TEMA 8. TESTS DE HIPOTESIS

❖ 8.1. Introducción

◈ 8.1.1. Definiciones

1. Test de Hipótesis: Procedimiento estadístico mediante el cual se investiga la verdad o falsedad de una hipótesis acerca de una característica de una población o un conjunto de poblaciones

1.1. Tests paramétricos: Conocida una v.a. con una determinada distribución, se establecen afirmaciones sobre los parámetros de dicha distribución

1.2. Tests no paramétricos: Las afirmaciones establecidas no se hacen en base a la distribución de las observaciones, que a priori es desconocida.

Ejemplos:

Tests paramétricos:

Sea X_1, X_2,..., X_n una m.a.s. de una v.a. X con distribución Normal, $N(\mu; \sigma)$.

Establecemos la afirmación: $\mu \leq 10$

Tests no paramétricos:

- Análisis de la aleatoriedad de la muestra
- Una variable aleatoria X tiene una distribución Normal
- Dos variables aleatorias X e Y son independientes
- Dos muestras independientes proceden de la misma población

2. Hipótesis del test:

❖ **Hipótesis nula** (H_0) : Hipótesis que se plantea en un problema de contraste

❖ **Hipótesis alternativa** (H_1) : Hipótesis contraria a la hipótesis nula

Ejemplos:

Test paramétricos:

$$H_0: \mu \leq 10$$
$$H_1: \mu > 10$$

Test no paramétricos:

H_0: La muestra se ha seleccionado aleatoriamente

H_1: La muestra no se ha seleccionado aleatoriamente

3. Estadístico del test

❖ Llamamos *Estadístico del Test o Estadístico de Contraste* a una variable aleatoria con distribución de probabilidad conocida cuyos valores nos permiten tomar la decisión de aceptar o rechazar la hipótesis nula.

$$\left.\begin{array}{l} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu \neq \mu_0 \end{array}\right\} \qquad \overline{X} \to N\left(\mu \,;\, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

❖ Al valor concreto que toma el estadístico del test para la muestra escogida se llama *Valor Experimental del Estadístico de Contraste*

$$x_1, x_2, \ldots, x_n \qquad \bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

❑ Ejemplo Contrate de Hipótesis

Contrastar si la media de una población $N(\mu;\sigma)$ **con σ conocida, toma un valor** $\mu = \mu_0$

1. Planteamiento del test:

$$\left.\begin{aligned} H_0 &: \mu = \mu_0 \\ H_1 &: \mu \neq \mu_0 \end{aligned}\right\}$$

2. Estadístico del test:

$$\overline{X} \to N\left(\mu\,;\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

Bajo la hipótesis nula:

$$\overline{X} \to N\left(\mu_0\,;\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

Se toma una m.a.s. concreta: $x_1, x_2, \ldots, x_n$

cuya media valdrá:

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

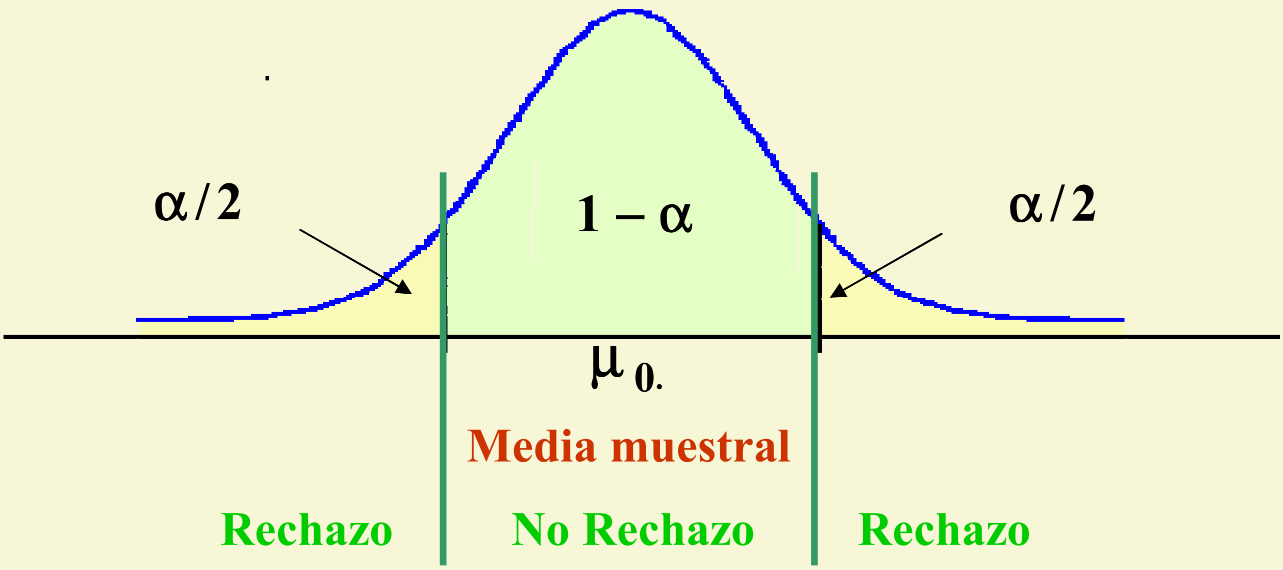
Si H_0 es cierta, la mayoría de los valores de la media muestral deben estar próximos al valor μ_0.

4. Criterio de decisión: Comprobar si el valor concreto de la media muestral calculada, está o no muy alejado de μ_0

- ❖ **Rechazamos** H_0 si la media muestral **no está "próxima"** a μ_0.
- ❖ **No rechazamos** H_0 si la media muestral **está "próxima"** a μ_0.

5. Determinación de las zonas de rechazo y no rechazo:

- ❖**Zona de no rechazo:** $100(1-\alpha)$ % de los valores más cercanos a μ_0.
- ❖ **Zona de rechazo:** 100α % de los valores restantes.



6. Tipos de hipótesis. Región Crítica. Contrastes unilaterales y bilaterales. P-valor

❖ **Hipótesis simples:** La hipótesis asigna un único valor al parámetro desconocido, $H\colon \theta = \theta_0$

❖ **Hipótesis compuestas:** La hipótesis asigna varios valores posibles al parámetro desconocido,

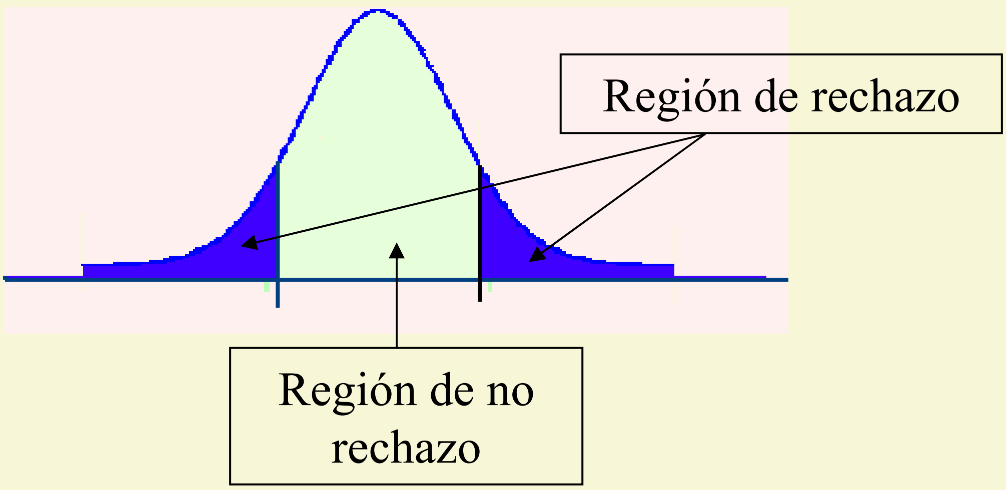
$$H\colon \theta \in (\theta_1, \theta_2)$$

