - 3.16954 \times 10^{-9}(t - 1860)^4$	$P_1^3(t) = -1.79794 \times 10^{-4}(t - 1860)$ $P_2^3(t) = 3.54935 \times 10^{-6}(t - 1860)^2$ $P_3^3(t) = -1.26782 \times 10^{-8}(t - 1860)^3$
$X^4(t)$	$M_5(t) = -9.10199 \times 10^{-4}(t - 1860) + 7.13793 \times 10^{-4}(t - 1860)^2 - 1.68795 \times 10^{-5}(t - 1860)^3 + 1.5921 \times 10^{-7}(t - 1860)^4 - 5.0686 \times 10^{-10}(t - 1860)^5$	$P_1^4(t) = 1.42759 \times 10^{-3}(t - 1860)$ $P_2^4(t) = -5.06386 \times 10^{-5}(t - 1860)^2$ $P_3^4(t) = 6.36841 \times 10^{-7}(t - 1860)^3$ $P_4^4(t) = -2.5343 \times 10^{-9}(t - 1860)^4$
$X^5(t)$	$M_6(t) = 2.07132 \times 10^{-3}(t - 1860) + 4.15959 \times 10^{-4}(t - 1860)^2 - 6.83841 \times 10^{-6}(t - 1860)^3 + 8.75547 \times 10^{-9}(t - 1860)^4 + 5.26399 \times 10^{-10}(t - 1860)^5 - 2.64407 \times 10^{-12}(t - 1860)^6$	$P_1^5(t) = 8.31918 \times 10^{-4}(t - 1860)$ $P_2^5(t) = -2.05152 \times 10^{-5}(t - 1860)^2$ $P_3^5(t) = 3.50219 \times 10^{-8}(t - 1860)^3$ $P_4^5(t) = 2.632 \times 10^{-9}(t - 1860)^4$ $P_5^5(t) = -1.59244 \times 10^{-11}(t - 1860)^5$

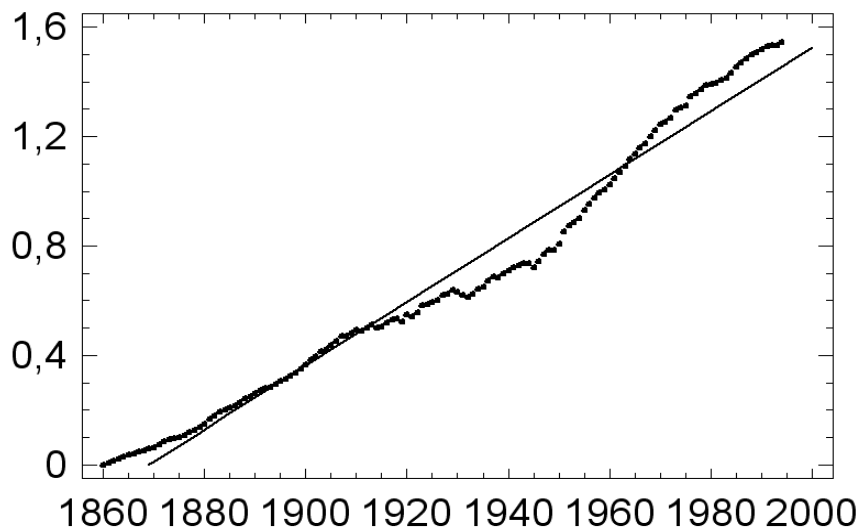


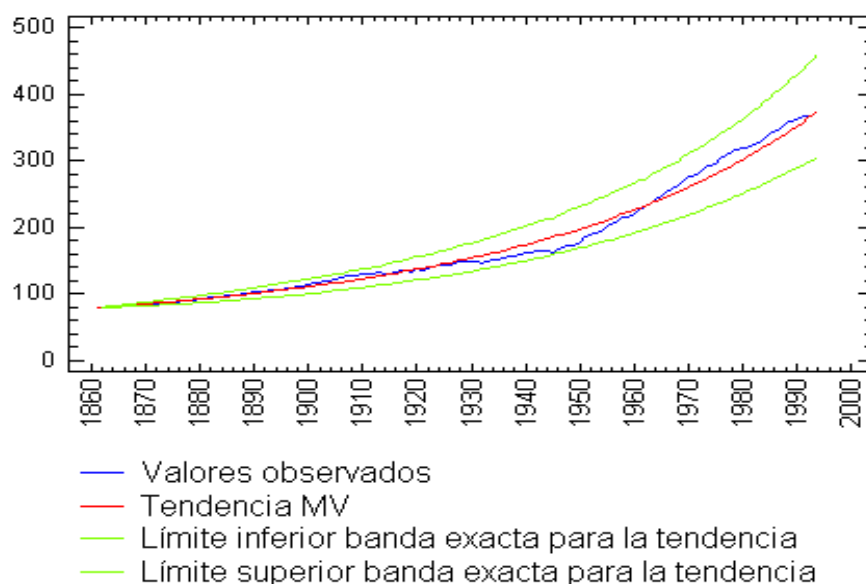
Gráfico 3.3: Recta de regresión calculada sobre los valores f_i .

para la estimación de los parámetros no se ha considerado el año 1994, último año de la serie, con el fin de utilizarlo posteriormente para validar el poder predictivo de los modelos y, con ello, ayudar a resolver el problema de determinar cuál de ellos es el óptimo.

A partir de las estimaciones recogidas en la tabla 3.2 se pueden calcular las estimaciones correspondientes a funciones media, moda y de cuantiles ($\alpha = 0.025$ y $\alpha = 0.975$), tanto máximo verosímiles como insesgadas de mínima varianza, así como para sus versiones condicionadas. De igual manera, y a partir de los resultados del Capítulo 1, se pueden obtener las bandas de confianza exactas (al 95%) para las funciones media y moda y sus versiones condicionadas. A modo de ilustración, los gráficos 3.4 a 3.8 representan las estimaciones para el caso de la estimación máximo verosímil de la función media así como las bandas de confianza exactas para tal función.

Tabla 3.2: Estimación de los parámetros para los modelos $X^k(t)$, $k = 1, \dots, 5$.