$H_0 : \mu = \mu_0$ $H_1 : \mu \neq \mu_0$	Simple – Compuesta
$H_0 : \mu \leq \mu_0$ $H_1 : \mu > \mu_0$	Compuesta – Compuesta
$H_0 : \mu \geq \mu_0$ $H_1 : \mu < \mu_0$	Compuesta - Compuesta

Al aplicar un contraste de hipótesis, clasificamos los puntos del espacio muestral en dos regiones excluyentes y complementarias:

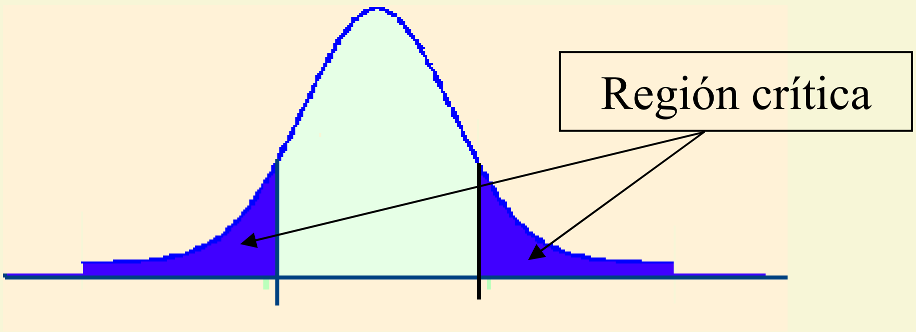
❖ **Región de Rechazo o Región Crítica:** La formada por el conjunto de los valores del estadístico de contraste que nos llevan a rechazar la hipótesis nula H_0, se llama región crítica (los puntos que delimitan la región crítica se llaman *puntos críticos*)

❖ **Región de Aceptación o Región de No Rechazo**: Es la formada por el conjunto de los valores del estadístico de contraste que nos lleva a aceptar la hipótesis nula H_0

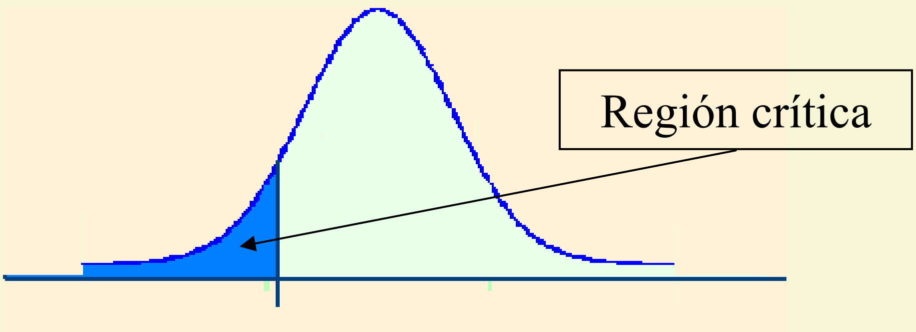


❖ **Contrastes unilaterales y bilaterales:**

➢ Si la hipótesis alternativa da lugar a una región crítica “a ambos lados” del valor del parámetro, diremos que el *test es bilateral o de dos colas*



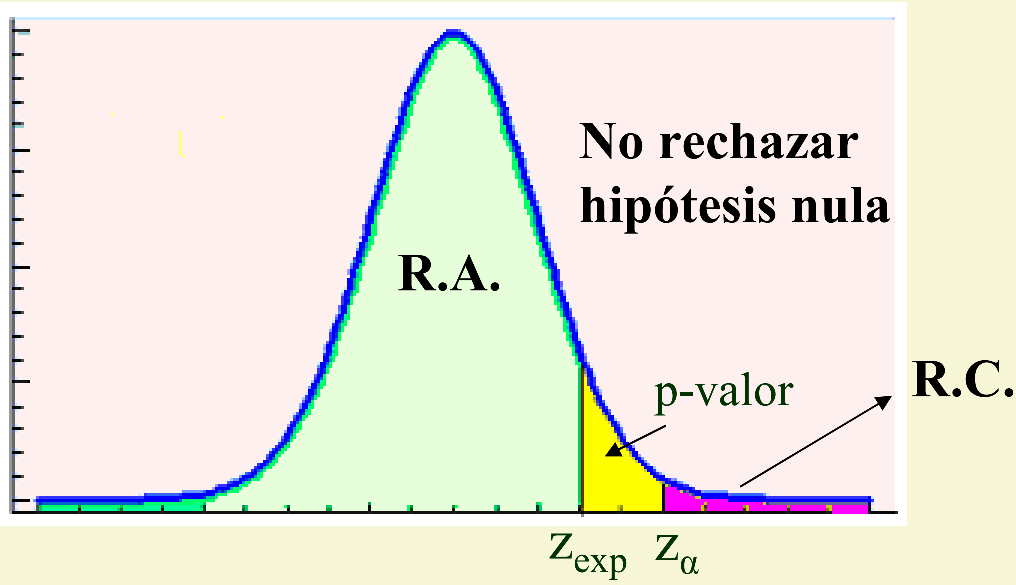
➢ Si la hipótesis alternativa da lugar a una región crítica “a un solo lado del valor del parámetro”, diremos que el *test es unilateral o de una sola cola*



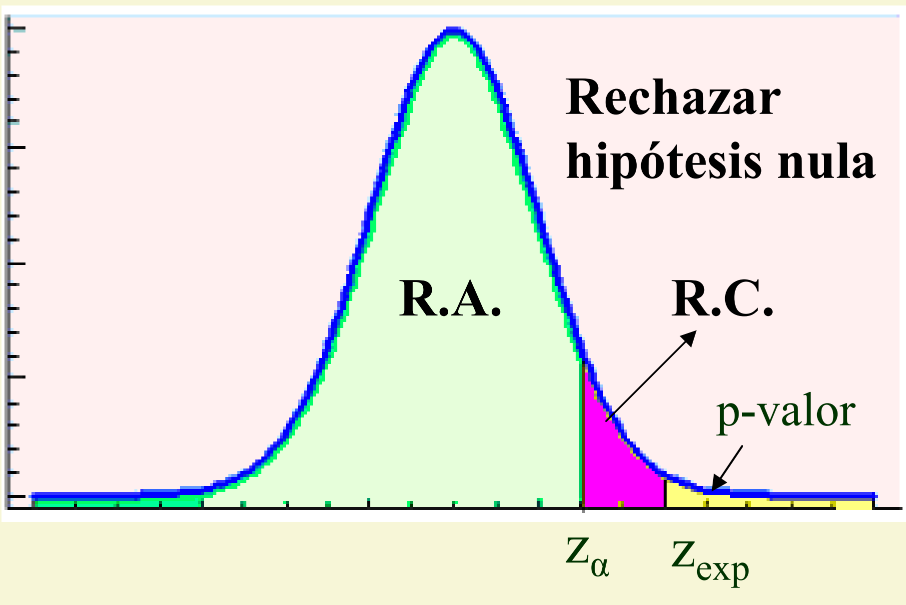
❖ **p-valor o nivel de significación observado**: Es el valor de α más pequeño que hace que la muestra observada nos indique que se debe rechazar H_0.

Elegido un nivel de significación α, se rechazará H_0 si $p \leq \alpha$

$$\text{Si } \alpha < \text{p-valor} \Rightarrow \text{No rechazar } H_0$$



$$\text{Si } \alpha \geq \text{p-valor} \Rightarrow \text{Rechazar } H_0$$



7. Errores asociados al contraste

❖ **Error tipo I**: Error que se comete al rechazar la hipótesis nula, H_0, cuando ésta es cierta.

$$\alpha = P[\text{Error tipo I}] =$$
$$P[\text{Rechazar } H_0 \,/\, H_0 \text{ es verdadera}]$$

❖ **Error tipo II**: Error que se comete al no rechazar la hipótesis nula, H_0, cuando ésta es falsa

$$\beta = P[\text{Error tipo II}] =$$
$$P[\text{No Rechazar } H_0 \,/\, H_0 \text{ es falsa}]$$

H_0	Rechazo	No rechazo
Verdadera	**Error tipo I (α)**	**Correcto**
Falsa	**Correcto**	**Error tipo II (β)**

❖ **Potencia del test:** Probabilidad que se tiene en el contraste de detectar que H_0 es falsa.

$$1-\beta = P[\text{ Rechazar } H_0 \,/\, H_0 \text{ es falsa}]$$

◈ 8.1.2. Pasos para la realización de un test

1. Fijar las hipótesis nula y alternativa

$H_0 : \theta = \theta_0$ $H_1 : \theta \neq \theta_0$	Si el contraste es bilateral
$H_0 : \theta \leq \theta_0$ $H_1 : \theta > \theta_0$	Si el contraste es de una cola (derecha)
$H_0 : \theta \geq \theta_0$ $H_1 : \theta < \theta_0$	Si el contraste es de una cola (izquierda)

2. Buscar el **estadístico del test** que bajo la hipótesis nula tenga un comportamiento conocido

3. Determinar la **región crítica**

4. Seleccionar una **muestra de tamaño n**, para la cual el estadístico del test tome un valor numérico (**valor experimental del estadístico de contraste**)

5. Adoptar la **decisión sobre el rechazo o no** de la hipótesis nula

❖ 8.2. Tests Paramétricos

◈ 8.2.1. Contrastes sobre los parámetros de una distribución normal

$$X_1, X_2, \ldots, X_n \quad \text{m.a.s. de } X \rightarrow N(\mu\,;\sigma)$$

❖ Contrastes sobre la media

Varianza Conocida		
Hipótesis del test	**Estadístico de contraste**	**Criterio de rechazo**
$H_0: \mu = \mu_0$ $H_1: \mu \neq \mu_0$	$Z = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} \rightarrow N(0;1)$	$z_{\exp} \leq -z_{\alpha/2}$ $z_{\exp} \geq z_{\alpha/2}$
$H_0: \mu \leq \mu_0$ $H_1: \mu > \mu_0$		$z_{\exp} \geq z_{\alpha}$
$H_0: \mu \geq \mu_0$ $H_1: \mu < \mu_0$		$z_{\exp} \leq -z_{\alpha}$

Varianza Desconocida	
Estadístico de contraste	
$$T = \frac{\overline{X} - \mu_0}{S / \sqrt{n}} \rightarrow t_{n-1}$$	
Hipótesis del test	**Criterio de rechazo**
$H_0 : \mu = \mu_0$ $H_1 : \mu \neq \mu_0$	$t_{\exp} \leq -t_{\alpha/2;n-1}$ $t_{\exp} \geq t_{\alpha/2;n-1}$
$H_0 : \mu \leq \mu_0$ $H_1 : \mu > \mu_0$	$t_{\exp} \geq t_{\alpha;n-1}$
$H_0 : \mu \geq \mu_0$ $H_1 : \mu < \mu_0$	$t_{\exp} \leq -t_{\alpha;n-1}$

- **Ejemplo:**

En un preparado alimenticio infantil se especifica que el contenido medio de proteínas es al menos del 42%. Tratamos de comprobar esta especificación y para ello tomamos 10 preparados que analizamos para determinar su contenido en proteínas, obteniendo una media del 40% y una cuasidesviación típica del 3.5%.

¿Es correcta la especificación citada para un nivel de significación del 0.05, suponiendo normal la distribución de la variable *contenido proteico*?

X: "Contenido Proteico", $X \rightarrow N(\mu\,;\sigma)$

$$n = 10; \quad \overline{\mathrm{x}} = 40; \quad S = 3.5$$

Contraste de Hipótesis:

$$\left.\begin{array}{l} H_0 : \mu \geq 42 \\ H_1 : \mu < 42 \end{array}\right\}$$

$$n = 10; \quad \bar{x} = 40; \quad S = 3.5$$

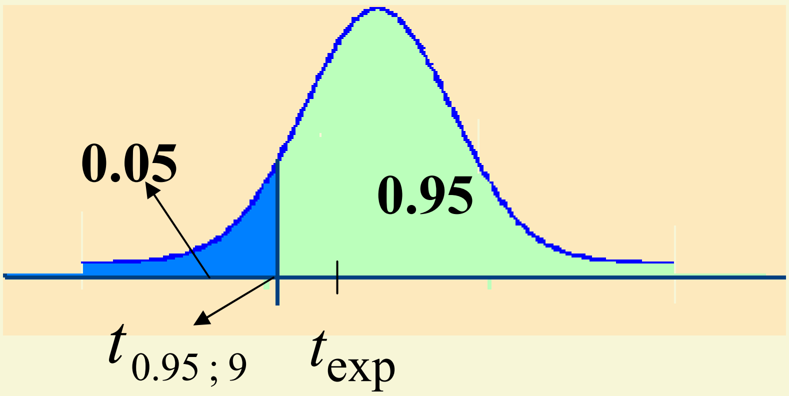
Contraste de Hipótesis: $\left.\begin{array}{l} H_0 : \mu \geq 42 \\ H_1 : \mu < 42 \end{array}\right\}$

Estadístico de contraste:

$$\frac{\bar{x} - \mu_0}{S / \sqrt{n}} \rightarrow t_{n-1}$$

$$\alpha = 0.05; \quad t_{0.95;\,9} = -t_{0.05;\,9} = -1.833$$

$$\left. t_{\exp} = \frac{40 - 42}{3.5 / \sqrt{10}} = -1.8070 \right\} \Rightarrow \textbf{No rechazamos } H_0$$



Admitimos como correcta la especificación del preparado acerca del contenido proteico

❖ Contrastes sobre la varianza

Media desconocida	
Estadístico de contraste	
$\chi^2 = \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \rightarrow \chi^2_{n-1}$	
Hipótesis del test	Criterio de rechazo
$H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$ $H_1: \sigma^2 \neq \sigma_0^2$	$\chi^2_{\exp} \leq \chi^2_{1-\alpha/2;\, n-1}$ $\chi^2_{\exp} \geq \chi^2_{\alpha/2;\, n-1}$
$H_0: \sigma^2 \leq \sigma_0^2$ $H_1: \sigma^2 > \sigma_0^2$	$\chi^2_{\exp} \geq \chi^2_{\alpha;\, n-1}$
$H_0: \sigma^2 \geq \sigma_0^2$ $H_1: \sigma^2 < \sigma_0^2$	$\chi^2_{\exp} \leq \chi^2_{1-\alpha;\, n-1}$

❑ Ejemplo:

La varianza habitual para la altura de los machos de Lhasa Apso es de 0.25. Un criador está intentando reducir esta cifra. Después de un período de crianza selectiva, se selecciona una muestra de 15 perros a los que se mide, obteniendo una cuasivarianza muestral de 0.21. ¿Tenemos evidencias que nos permitan afirmar que ha disminuído la variabilidad en la altura de esta raza de perros?