Modelo	Estimaciones máximo verosímiles de los parámetros
$X^1(t)$	$\hat{\mathbf{a}}_1 = (0.00714207, 0.82367279)'$ $\hat{\sigma}_1^2 = 7.71453 \times 10^{-5}$
$X^2(t)$	$\hat{\mathbf{a}}_2 = (0.0066739, -1.48065522, -0.13579797)'$ $\hat{\sigma}_2^2 = 7.71015 \times 10^{-5}$
$X^3(t)$	$\hat{\mathbf{a}}_3 = (0.01088491, 1.62914569, 1.9672737, 2.82345218)'$ $\hat{\sigma}_3^2 = 7.45705 \times 10^{-5}$
$X^4(t)$	$\hat{\mathbf{a}}_4 = (0.00209052, 0.72100098, 0.74549215, 0.7653233, 0.77609665)'$ $\hat{\sigma}_4^2 = 6.59965 \times 10^{-5}$
$X^5(t)$	$\hat{\mathbf{a}}_5 = (0.00329596, 0.91058355, 1.14307731, 5.73050219, 0.17406284, 0.45798983)'$ $\hat{\sigma}_5^2 = 6.5865 \times 10^{-5}$

Gráfico 3.4: Valores observados, estimación máximo verosímil y bandas de confianzas exactas de la función media. Modelo X^1 .

En primera instancia, parece lógico que el ajuste mediante las versiones condicionadas debe ser mejor que el que se obtiene con las funciones anteriores sin condicionar ya que la estimación en cada instante recoge la información contenida en el valor observado en el instante anterior (ver, por ejemplo, el gráfico 3.9).

Asimismo, podemos observar cómo, para las funciones no condicionadas, tanto la estimación puntual como por intervalos va mejorando conforme aumenta el grado del polinomio, lo cual es lógico ya que se va *aproximando* más el factor exógeno $h(t)$ desconocido.

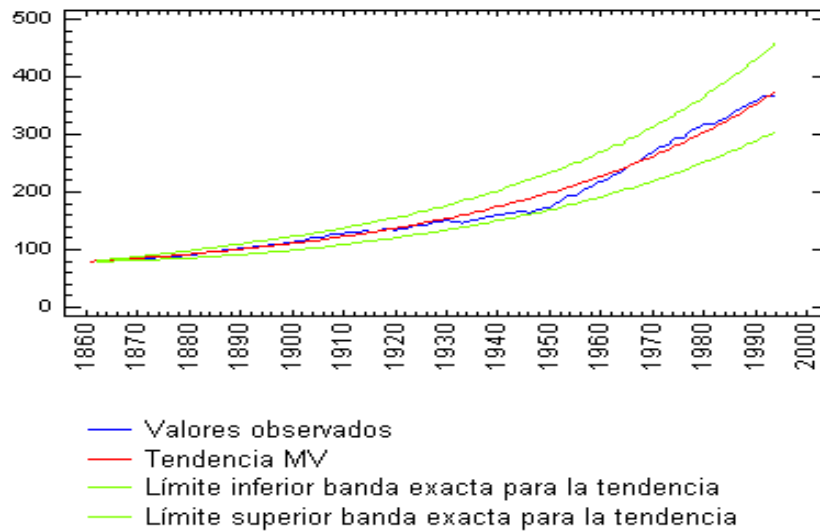


Gráfico 3.5: Valores observados, estimación máximo verosímil y bandas de confianzas exactas de la función media. Modelo X^2).

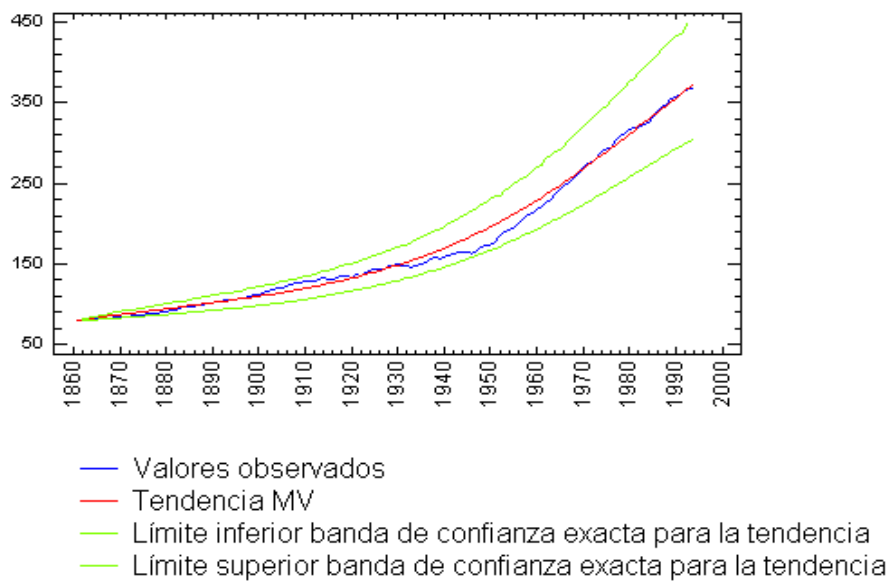


Gráfico 3.6: Valores observados, estimación máximo verosímil y bandas de confianzas exactas de la función media. Modelo X^3).

No obstante, para las versiones condicionadas tal diferencia no es ya tan evidente, aunque la hay.

Según lo dicho, parece que deberíamos considerar como válido el modelo para $k = 5$. Sin

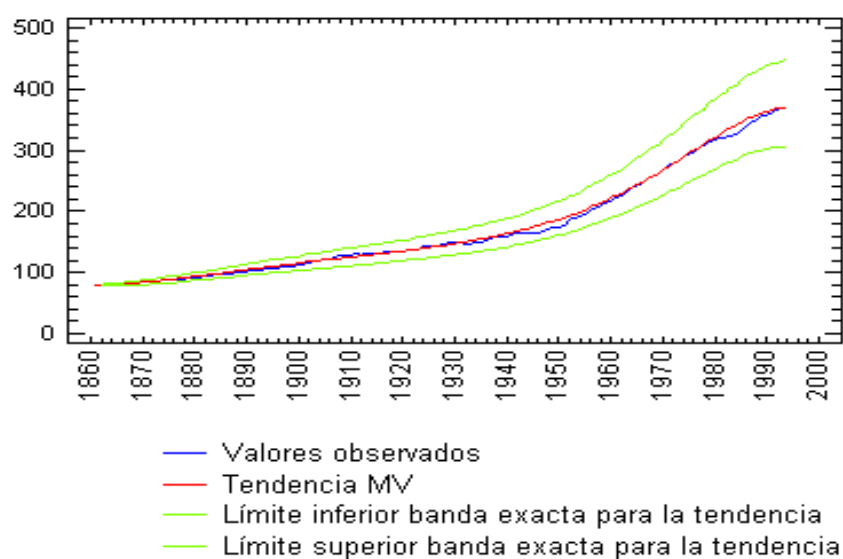


Gráfico 3.7: Valores observados, estimación máximo verosímil y bandas de confianzas exactas de la función media. Modelo X^4 .