X: Altura de los machos de Lhasa Apso

$$X \rightarrow N(\mu\,;\sigma)$$

$$n = 15 \qquad S^2 = 0.21$$

Contraste de Hipótesis:

$$\left.\begin{aligned} H_0 &: \sigma^2 \geq 0.25 \\ H_1 &: \sigma^2 < 0.25 \end{aligned}\right\}$$

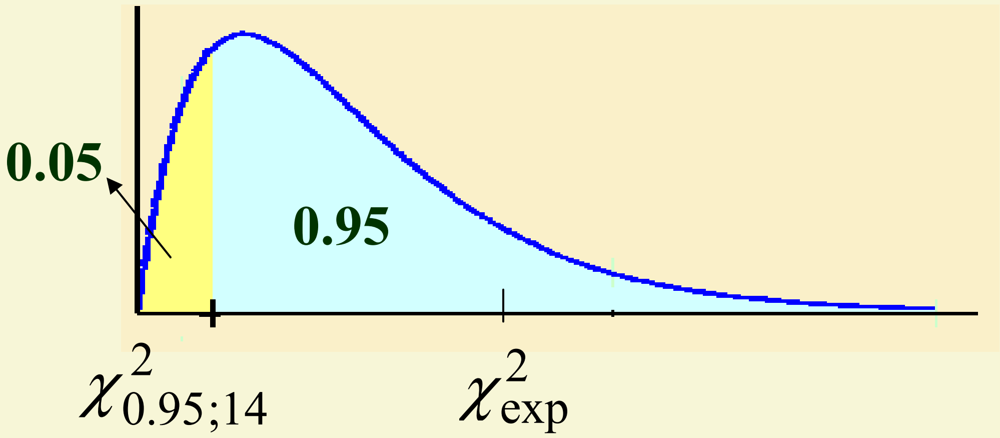
$$n = 15 \qquad S^2 = 0.21$$

Contraste de Hipótesis: $\left.\begin{array}{l} H_0 : \sigma^2 \geq 0.25 \\ H_1 : \sigma^2 < 0.25 \end{array}\right\}$

$$\alpha = 0.05; \;\; \chi^2_{0.95;14} = 6.57$$

Estadístico de contraste: $\chi^2 = \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \to \chi^2_{n-1}$

$$\left.\chi^2_{\exp} = \frac{14 \times 0.21}{0.25} = 11.76 \right\} \Rightarrow \text{ No rechazamos } H_0$$



No tenemos suficientes pruebas para sostener la información de que la crianza selectiva haya reducido la variabilidad en las alturas de los machos de Lhasa Apso

◈ 8.2.2. Contrastes sobre los parámetros de dos distribuciones normales independientes

$$X_1, X_2,..., X_{n_X} \quad \text{m.a.s. de } X \rightarrow N\left(\mu_X ; \sigma_X\right)$$

$$Y_1, Y_2,..., Y_{n_Y} \quad \text{m.a.s. de } Y \rightarrow N\left(\mu_Y ; \sigma_Y\right)$$

❖ Contrastes sobre la diferencia de medias

- **Varianzas conocidas**
- **Varianzas desconocidas, pero iguales**
- **Varianzas desconocidas, distintas o no. Muestras grandes**

Varianzas conocidas	
Estadístico de contraste	
$$Z=\frac{\left(\overline{X}-\overline{Y}\right)-\mu_0}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n_X}+\frac{\sigma_Y^2}{n_Y}}}\longrightarrow N(0;1)$$	
Hipótesis del test	**Criterio de rechazo**
$H_0:\mu_X-\mu_Y=\mu_0$ $H_1:\mu_X-\mu_Y\neq\mu_0$	$z_{\exp}\leq -z_{\alpha/2}$ $z_{\exp}\geq z_{\alpha/2}$
$H_0:\mu_X-\mu_Y\leq\mu_0$ $H_1:\mu_X-\mu_Y>\mu_0$	$z_{\exp}\geq z_{\alpha}$
$H_0:\mu_X-\mu_Y\geq\mu_0$ $H_1:\mu_X-\mu_Y<\mu_0$	$z_{\exp}\leq -z_{\alpha}$

Varianzas desconocidas, pero iguales	
Estadístico de contraste	
$$T=\frac{\left(\overline{X}-\overline{Y}\right)-\mu_0}{S_p\sqrt{\frac{1}{n_X}+\frac{1}{n_Y}}}\rightarrow t_{n_X+n_Y-2}$$	
Hipótesis del test	**Criterio de rechazo**
$H_0:\mu_X-\mu_Y=\mu_0$ $H_1:\mu_X-\mu_Y\neq\mu_0$	$t_{\exp}\leq -t_{\alpha/2;n_X+n_Y-2}$ $t_{\exp}\geq t_{\alpha/2;n_X+n_Y-2}$
$H_0:\mu_X-\mu_Y\leq\mu_0$ $H_1:\mu_X-\mu_Y>\mu_0$	$t_{\exp}\geq t_{\alpha;\, n_X+n_Y-2}$
$H_0:\mu_X-\mu_Y\geq\mu_0$ $H_1:\mu_X-\mu_Y<\mu_0$	$t_{\exp}\leq -t_{\alpha;\, n_X+n_Y-2}$

$$S_p^2=\frac{(n_X-1)S_X^2+\left(n_Y-1\right)S_Y^2}{n_X+n_Y-2}$$

Varianzas desconocidas con $n_x, n_y \geq 30$	
Estadístico de contraste	
$Z = \dfrac{\left(\overline{X} - \overline{Y}\right) - \mu_0}{\sqrt{\dfrac{S_X^2}{n_X} + \dfrac{S_Y^2}{n_Y}}} \rightarrow N(0;1)$	
Hipótesis del test	**Criterio de rechazo**
$H_0 : \mu_X - \mu_Y = \mu_0$ $H_1 : \mu_X - \mu_Y \neq \mu_0$	$z_{\exp} \leq -z_{\alpha/2}$ $z_{\exp} \geq z_{\alpha/2}$
$H_0 : \mu_X - \mu_Y \leq \mu_0$ $H_1 : \mu_X - \mu_Y > \mu_0$	$z_{\exp} \geq z_{\alpha}$
$H_0 : \mu_X - \mu_Y \geq \mu_0$ $H_1 : \mu_X - \mu_Y < \mu_0$	$z_{\exp} \leq -z_{\alpha}$

- **Ejemplo:**

En un estudio sobre angina de pecho en ratas, se dividió aleatoriamente a 18 animales afectados en dos grupos de 9 individuos cada uno. A un grupo se le suministró un placebo y al otro un fármaco experimental FL113. Después de un ejercicio controlado sobre una "cinta sin fin", se determinó el tiempo de recuperación de cada rata, obteniéndose los siguientes resultados:

Placebo	**FL113**
$n_X = 9$	$n_Y = 9$
$\overline{x} = 329$ seg.	$\overline{y} = 283$ seg.
$S_X = 45$ seg.	$S_Y = 43$ seg.

¿Se puede concluir que el fármaco experimental tiende a reducir el tiempo de recuperación? (Se supone Normalidad e igualdad en las varianzas poblacionales)

X: "Tiempo de recuperación de las ratas con placebo"

Y: "Tiempo de recuperación de las ratas con el fármaco"

$$X \to N(\mu_X;\sigma_X)$$
$$Y \to N(\mu_Y;\sigma_Y)$$

Independientes

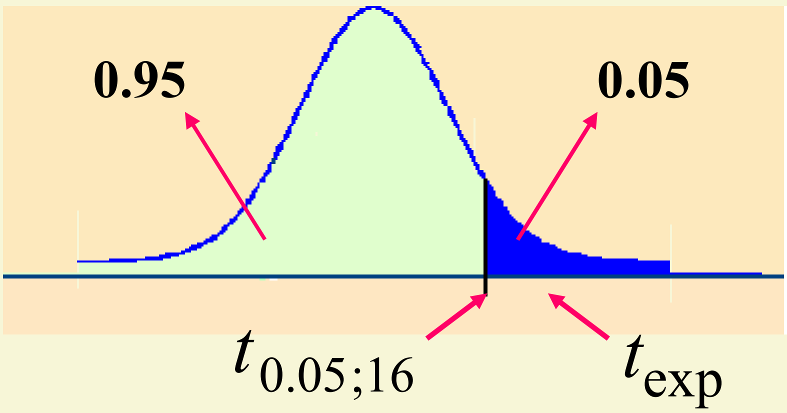
Contraste de Hipótesis: $\left.\begin{array}{l} H_0 : \mu_X \le \mu_Y \\ H_1 : \mu_X > \mu_Y \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} H_0 : \mu_X - \mu_Y \le 0 \\ H_1 : \mu_X - \mu_Y > 0 \end{array}\right\}$

Estadístico de contraste:

$$T = \frac{\left(\overline{X} - \overline{Y}\right) - \mu_0}{S_p \sqrt{\dfrac{1}{n_X} + \dfrac{1}{n_Y}}} \to t_{n_X + n_Y - 2}$$

$$S_p^2 = \frac{(n_X - 1) S_X^2 + (n_Y - 1) S_Y^2}{n_X + n_Y - 2} = \frac{8 \times 45^2 + 8 \times 43^2}{9 + 9 - 2} = 1937$$

$$\left.\begin{array}{l} t_{\exp} = 2.22 \\ t_{0.05;16} = 1.746 \end{array}\right\} \Rightarrow \textbf{Rechazamos } H_0$$



El fármaco experimental es eficaz en la reducción

del tiempo de recuperación en ratas con angina de pecho.

❖ Contrastes sobre la igualdad de varianzas

Medias desconocidas	
Estadístico de contraste	
$F=\dfrac{S_X^2}{S_Y^2} \rightarrow F_{n_X-1\,;\,n_Y-1}$	
Hipótesis del test	**Criterio de rechazo**
$H_0:\sigma_X^2=\sigma_Y^2$ $H_1:\sigma_X^2\neq\sigma_Y^2$	$F_{\exp}\leq F_{1-\alpha/2;\,n_X-1,n_Y-1}$ $F_{\exp}\geq F_{\alpha/2;n_X-1,n_Y-1}$
$H_0:\sigma_X^2\leq\sigma_Y^2$ $H_1:\sigma_X^2>\sigma_Y^2$	$F_{\exp}\geq F_{\alpha;\,n_X-1,\,n_Y-1}$
$H_0:\sigma_X^2\geq\sigma_Y^2$ $H_1:\sigma_X^2<\sigma_Y^2$	$F_{\exp}\leq F_{1-\alpha;\,n_X-1,n_Y-1}$

- **Ejemplo:**

Se realiza un estudio de prácticas de prescripción. El propósito es analizar la prescripción de digoxina, un fármaco importante, potencialmente tóxico y comúnmente utilizado. El nivel de dosificación para los mayores de 64 años debe ser menor que el de personas más jóvenes. Se extraen muestras independientes de cada grupo y se obtiene el nivel de dosificación para cada paciente seleccionado. Los resultados son:

Edad > 64 años	**Edad ≤ 64**
$n_X = 41$	$n_Y = 29$
$\overline{x} = 0.265$ mg./día	$\overline{y} = 0.268$ mg./día
$S_X = 0.102$ mg./día	$S_y = 0.068$ mg./día

¿Se puede considerar que la dispersión en ambas poblaciones es la misma?

X: "Cantidad de digoxina en pacientes con > 64 años"

Y: "Cantidad de digoxina en pacientes con ≤ 64 años"

$$X \to N(\mu_X, \sigma_X)$$
$$Y \to N(\mu_Y, \sigma_Y)$$

Independientes

Contraste de Hipótesis: $\left.\begin{aligned} H_0 : \sigma_X^2 = \sigma_Y^2 \\ H_1 : \sigma_X^2 \neq \sigma_Y^2 \end{aligned}\right\}$

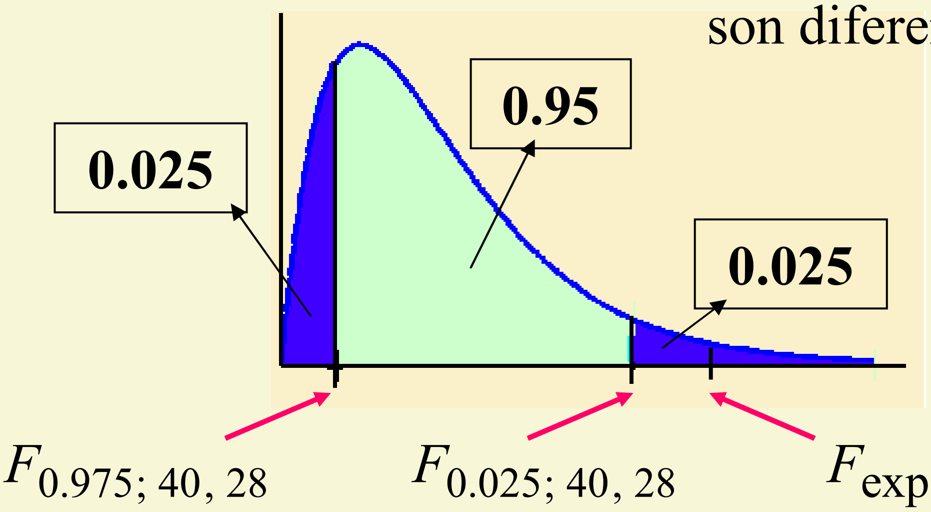
Estadístico de contraste: $F = \dfrac{S_X^2}{S_Y^2} \to F_{n_X - 1\,;\, n_Y - 1}$

$$n_X = 41; \qquad S_X = 0.102 mg./día$$
$$n_Y = 29; \qquad S_Y = 0.068 mg./día$$

$$\left.\begin{aligned} F_{\exp} &= \frac{0.102^2}{0.068^2} = 2.25 \\ F_{0.025;40,28} &= 2.05 \\ F_{0.975;40,28} &= \frac{1}{F_{0.025;28,40}} = \frac{1}{1.94} = 0.515 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

Rechazamos H_0

Las varianzas poblacionales son diferentes



◈ 8.2.3. Contrastes para una proporción

Estadístico de contraste	
$$Z = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} \to N(0;\ 1)$$	
Hipótesis del test	**Criterio de rechazo**
$H_0 : p = p_0$ $H_1 : p \neq p_0$	$z_{\exp} \leq -z_{\alpha/2}$ $z_{\exp} \geq z_{\alpha/2}$
$H_0 : p \leq p_0$ $H_1 : p > p_0$	$z_{\exp} \geq z_{\alpha}$
$H_0 : p \geq p_0$ $H_1 : p < p_0$	$z_{\exp} \leq -z_{\alpha}$

❑ **Ejemplo:**

Entre los pacientes con cáncer de pulmón, el 90% o más muere generalmente en el espacio de tres años. Como resultado de nuevas formas de tratamiento, se cree que esta tasa se ha reducido. En un reciente estudio sobre 150 pacientes diagnosticados de cáncer de pulmón, 128 murieron en el espacio de tres años. ¿Se puede afirmar que realmente ha disminuido la tasa de mortalidad al nivel $\alpha = 0.1$?