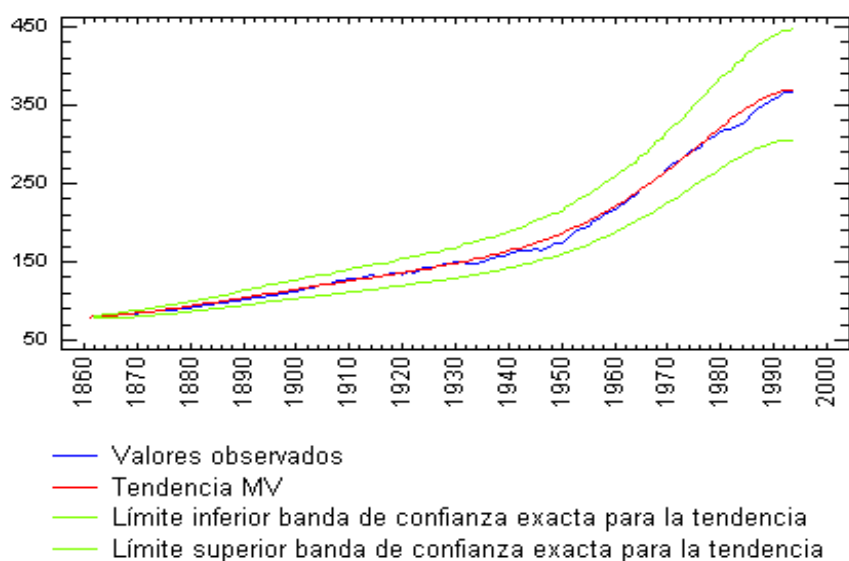


Gráfico 3.8: Valores observados, estimación máximo verosímil y bandas de confianzas exactas de la función media. Modelo X^5 .

embargo, como comentábamos anteriormente, la calidad de ajuste que posee dicho modelo no tiene por qué mantenerse al pasar a la fase de predicción. Por ello, a continuación se calculan las estimaciones puntuales y por bandas de confianza exactas para la predicción

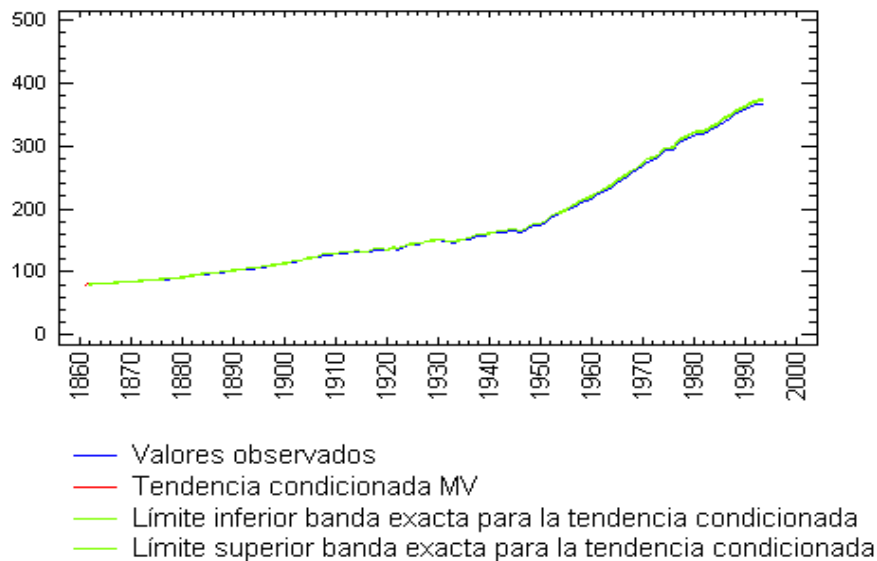


Gráfico 3.9: Valores observados, estimación máximo verosímil y bandas de confianzas exactas de la función media condicionada. Modelo X^1).

en el instante de tiempo $t = 1994$ de las funciones media, moda y versiones condicionadas, así como la estimación de las funciones de cuantiles para $\alpha = 0.025$ y $\alpha = 0.975$. Los resultados obtenidos se resumen en las tablas 3.3 y 3.4.

Tabla 3.3: Predicción de la emisión de metano para $t=1994$ a partir de la estimación máximo verosímil e insesgada de mínima varianza de las funciones media, media condicionada, moda y moda condicionada para los modelos $\{X^k(t)\}$, con $k = 1, \dots, 5$.

	$X^1(t)$	$X^2(t)$	$X^3(t)$	$X^4(t)$	$X^5(t)$
Media MV	375.033	374.852	373.142	369.413	368.912
Media cond. MV	373.114	372.935	371.296	367.795	367.300
Moda MV	369.262	369.088	367.591	364.545	364.061
Moda cond. MV	373.071	372.892	371.255	367.759	367.264
Media UMVU	373.084	372.905	371.266	367.768	367.271
Media cond. UMVU	373.114	372.935	371.295	367.793	367.297
Moda UMVU	367.256	367.039	365.572	362.733	362.214
Moda cond. UMVU	373.070	372.890	371.252	367.755	367.259

Tabla 3.4: Predicción de la emisión de metano para $t=1994$ a partir de la estimación máximo verosímil e insesgada de mínima varianza de las funciones de cuantiles ($\alpha = 0.025$ y $\alpha = 0.975$), y bandas exactas (nivel de confianza del 95 %) para la media, media condicionada, moda y moda condicionada para los modelos $\{X^k(t)\}$, con $k = 1, \dots, 5$.