Contraste de Hipótesis:

$$\left.\begin{array}{l} H_0: p \geq 0.9 \\ H_1: p < 0.9 \end{array}\right\}$$

Estadístico de contraste:

$$Z = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\dfrac{p_0(1-p_0)}{n}}} \rightarrow N(0;\ 1)$$

Estimación muestral del parámetro:

$$\hat{p} = \frac{\text{Nº éxitos}}{\text{Nº observaciones}} = \frac{128}{150} = 0.853$$

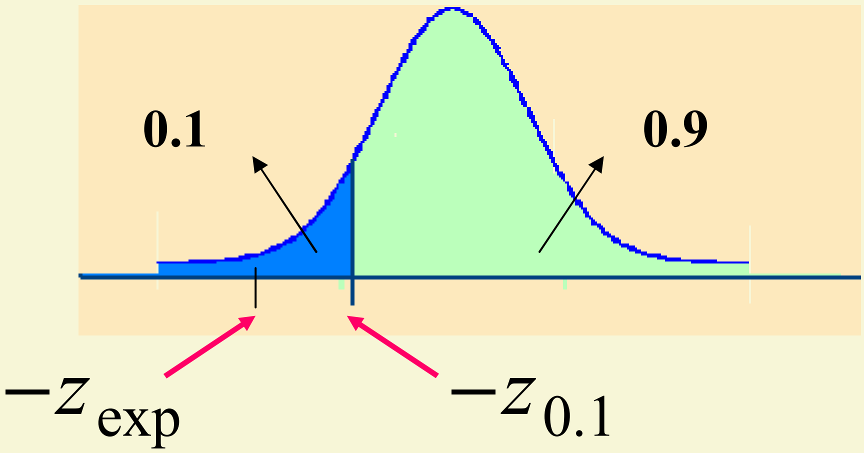
Contraste de Hipótesis: $\left.\begin{array}{l} H_0: p \geq 0.9 \\ H_1: p < 0.9 \end{array}\right\}$

$$\hat{p} = 0.853$$

$$Z_{\exp} = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} = \frac{0.853 - 0.9}{\sqrt{\frac{0.9(1-0.9)}{150}}} = -1.905$$

$$\alpha = 0.1; \;\; z_{0.9} = -z_{0.1} = -1{,}285$$

$$\Rightarrow \textbf{Rechazamos } H_0$$



◈ 8.2.3. Contrastes para la comparación de dos proporciones

Estadístico de contraste	
$$Z=\frac{\left(\hat{p}_X-\hat{p}_Y\right)-\left(p_X-p_Y\right)_0}{\sqrt{\frac{\hat{p}_X\left(1-\hat{p}_X\right)}{n_X}+\frac{\hat{p}_Y\left(1-\hat{p}_Y\right)}{n_Y}}}\rightarrow N(0;\ 1)$$	
Hipótesis del test	**Criterio de rechazo**
$H_0 : p_X - p_Y = (p_X - p_Y)_0$ $H_1 : p_X - p_Y \neq (p_X - p_Y)_0$	$z_{\exp} \leq -z_{\alpha/2}$ $z_{\exp} \geq z_{\alpha/2}$
$H_0 : p_X - p_Y \leq (p_X - p_Y)_0$ $H_1 : p_X - p_Y > (p_X - p_Y)_0$	$z_{\exp} \geq z_{\alpha}$
$H_0 : p_X - p_Y \geq (p_X - p_Y)_0$ $H_1 : p_X - p_Y < (p_X - p_Y)_0$	$z_{\exp} \leq -z_{\alpha}$

Ejemplo:

Se quiere comprobar la teoría de que la vitamina C es una ayuda en el tratamiento del cáncer. Se examinaron dos grupos de 75 pacientes cada uno. Al primero de ellos se le dio 10 gr. de vitamina C diariamente y se observó que 47 pacientes presentaron mejoría. A los pacientes del segundo grupo se les suministró un placebo y 43 experimentaron mejoría. Contrastar las hipótesis:

$$\left.\begin{array}{l} H_0 : p_X - p_Y \leq 0.04 \\ H_1 : p_X - p_Y > 0.04 \end{array}\right\}$$

Estadístico de contraste:

$$Z = \frac{\left(\hat{p}_X - \hat{p}_Y\right) - \left(p_X - p_Y\right)_0}{\sqrt{\frac{\hat{p}_X\left(1-\hat{p}_X\right)}{n_X} + \frac{\hat{p}_Y\left(1-\hat{p}_Y\right)}{n_Y}}} \to N(0;\ 1)$$

Estimación muestral de los parámetros:

$$\hat{p}_X = \frac{47}{75} = 0.63$$

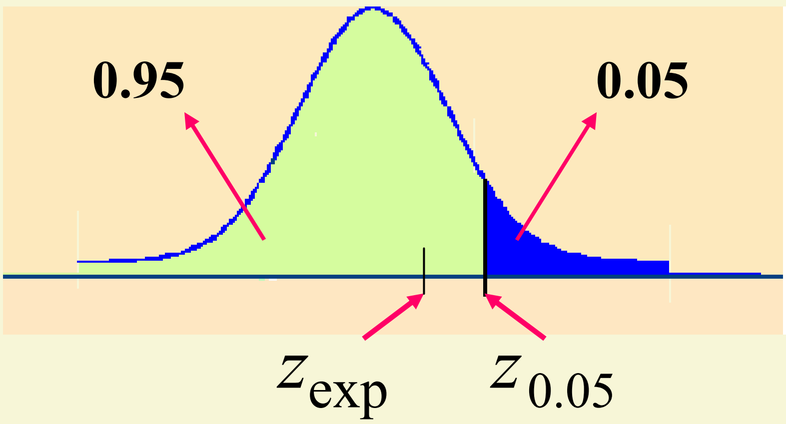
$$\hat{p}_Y = \frac{43}{75} = 0.57$$

$$\left.\begin{aligned} H_0 &: p_X - p_Y \le 0.04 \\ H_1 &: p_X - p_Y > 0.04 \end{aligned}\right\}$$

$$Z_{\exp} = \frac{(0.63 - 0.57) - 0.04}{\sqrt{\frac{0.63(1-0.63)}{75} + \frac{0.57(1-0.57)}{75}}} = 0.75$$

$$z_{0.05} = 1.645$$

$$z_{\exp} \ge z_{\alpha} \;\Rightarrow\; \textbf{No rechazamos } H_0$$



❖ 8.3. Tests No Paramétricos

◈ 8.3.1. Contrastes para la bondad de ajuste.

El problema de *bondad de ajuste* consiste en determinar a partir de un conjunto de datos muestrales si estos son consistentes con una distribución de Probabilidad teórica.

Partiendo de una muestra de n valores observados x_1 , x_2 ,..., x_n de una v.a.. X con distribución supuesta $F(x)$, se plantea el siguiente contraste de hipótesis:

$$\left.\begin{array}{l} H_0 : X \to F(x) \\ H_1 : X \text{ sigue otra distribución} \end{array}\right\}$$

❖ Planteamiento

➢ Consideremos una v.a. X, discreta o continua, y una muestra aleatoria de tamaño n de la distribución de dicha variable agrupada en k clases exhaustivas y mutuamente excluyentes.

➢ Sea n_i, $i = 1, 2, \ldots\ldots, k$, la frecuencia absoluta de la i-ésima clase

➢ Supongamos una cierta distribución teórica para X cuyos parámetros poblacionales los estimamos a partir de los datos muestrales.

➢ Si denotamos por p_i la **probabilidad asociada a la clase *i* ,** los valores $n\ p_i$ serán los **valores esperados** asociados a cada clase ***i*** .

Clases	Marcas de clase	Fr. Absolutas empíricas	Prob. Teóricas	Valores esperados
1	x_1	n_1	p_1	np_1
2	x_2	n_2	p_2	np_2
...	...	...	...	...
i	x_i	n_i	p_i	np_i
...	...	...	...	...
k	x_k	n_k	p_k	np_k
		n	1	n

Si algún valor esperado es menor que 5, $np_i < 5$, dicha clase se agrupará con otras contiguas, de manera que en todas ellas dichos valores sean mayores o iguales a 5, reduciéndose el número de clases.