	$X^1(t)$	$X^2(t)$	$X^3(t)$	$X^4(t)$	$X^5(t)$
Cuantiles MV	305.689	305.560	305.222	305.875	305.520
	455.375	455.131	451.640	442.220	441.544
Cuantiles MV condicionados	366.732	366.558	365.051	361.973	361.492
	379.578	379.394	377.619	373.686	373.177
Cuantiles UMVU	303.474	303.099	302.584	303.243	302.657
	453.803	453.893	450.799	441.882	441.518
Cuantiles UMVU condicionados	366.671	366.472	364.942	361.848	361.342
	379.639	379.481	377.729	373.810	373.323
Banda para la media	306.052	305.683	305.074	305.410	304.811
	459.737	459.887	456.641	446.692	446.772
Banda para la media cond.	371.863	371.037	368.777	364.800	363.625
	374.176	374.429	373.281	370.158	370.204
Banda para la moda	301.140	300.741	300.265	301.112	300.495
	452.368	452.462	449.452	440.788	440.453
Banda para la moda cond.	371.932	371.164	368.962	365.032	363.918
	374.210	374.625	373.558	370.502	370.635

Una vez calculadas las predicciones para $t = 1994$, pasamos a decidir cuál es el modelo que adoptaremos como óptimo. Evidentemente, como se conoce el valor real para ese año, 371 Tg, a partir de las tablas para la predicción, podemos observar que las versiones condicionadas de las funciones consideradas proporcionan una mejor aproximación al valor real, siendo, en general, más evidente tal cuestión para $k = 1, 2, 3$.

Las diferentes estimaciones consideradas hacen posible adoptar varias posibilidades para solventar el problema de selección. Una de ellas se deduce del gráfico 3.10 que representa, para 1994, la predicción de la emisión global de metano en dicho año con los diferentes modelos, usando la estimación máximo verosímil de la función media condicionada junto con la de las funciones de cuantiles condicionados ($\alpha = 0.025$ y $\alpha = 0.975$) y la banda de confianza exacta (al 95 %) para la media condicionada. A la vista de dicho gráfico podemos determinar que el modelo óptimo es el que corresponde a $k = 3$ ya que es el que muestra una mayor coincidencia con las predicciones. De hecho, en el resto de modelos se puede observar, por ejemplo, cómo la banda exacta no contiene al valor observado. Si tomásemos, por ejemplo, la moda condicionada como función mediante la cual predecir, se obtendrían iguales conclusiones (gráfico 3.11).

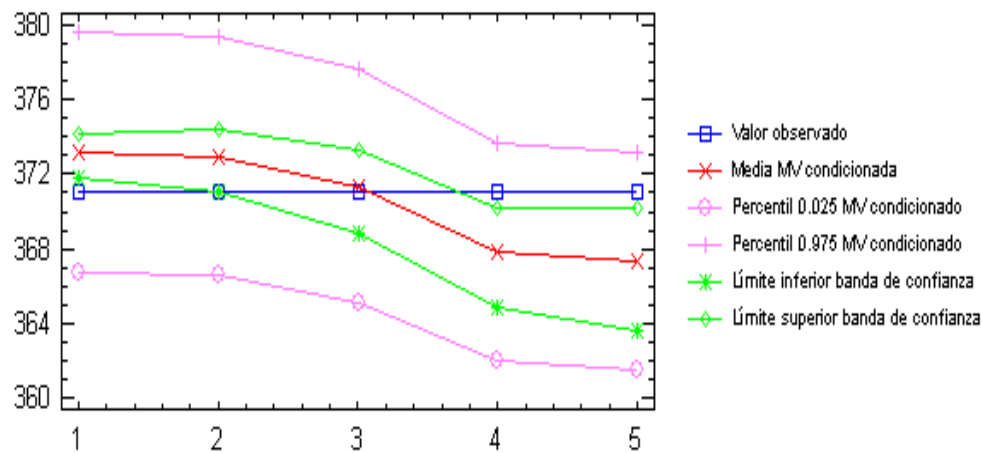


Gráfico 3.10: Predicción en el año 1994 usando la media condicionada en cada modelo

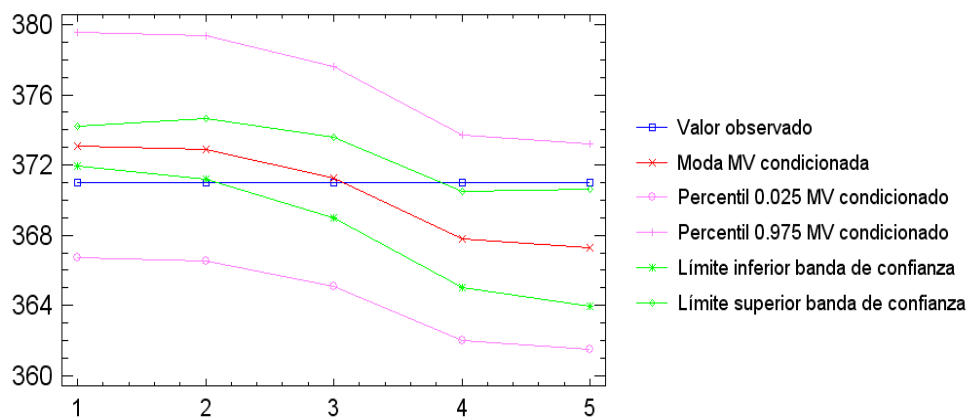


Gráfico 3.11: Predicción en el año 1994 usando la moda condicionada en cada modelo

Así pues, adoptamos como óptimo el modelo $X^3(t)$, el cual viene determinado por los momentos infinitesimales

$$A_1(x, t) = [0,0109222 - 0,000292911t + 6,982539013 \times 10^{-6}t^2 - 3,579618802 \times 10^{-8}t^3] x$$

$$A_2(x, t) = 0,00007457051282638727x^2.$$

Además, se puede confirmar la adecuación del modelo escogido realizando, por una parte simulaciones de trayectorias y por otra parte simulaciones de los valores en 1994 condicionados a la observación en el instante anterior. Por una parte, se han simulado 100 trayectorias de los modelos $X^k(t)$ con $k = 1, \dots, 5$ y se ha observado el valor obtenido en el instante

$t=1994$. Por otra parte, se han simulado 100 valores de $X^{(k)}(1994)|X^{(k)}(1993) = 367.2$, y se han estudiado los valores medio, la media truncada y el error cuadrático medio cometido para todos los modelos. Los resultados obtenidos pueden verse en las tablas 3.5 y 3.6, a partir de las cuales se confirma la conclusión anterior.

Tabla 3.5: Media y media truncada obtenidas para $X^{(k)}(1994)$ a partir de la simulación de las trayectorias.