❖ Solución del test

Hipótesis nula $H_0 : X \to F(x)$
Estadístico de contraste
$$Y = \sum_{i=1}^{k} \frac{\left(n_i - n\,p_i\right)^2}{n\,p_i} \to \chi^2_{(k-1)-r}$$
Criterio de rechazo
$$Y_{\text{exp}} \geq \chi^2_{\alpha\,;\,(k-1)-r}$$

- ***r*** **es el número de parámetros estimados de los que depende la distribución teórica**
- ***k*** **es el número de clases**

- **Ejemplo:**

Se mide el número de partículas que llegan a una determinada zona procedentes de una sustancia radioactiva en un corto espacio de tiempo siempre igual, anotándose los resultados en la siguiente tabla:

Nº de partículas	0	1	2	3	4	5	6
Nº de períodos de tiempo	269	325	207	82	28	7	2

a) Ajustar una distribución de Poisson

b) Calcular la probabilidad de que lleguen a dicha superficie 0, 1, 2, ..., 6 partículas

c) Verificar la bondad del ajuste mediante un contraste de la χ^2

X = " Nº de Partículas Radioactivas"

Determinación de los parámetros de la distribución.

Dado que no los conocemos, los estimamos:

$$\hat{\lambda} = \bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} n_i x_i = \frac{0\times 269 + 1\times 325 + ... + 6\times 2}{269 + 325 + ... + 2} = 1.24$$

$$X \to P(\lambda = 1.24)$$

Cálculo de probabilidades

$$P(X=0)=0.2898\,; \quad P(X=1)=0.3586\,;$$

$$P(X=2)=0.2222\,; \quad P(X=3)=0.919$$

$$P(X=4)=0.0285\,; \quad P(X=5)=0.007$$

$$P(X=6)=0.0014$$

Contraste de bondad de ajuste

$$\left.\begin{array}{l} H_o : X \rightarrow P(\lambda = 1.24) \\ H_1 : X \text{ sigue otra distribución} \end{array}\right\}$$

Nº de Partíc	Fr. Ab. n_i	Prob. p_i	Val. Esp. np_i
0	269	0.2898	266.616
1	325	0.3586	329.912
2	207	0.2222	204.424
3	82	0.0919	84.548
4	28	0.0285	26.22
5	7	0.0070	6.44
6	2	0.0014	1.288
	n = 920	1	

Como el último valor esperado es inferior a 5, unimos las dos clases contiguas

Nº de Partíc	Fr. Ab. n_i	Prob. p_i	Val. Esp. np_i	$(n_i-np_i)^2/np_i$
0	269	0.2898	266.616	0.0213
1	325	0.3586	329.912	0.0731
2	207	0.2222	204.424	0.0324
3	82	0.0919	84.548	0.0767
4	28	0.0285	26.22	0.1208
5 y 6	9	0.0084	7.728	0.2092
	n = 920	1		0.5335

Estadístico de contraste:

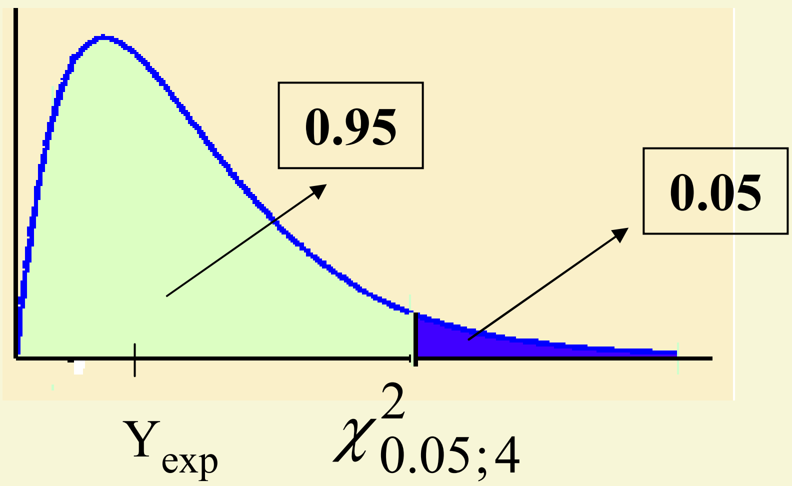
$$Y=\sum_{i=1}^{k}\frac{\left(n_i-np_i\right)^2}{np_i}\rightarrow \chi^2_{(k-1)-r}$$

Nº de Gr. de Libertad, (k-1) - r = (6-1) -1 = 4;

r = Nº de Parámetros estimados = 1

Criterio de rechazo: $Y_{\exp}\geq \chi^2_{\alpha;(k-1)-r}$

$$\left.\begin{array}{l}\chi^2_{0.05;4}=9.49\\ Y_{\exp}=\sum_{i=1}^{k}\frac{(n_i-np_i)^2}{np_i}=0.5335\end{array}\right\}\Rightarrow \text{No rechazamos } H_0$$



Los datos provienen de una distribución de **Poisson**

◈ 8.3.2. Contrastes para la independencia de dos caracteres

Se quiere determinar si existe relación entre dos características diferentes de una población, donde cada característica se encuentra subdividida en un cierto número de categorías

➢ TABLA DE CONTINGENCIA

$A \backslash B$	B_1	B_2	...	B_j	...	B_s	**Total**
A_1	n_{11}	n_{12}	...	n_{1j}	...	n_{1s}	$n_{1.}$
A_2	n_{21}	n_{22}	...	n_{2j}	...	n_{2s}	$n_{2.}$
...	...	...	...	...	...	...	...
A_i	n_{i1}	n_{i2}	...	n_{ij}	...	n_{is}	$n_{i.}$
...	...	...	...	...	...	...	...
A_r	n_{r1}	n_{r2}	...	n_{rj}	...	n_{rs}	$n_{r.}$
Total	$n_{.1}$	$n_{.2}$	...	$n_{.j}$	...	$n_{.s}$	$n_{..}$

$$n_{i\bullet} = \sum_{j=1}^{s} n_{ij}, \quad i = 1, 2, ..., r. \text{ Total de la } i\text{-ésima fila}$$

$$n_{\bullet j} = \sum_{i=1}^{r} n_{ij}, \quad j = 1, 2, ..., s. \text{ Total de la } j\text{-ésima columna}$$

➢ La decisión de rechazar o no rechazar la hipótesis nula de independencia de los dos caracteres, se basa en el mal o buen ajuste entre las frecuencias observadas y las frecuencias que se esperarían para cada celda si H_0 fuese cierta

Valores esperados: $$e_{ij} = \frac{n_{i\bullet} n_{\bullet j}}{n}$$

❖ Solución del test

Hipótesis nula H_0: *A* y *B* son independientes
Estadístico de contraste
$$U = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}\frac{\left(n_{ij}-e_{ij}\right)^2}{e_{ij}} \to \chi^2_{(r-1)(s-1)}$$
Criterio de rechazo
$$U_{\text{exp}} \geq \chi^2_{\alpha;(r-1)(s-1)}$$

Corrección de Yates para continuidad

Si algún valor e_{ij} es menor que 5, se aplica la siguiente corrección por continuidad al estadístico del test

Estadístico de contraste
$$U = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}\frac{\left(\left|n_{ij}-e_{ij}\right|-0.5\right)^2}{e_{ij}} \to \chi^2_{(r-1)(s-1)}$$

❑ Ejemplo:

Un psicólogo realiza una investigación para determinar si existe asociación aparente entre el peso de un muchacho y un éxito precoz en la escuela. Se selecciona una m.a.s. de 500. Se clasifica a cada uno de acuerdo a dos criterios: el peso y el éxito en la escuela, obteniéndose los siguientes resultados:

	Sobrepeso	
Éxito	Sí	No
Sí	162	263
No	38	37

A la vista de los datos, ¿qué se puede decir sobre la afirmación del psicólogo?