Modelo	Media	Media truncada
$X^{(1)}(t)$	374.252	373.010
$X^{(2)}(t)$	380.240	379.413
$X^{(3)}(t)$	373.758	372.449
$X^{(4)}(t)$	366.368	365.702
$X^{(5)}(t)$	363.933	362.987

Tabla 3.6: Media, media truncada y error cuadrático medio obtenidos para $X^{(k)}(1994)$ en la simulación de los valores condicionados.

Modelo	Media	Media truncada	ECM
$X^{(1)}(t)$	373.175	373.121	16.780
$X^{(2)}(t)$	372.974	373.002	13.754
$X^{(3)}(t)$	371.221	371.237	9.958
$X^{(4)}(t)$	367.644	367.601	21.138
$X^{(5)}(t)$	367.229	367.255	21.074

Bandas de confianza aproximadas. Estudio de simulación

Una vez seleccionado el modelo, y con el objeto de decidir qué banda de confianza aproximada o generalizada sería la *óptima*, se puede realizar un estudio similar al establecido en el Capítulo 2 para el proceso que modeliza la evolución del P.I.B. en España.

Para ello se han simulado 1000 trayectorias del proceso de difusión $X^{(3)}(t)$, cada una de las cuales consta de 135 valores entre los años 1860 y 1994, partiendo del año $t_1 = 1860$ y valor inicial $x_1 = 79.3$.

A partir de tales trayectorias se han calculado las bandas de confianza aproximadas y generalizada que aparecen en esta memoria (no se incluyen los resultados para la banda obtenida mediante la adaptación de la versión de Zhou y Gao del método de Cox) para un nivel de confianza de 0.9 y en el caso concreto de la función media, así como la media y el rango de variación, a lo largo del tiempo, de sus probabilidades de cobertura, errores

Tabla 3.7: Rango de variación de la probabilidad de cobertura, probabilidad de cobertura media, rango de variación del error de cobertura, error de cobertura medio y rango de variación de las amplitudes medias para las bandas de confianza aproximadas y generalizada, al nivel de confianza 0.9, para la función media del proceso $X^3(t)$.

Métodos	Prob. cob. variación	Prob. cob. media	Error cob. variación	Error cob. media	Amplitud media variación
<i>Naive</i>	0.872-0.906	0.89191791	0-0.028	0.00891791	0.7691-124.0001
Patterson	0.87-0.904	0.891768657	0-0.03	0.008723881	0.7692-124.6266
Cox	0.867-0.901	0.889134328	0-0.033	0.010880597	0.7637-123.7328
Conservativo	0.904-0.938	0.928156716	0.004-0.0379	0.028152985	0.892-148.5159
Bootstrap	0.86-0.897	0.880970149	0.003-0.04	0.019029851	0.7636-124.3261
Propuesto	0.871-0.906	0.893492537	0-0.029	0.008059701	0.7704-125.4415
Generalizado	0.867-0.905	0.88541791	0-0.033	0.015149254	0.7715-124.4133

de cobertura y rango de variación de las amplitudes medias en los instantes de tiempo de observación de las trayectorias.

Los resultados para todos los instantes de tiempo se muestran en la tabla 3.7 y permiten la comparación de los métodos de forma global.

Los errores de cobertura obtenidos son muy parecidos en todas las bandas, siendo los mayores los correspondientes a las bandas conservativa y bootstrap y presentando, además, esta última la mayor amplitud. Por tanto, a excepción de estas dos serían válidas cualesquiera de las otras.

Anexo 1

Estudio de la dependencia de la probabilidad de cobertura en el tiempo para las bandas de confianza en el proceso lognormal no homogéneo. Un caso particular.

Como se comenta en el Capítulo 2, donde se realiza el estudio comparativo de las bandas de confianza aproximadas y generalizada en el proceso lognormal con factores exógenos, existe una dependencia de la probabilidad de cobertura en relación con el tiempo. Dicha dependencia se expresa en términos de la forma que adopten el vector $\bar{\mathbf{u}}(t, s)$ y la forma cuadrática $\bar{\mathbf{u}}'(t, s)(\mathbf{U}\mathbf{U}')^{-1}\bar{\mathbf{u}}(t, s)$ que dependen, a su vez, de los factores exógenos incluidos en el modelo.

A modo ilustrativo, en este apéndice se presenta un estudio particular para el caso del factor exógeno $h(t) = m + bt$ considerando la banda de confianza *naive* para la función media sin condicionar cuya expresión, llamando $a = m - 1/2\sigma^2$, es

$$\begin{aligned} m(t) &= x_0 \exp\left(\int_{t_0}^t h(s)ds\right) = x_0 \exp\left(m(t - t_0) + \frac{t^2 - t_0^2}{2}b\right) \\ &= x_0 \exp\left((t - t_0)\left(a + \frac{t + t_0}{2}b\right)\right) \end{aligned}$$

Recordemos que la expresión de los intervalos, para cada t , que dan origen a la banda *naive* es

$$\left(\exp\left(B(t, t_0) \pm t_{n-q-2; 1-\alpha/2} \sqrt{C(t, t_0)} S(t, t_0)\right)\right)$$

donde

$$B(t, s) = \ln(x_0) + \bar{\mathbf{u}}'(t)\hat{\mathbf{a}}$$

y

$$C(t, s) = \frac{\bar{\mathbf{u}}'(t)(\mathbf{U}\mathbf{U}')^{-1}\bar{\mathbf{u}}(t)}{t - t_0}$$

En nuestro caso particular,

$$\bar{\mathbf{u}}(t) = \left(t - t_0, \int_{t_0}^t h(s) ds \right)' = \left(t - t_0, \frac{t^2 - t_0^2}{2} \right)'$$

con lo cual, se verifica

$$B(t, t_0) = (t - t_0) \left(\hat{a} + \frac{t + t_0}{2} \hat{b} \right),$$

y, por otra parte, suponiendo que la diferencia entre los instantes de tiempo observados es constantemente igual a d , la matriz \mathbf{UU}' se puede escribir como

$$\mathbf{UU}' = \begin{pmatrix} (n-1)d & \frac{(n-1)^2 d^2}{2} \\ \frac{(n-1)^2 d^2}{2} & \frac{d^3}{12} (n-1)(2n-1)(2n-3) \end{pmatrix}$$

cuya inversa tiene la forma

$$(\mathbf{UU}')^{-1} = \frac{12}{d^3 n(n-1)(n-2)} \begin{pmatrix} \frac{d^2}{12} (2n-1)(2n-3) & -\frac{(n-1)^2 d^2}{2} \\ -\frac{(n-1)^2 d^2}{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

Por tanto, la expresión de $\bar{\mathbf{u}}'(t)(\mathbf{UU}')^{-1}\bar{\mathbf{u}}(t)$ es

$$\bar{\mathbf{u}}'(t)(\mathbf{UU}')^{-1}\bar{\mathbf{u}}(t) = \frac{12(t-t_0)^2}{d^3 n(n-1)(n-2)} \left(\frac{d^2}{12} (2n-1)(2n-3) - (n-1)d^2 \frac{t+t_0}{2} + \left(\frac{t+t_0}{2} \right)^2 \right).$$

La condición para que la banda cubra al verdadero valor de la función media sin condicionar en el instante de tiempo t es

$$\begin{aligned} & x_0 \exp \left((t-t_0) \left(\hat{a} + \frac{t+t_0}{2} \hat{b} \right) - t_{n-q-2;1-\alpha/2} S \sqrt{\bar{\mathbf{u}}'(t)(\mathbf{UU}')^{-1}\bar{\mathbf{u}}(t)} \right) \\ & \leq x_0 \exp \left((t-t_0) \left(a + \frac{t+t_0}{2} b + \frac{1}{2} \sigma^2 \right) \right) \\ & \leq x_0 \exp \left((t-t_0) \left(\hat{a} + \frac{t+t_0}{2} \hat{b} \right) + t_{n-q-2;1-\alpha/2} S \sqrt{\bar{\mathbf{u}}'(t)(\mathbf{UU}')^{-1}\bar{\mathbf{u}}(t)} \right) \\ & \quad \Downarrow \\ & (t-t_0) \left(\hat{a} + \frac{t+t_0}{2} \hat{b} \right) - t_{n-q-2;1-\alpha/2} S \sqrt{\bar{\mathbf{u}}'(t)(\mathbf{UU}')^{-1}\bar{\mathbf{u}}(t)} \\ & \leq (t-t_0) \left(a + \frac{t+t_0}{2} b + \frac{1}{2} \sigma^2 \right) \\ & \leq (t-t_0) \left(\hat{a} + \frac{t+t_0}{2} \hat{b} \right) + t_{n-q-2;1-\alpha/2} S \sqrt{\bar{\mathbf{u}}'(t)(\mathbf{UU}')^{-1}\bar{\mathbf{u}}(t)} \end{aligned}$$

y usando las expresiones anteriores, se puede escribir que el límite inferior de la banda *naive* es menor que la función media teórica si se cumple la desigualdad

$$\begin{aligned}
& (t - t_0) \left(\hat{a} - a + \frac{t + t_0}{2} (\hat{b} - b) - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) \\
& \leq t_{n-q-2; 1-\alpha/2} S \sqrt{\frac{12(t - t_0)^2}{d^3 n(n-1)(n-2)} \left(\frac{d^2}{12} (2n-1)(2n-3) - (n-1) d^2 \frac{t + t_0}{2} + \left(\frac{t + t_0}{2} \right)^2 \right)} \\
& \quad \Downarrow \\
& \left(\hat{a} - a \right) - \frac{1}{2} \sigma^2 + \frac{t + t_0}{2} (\hat{b} - b) - t_{n-q-2; 1-\alpha/2} S \sqrt{\frac{12}{d^3 n(n-1)(n-2)}} \\
& \quad \times \sqrt{\frac{d^2}{12} (2n-1)(2n-3) - (n-2) d^2 \frac{t + t_0}{2} + \left(\frac{t + t_0}{2} \right)^2} \leq 0.
\end{aligned}$$

De la misma forma, se obtiene que el valor teórico de la tendencia es menor que el límite superior de la banda aproximada *naive* cuando ocurre

$$\begin{aligned}
& \left(\hat{a} - a \right) - \frac{1}{2} \sigma^2 + \frac{t + t_0}{2} (\hat{b} - b) + t_{n-q-2; 1-\alpha/2} S \sqrt{\frac{12}{d^3 n(n-1)(n-2)}} \\
& \quad \times \sqrt{\frac{d^2}{12} (2n-1)(2n-3) - (n-2) d^2 \frac{t + t_0}{2} + \left(\frac{t + t_0}{2} \right)^2} \geq 0.
\end{aligned}$$

Notando los términos que intervienen en las desigualdades anteriores como

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}(t) &= \left(\hat{a} - a \right) - \frac{1}{2} \sigma^2 + (\hat{b} - b) \frac{t + t_0}{2} \quad \text{y} \\
\mathcal{B}(t) &= t_{n-q-2; 1-\alpha/2} S \sqrt{\frac{12}{d^3 n(n-1)(n-2)}} \sqrt{\frac{1}{12} d^2 (2n-1)(2n-3) - (n-2) d^2 \frac{t + t_0}{2} + \left(\frac{t + t_0}{2} \right)^2}
\end{aligned}$$

se tiene que, para que en un instante de tiempo t la banda cubra el valor de la tendencia, ha de ocurrir

$$-\mathcal{B}(t) \leq \mathcal{A}(t) \leq \mathcal{B}(t)$$

Observemos que $\mathcal{A}(t)$ es una recta en t y que $\mathcal{B}(t)$ es una transformación creciente de una parábola convexa en t , cuyo punto de inflexión se encuentra en $t = d^2(n-1) - t_0$. Esto indica que la cobertura puede variar a lo largo de t de distintas formas, esto es, se pueden plantear los siguientes casos

- **Caso 1.** No hay puntos de corte de $\mathcal{A}(t)$ con $-\mathcal{B}(t)$ ni con $\mathcal{B}(t)$ de forma que la recta siempre se encuentra entre $-\mathcal{B}(t)$ y $\mathcal{B}(t)$ o fuera de estos límites. En esta situación la cobertura no cambia a lo largo de t .
- **Caso 2.** Existe un único punto de corte de $\mathcal{A}(t)$ con $-\mathcal{B}(t)$ o con $\mathcal{B}(t)$. En este caso la cobertura cambia a partir del punto de corte, bien porque la banda no cubre al valor de la tendencia hasta este punto y a partir de él sí cubre al valor de la tendencia o bien porque la banda cubre al valor de la tendencia hasta el punto de corte y a partir de éste no.
- **Caso 3.** Existen dos puntos de corte de $\mathcal{A}(t)$ con $-\mathcal{B}(t)$ y $\mathcal{B}(t)$ (ambos puntos de corte con la misma función o uno con cada una de las funciones). En esta situación la cobertura cambia dos veces; puede ser que la banda cubra al verdadero valor hasta el primer punto de corte y no lo cubra a partir del segundo punto de corte o podría ocurrir que la banda no cubra al verdadero valor de la tendencia hasta el primer punto de corte, a partir del cual sí lo cubre hasta el segundo punto de corte y a partir de éste no cubre al verdadero valor de la tendencia.