Contraste de Hipótesis:

$$\left.\begin{array}{l} H_0: \text{Los caracteres peso y éxito son independientes} \\ H_1: \text{Los caracteres peso y éxito no son independientes} \end{array}\right\}$$

Cálculo de los valores esperados, e_{ij}

$$\boxed{e_{ij} = \frac{n_{i\bullet}\, n_{\bullet j}}{n}}$$

$$e_{11} = \frac{n_{1\bullet}\, n_{\bullet 1}}{n} = \frac{425 \times 200}{500} = 170$$

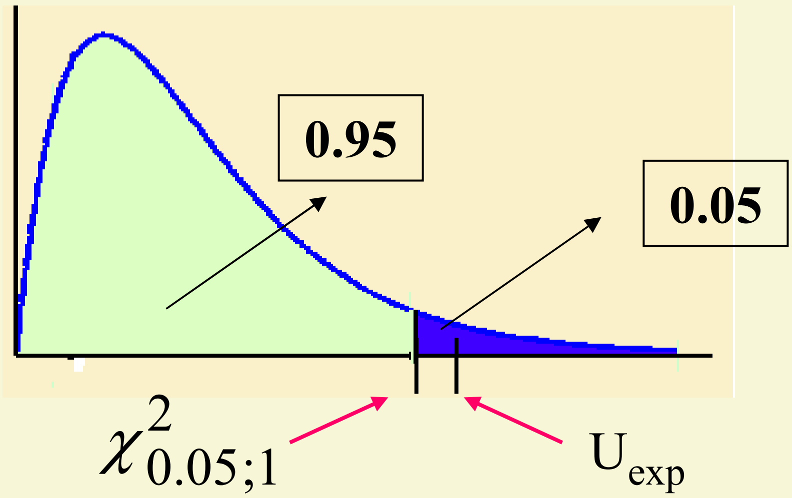
	Sobrepeso		
Éxito	Sí	No	Total
Sí	162 **(170)**	263 **(255)**	425
No	38 **(30)**	37 **(45)**	75
Total	200	300	500

Estadístico de contraste:

$$U=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}\frac{\left(n_{ij}-e_{ij}\right)^2}{e_{ij}} \rightarrow \chi^2_{(r-1)(s-1)}$$

$$U_{\exp}=\frac{(162-170)^2}{170}+\frac{(263-255)^2}{255}+$$
$$+\frac{(38-30)^2}{30}+\frac{(37-45)^2}{45}=4.18$$

$$\left.\begin{array}{l} U_{\exp}=4.18 \\ (r-1)(s-1)=1 \\ \chi^2_{0.05;1}=3.84 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Rechazamos } H_o$$



La obesidad y la precocidad en la escuela no son independientes

◈ 8.3.3. Contrastes de homogeneidad

El problema general es determinar si varias muestras se pueden considerar procedentes de una misma población, en cuyo caso decimos que las **muestras son homogéneas**.

➢ TABLA DE CONTINGENCIA

Modalidades / Muestras	B_1	B_2	...	B_j	...	B_p	Total
A_1	n_{11}	n_{12}	...	n_{1j}	...	n_{1p}	$n_{1.}$
A_2	n_{21}	n_{22}	...	n_{2j}	...	n_{2p}	$n_{2.}$
...	...	...	...	...	...	...	...
A_i	n_{i1}	n_{i2}	...	n_{ij}	...	n_{ip}	$n_{i.}$
...	...	...	...	...	...	...	...
A_r	n_{r1}	n_{r2}	...	n_{rj}	...	n_{rp}	$n_{r.}$
Total	$n_{.1}$	$n_{.2}$	...	$n_{.j}$	...	$n_{.p}$	$n_{..}$

❖ Solución del test

Hipótesis nula
H $_0$: Las muestras son homogéneas
Estadístico de contraste
$$U = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{p}\frac{\left(n_{ij}-e_{ij}\right)^2}{e_{ij}} \rightarrow \chi^2_{(r-1)(p-1)}$$
Criterio de rechazo
$$U_{\exp} \geq \chi^2_{\alpha;(r-1)(p-1)}$$

Ejemplo:

Un grupo de personas ha sido expuesto a la radiactividad de un vertedero con desechos atómicos. Se realiza una investigación para descubrir si hay alguna asociación entre la exposición y el desarrollo de una enfermedad en la sangre. Se eligen 300 personas expuestas al peligro y 320 no expuestas y se estudia a cada sujeto para determinar si tiene o no la enfermedad. ¿Qué se puede concluir a la vista de los resultados?

	Tiene la enfermedad	
Radioactividad	Sí	No
Sí	52	248
No	48	272

Contraste de Hipótesis:

$$\left.\begin{array}{l} H_0: \text{Hay Homogeneidad} \\ H_1: \text{No Hay Homogeneidad} \end{array}\right\}$$

Cálculo de los valores esperados, e_{ij}

$$\boxed{e_{ij} = \frac{n_{i\bullet}\, n_{\bullet j}}{n}}$$

$$e_{12} = \frac{n_{1\bullet}\, n_{\bullet 2}}{n} = \frac{300 \times 520}{620} = 251.61$$

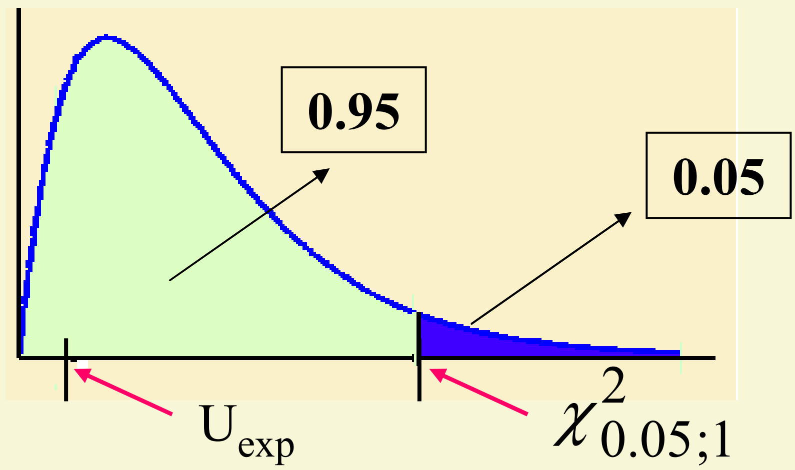
Radioactividad	Tiene la enfermedad: Sí	No	Total
Sí	52 **(48.39)**	248 **(251.61)**	**300**
No	48 **(51.61)**	272 **(268.39)**	**320**
Total	**100**	**520**	**620**

Estadístico de contraste:

$$U=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{p}\frac{\left(n_{ij}-e_{ij}\right)^2}{e_{ij}} \rightarrow \chi^2_{(r-1)(p-1)}$$

$$U_{\exp}=\frac{(52-48.39)^2}{48.39}+\frac{(248-251.61)^2}{251.61}+$$
$$+\frac{(48-51.61)^2}{51.61}+\frac{(272-268.39)^2}{268.39}=0.62$$

$$\left.\begin{array}{l} U_{\exp}=0.62 \\ (r-1)(p-1)=1 \\ \chi^2_{0.05;1}=3.84 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{No rechazamos } H_o$$



No hay evidencia de asociación entre enfermedad sanguínea y exposición a esta fuente de radioactividad