Este desarrollo, para la función concreta $h(t) = m + bt$ y para la banda aproximada *naive*, pone de manifiesto el hecho de la variabilidad a lo largo de t de la cobertura. Tomando otro método de construcción de la banda aproximada, la conclusión es equivalente, dado que la forma de la función $\bar{\mathbf{u}}'(t)(\mathbf{U}\mathbf{U}')^{-1}\bar{\mathbf{u}}(t)$ es la misma. La discusión final varía cuando la forma de $h(t)$ es diferente.

Bibliografía

- [1] Aitchison, J. y Brown, J. A. C. (1957). The lognormal Distribution. Cambridge University Press.
- [2] Angus, J. E. (1988). Inferences on the lognormal mean for complete samples. *Communications in Statistics: Simulation and Computation*, 17:1307-1331.
- [3] Angus, J. E. (1994). Bootstrap one-sided intervals for the log-normal mean. *The Statistician*, 43(3):395-401.
- [4] Arnold, L. (1973). Stochastic differential equations. John Wiley & Sons, Inc.
- [5] Basawa, I. V. y P. Rao, B. L. S. (1980). Statistical Inference for Stochastics Processes. Academic Press.
- [6] Basel, M. A-E., Ahmad, S. A. A-R. y Wafaa, M. S. (2004). Modelling the CPI using a lognormal diffusion process and implications on forecasting inflation. *IMA Journal of Management Mathematics*, 15:39-51.
- [7] Bhattacharya, R. N. y Waymire, E. C. (1990). Stochastic Processes with Applications. John Wiley & Sons, Inc.
- [8] Black, F. y Scholes, M. (1973). The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of Political Economy*, 81:637-654.
- [9] Capocelli, R. M. y Ricciardi, L. M. (1974). A diffusion model for population growth in random environment. *Theoretical Population Biology*, 5:28-41.
- [10] Capocelli, R. M. y Ricciardi, L. M. (1974). Growth with regulation in random environment. *Kybernetik*, 15:147-157.
- [11] Cox, D. R. y Miller, H. D. (1965). The theory of stochastic processes. Wiley.
- [12] Cox, J. C. y Ross, S. A. (1976). The evaluation of options for alternative stochastic processes. *Journal of Financial Economy*, 3:145-166.

-
- [13] Crow, E. L. y Shimizu, K. (1988). Lognormal distributions: Theory and Applications. Marcel Dekker.
- [14] Gibrat, R. (1930). Une loi des répartitions économiques: l'effet proportionnel. *Bulletin Statistique Générale de la France*, 19:469.
- [15] Gikhman, I. I. y Skorokhod, A. V. (1969). Introduction to the theory of random processes. W.B. Saunders Company.
- [16] Gutiérrez J., R., Hermoso C., A. y Molina, M. (1986). On the estimation of the drift coefficient in randomly stopped diffusion processes. *Trabajos de Estadística*, 1(2), 57-66.
- [17] Gutiérrez J., R., Angulo I., J. M., González C., A. y Pérez O., R. (1991). Inference in lognormal multidimensional diffusion process with exogenous factors: application to modelling in economics. *Applied Stochastic Models and Data Analysis*, 7:295-316.
- [18] Gutiérrez J., R., Román R., P. y Torres R., F. (1993). Inference on univariate lognormal diffusion processes via first-passage-time. VI International Symposium on Applied Stochastic Models and Data Analysis. (Chania) *Proceedings*, 330-339. Jansen, J. y Skiadas, Ch. (Eds.).
- [19] Gutiérrez J., R. Román R., P. y Torres R., F. (1995). A note on the Volterra integral equation for the first-passage-times density. *Journal of Applied Probability*, 32:635-648.
- [20] Gutiérrez J., R., González C., A., y Torres R., F. (1997). Estimation in multivariate lognormal diffusion process with exogenous factors. *Applied Statistics*, 46(1):140-146.
- [21] Gutiérrez J., R., Román R., P. y Torres R., F. (1997). Inference and first-passage-times for the lognormal diffusion process with exogenous factors: application to modelling in economics. VIII International Symposium on Applied Stochastic Models and Data Analysis. (Anacapri), *Proceedings*, 211-216.
- [22] Gutiérrez J., R., Román R., P. y Torres R., F. (1998). Unbiased estimation of the trend for the univariate lognormal diffusion process with exogenous factors. NNTS '98 International Seminar on New Techniques & Technologies for Statistics. (Sorrento), *Actas*, 223-224.
- [23] Gutiérrez J., R., Román R., P. y Torres R., F. (1999). Inference and first-passage-times for the lognormal diffusion process with exogenous factors: application to modelling in economics. *Applied Stochastic Models in Business and Industry*, 15:325-332.
- [24] Gutiérrez J., R., Román R., P. y Torres R., F. (2000). Banda de confianza para la tendencia del proceso lognormal con factores exógenos. XXV Congreso Nacional de Estadística e Investigación Operativa. (Vigo), *Proceedings*, 367-368.

-
- [25] Gutiérrez J., R., Román R., P., Romero M., D. y Torres R., F. (2001). Inference on some parametric functions in the univariate lognormal diffusion process with exogenous factors. *Test*, 10(2):357-373.
- [26] Gutiérrez J., R., Román R., P., Romero M., D. y Torres R., F. (2001). UMVU estimation of the trend and covariance function for the univariate lognormal diffusion process with exogenous factors. 10th International Symposium on Applied Stochastic Models and Data Analysis. (Compiègne), *Proceedings*, 1:516-521.
- [27] Gutiérrez J., R., Román R., P., Romero M., D. y Torres R., F. (2001). Predicción en el proceso de difusión lognormal con factores exógenos. XXVI Congreso Nacional de Estadística e Investigación Operativa. (Úbeda), *Proceedings*, 1:179.
- [28] Gutiérrez J., R., Rico C., N., Román R., P., Romero M., D. y Torres R., F. (2003). Obtención de procesos de difusión no homogéneos a partir de esquemas discretos. XXVII Congreso Nacional de Estadística e Investigación Operativa. (Lleida), *Proceedings*, 4274-4279.
- [29] Gutiérrez J., R., Rico C., N., Román R., P., Romero M., D. y Torres R., F. (2003). Obtención de un proceso de difusión no homogéneo a partir de modelos de crecimiento. XXVII Congreso Nacional de Estadística e Investigación Operativa. (Lleida), *Proceedings*, 4280-4287.
- [30] Gutiérrez J., R., Rico C., N., Román R., P., Romero M., D. y Torres R., F. (2003). Lognormal diffusion process with polynomial exogenous factors. 54th Session of the International Statistical Institute. (Berlín), *Contributed papers*, 60(2):324-325.
- [31] Gutiérrez J., R., Román R., P., Romero M., D. y Torres R., F. (2003). Forecasting for the univariate lognormal diffusion process with exogenous factors. *Cybernetics and Systems: An International Journal*, 34:709-724.
- [32] Gutiérrez J., R., Rico C., N., Román R., P. y Torres R., F. (2004). Use of lognormal diffusion process with exogenous factors without external information. 17th European Meeting on Cybernetics and Systems Research. (Viena), *Proceedings*, 1:163-168. Robert Trapp (Ed.).
- [33] Gutiérrez J., R., Rico C., N., Román R., P. y Torres R., F. (2004). Bandas de confianza aproximadas para la función media del proceso de difusión lognormal homogéneo. XXVIII Congreso Nacional de Estadística e Investigación Operativa. (Cádiz), *Proceedings*, 1:181-182.
- [34] Hall, P. (1992). The bootstrap and edgeworth expansion. Nueva York: Springer.
- [35] Johnson, N. L. y Kotz, S. (1970). Distributions in Statistics: Continuous Univariate Distributions 1. Houghton Mifflin Company.

-
- [36] Kolmogorov, A. N. (1941). Über das logarithmisch Normale Verteilungsgesetz der Dimensionen der Teilchen bei Zerstückelung. *C. R. Acad. Sci. (Doklady)*, XXXI:99-101.
- [37] Krishnamoorthy, K. y Mathew, T. (2003). Inferences on the means of lognormal distributions using generalized p-values and generalized confidence intervals. *Journal of Statistical Planning and Inference*, 115(2003): 103-121.
- [38] Land, C. E. (1971). Confidence intervals for lineal functions of the normal mean and variance. *Annals of Mathematics Statistics*, 42(4):1187-1205.
- [39] Land, C. E. (1972). An evaluation of approximate confidence interval estimation methods for lognormal means. *Technometrics*, 14(1):145-158.
- [40] Land, C. E. (1975). Tables of confidence limits for linear functions of the normal mean and variance. Standard confidence limits for linear functions of the normal mean and variance. *Selected Tables in Mathematical Statistics*, 3:358-419. H. L. Harter y D. B. Owen, (Eds.) Washington D.C.: American Mathematical Society.
- [41] Land, C. E. (1988). Hypothesis tests and interval estimates. En *Lognormal distributions, theory and applications*, 87-112, E. L. Crow y K. Shimizu, (Eds.) New York: Marcel Dekker.
- [42] Lefante, J. J. Jr. y Shah, A. K. (2002). Robustness properties of lognormal confidence intervals for lognormal and gamma distributed data. *Communications in Statistics, Theory and Methods*, 31(11):1939-1957.
- [43] Lyon, B. F. y Land, C. E. (1999). Computation of confidence limits for linear functions of the normal mean and variance. *Oak Ridge National Laboratory Technical Report ORNL/TM-1999/245*.
- [44] Malliaris, A. G. y Brock, W. A. (1982). Stochastics Methods in Economics and Finance. *Advanced Textbooks in Economics*, 17.
- [45] Malthus, T. R. (1926). First easy population, 1798. Macmillan, London.
- [46] Marcus, A. y Shaked, I. (1984). The relationship between accounting measures and prospective probabilities of insolvency: an application to the banking industry. *Financial Review*, 19:67-83.
- [47] Merton, R. C. (1976). Option pricing when underlying stock returns are discontinuous. *Journal of Financial Economy*, 3:125-144.
- [48] Patterson, R. L. (1969). Difficulties involved in the estimation of a population mean using transformed sample data. *Technometrics*, 8:535-537.

-
- [49] Ricciardi, L. M. (1976). On the transformation of diffusion processes into the Wiener Process. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 54:185-199.
- [50] Ricciardi, L. M. (1977). Diffusion processes and related topics in Biology. Springer-Verlag.
- [51] Rico C., N. (2002). Estudio del proceso de difusión lognormal con factores exógenos. Trabajo de Investigación. Universidad de Granada.
- [52] Romero M., D. (2002). Modelos estocásticos asociados a curvas de crecimiento acotadas. Trabajo de investigación. Universidad de Granada.
- [53] Shimizu, K. and Iwase, K. (1981). Uniformly minimum variance unbiased estimation in lognormal and related distributions. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 10:1127-1147.
- [54] Singh, A. K., Singh, A. y Engelhardt, M. (1997). The lognormal distribution in environmental applications. *EPA/600/R-97/006*.
- [55] Stern D. I. y Kaufmann, R. K. (1998). Annual estimates of global anthropogenic methane emissions: 1860-1994. *Trends Online: a Compendium of Data on Global Change*. Carbon Dioxide Information Analysis Center, Oak Ridge National Laboratory, U. S. Department of Energy, Oak Ridge, Tenn., U.S.A.
- [56] Tintner, G. y Gómez, G. L. (1979). The application of the diffusion processes in problems of developmental economic planning. *Trabajos de Estadística*, 30(2):33-55.
- [57] Tintner, G. y Sengupta J. K. (1972). *Stochastic Economics*. Academic Press.
- [58] Torres R., F. (1993). Aportaciones al estudio de difusiones estocásticas no homogéneas. Tesis Doctoral, Universidad de Granada.
- [59] Tsui, K. y Weerahandi, S. (1989). Generalized p-values in significance testing of hypothesis in the presence of nuisance parameters. *Journal of the American Statistical Association (Theory and Methods)*, 84:602-607.
- [60] Weerahandi, S. (1993). Generalized confidence intervals. *Journal of the American Statistical Association (Theory and Methods)*, 88:899-905.
- [61] Zhou, X. H. y Gao, S. (1997). Confidence intervals for the lognormal mean. *Statistics in Medicine*, 16:783-790.