TEMA 5. MODELOS DE PROBABILIDAD CONTINUOS

❖ 5.1 Distribución Normal

➢ Una variable aleatoria continua, X, sigue una distribución normal de parámetros λ y σ

$$\boxed{X \rightarrow N(\mu;\sigma)}$$

si su función de densidad es:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$\text{donde} \quad \left\{ \begin{array}{l} -\infty < x < \infty \\ -\infty < \mu < \infty \\ \sigma > 0 \end{array} \right.$$

■ Puede comprobarse que se verifica:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = 1$$

◈ 5.1.1 La media y la varianza

❖ Media

$$E[X] = \mu$$

❖ Varianza

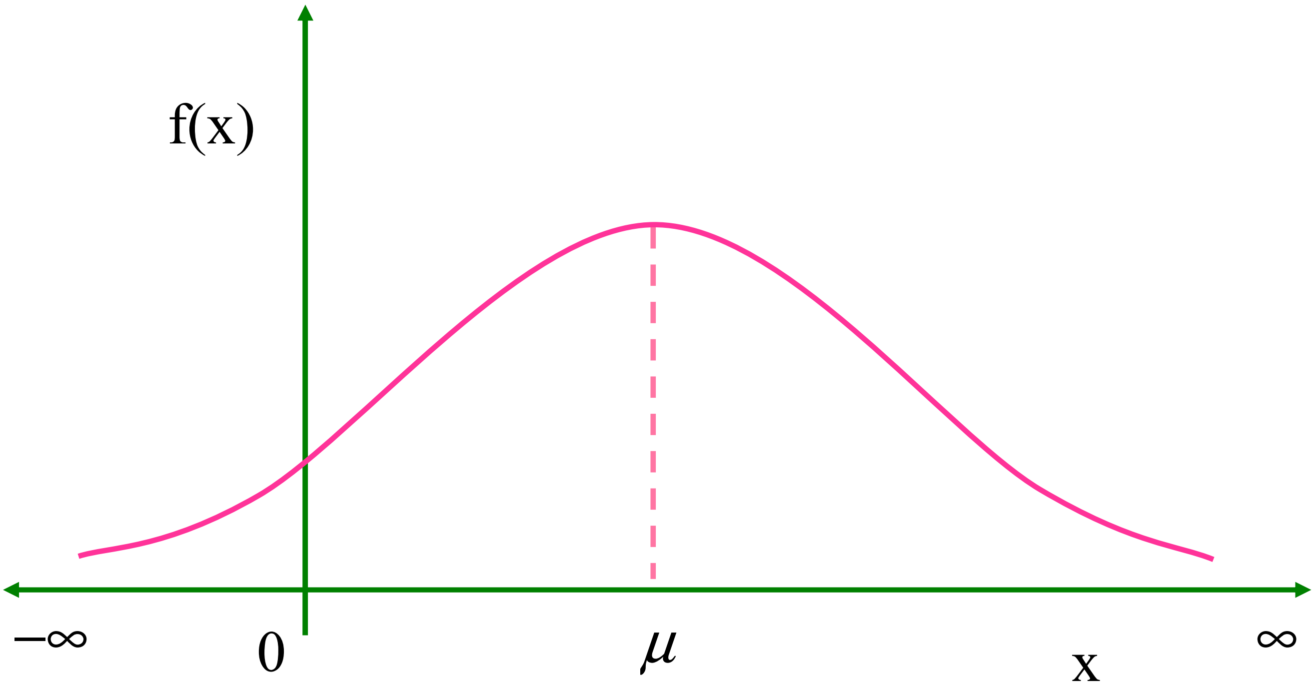
$$Var[X] = \sigma^2$$

❖ Desviación típica

$$\sigma = \sqrt{Var[X]}$$

◈ 5.1.2 Representación gráfica

◈ Campana de Gauss



$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$$

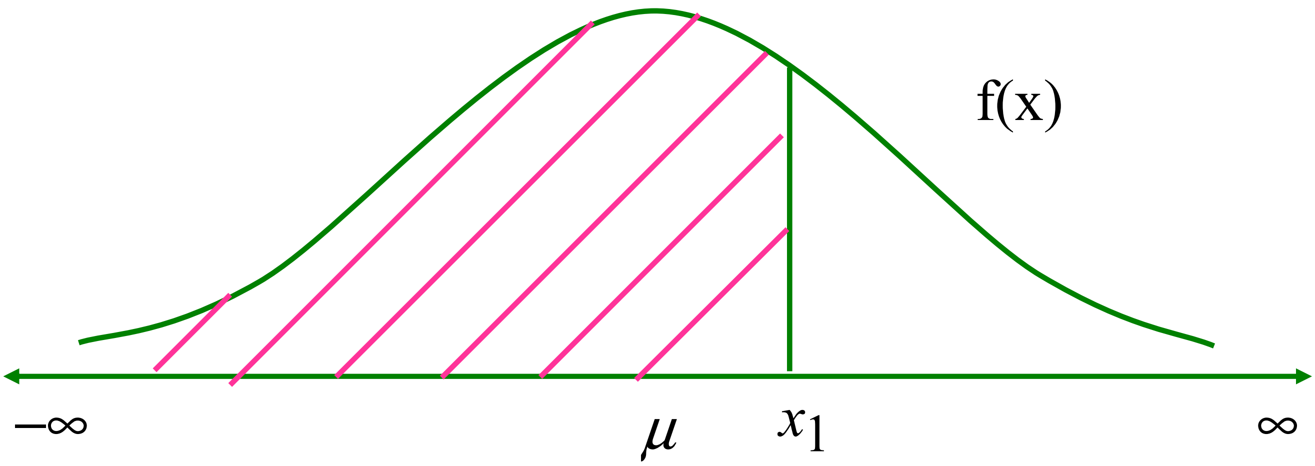
➢ **Se verifica:**

- **La curva es simétrica respecto a μ**
- **La media, la moda y la mediana coinciden**

❖ Función de distribución

$$F(x_1) = P(X \le x_1) = \int_{-\infty}^{x_1} f(x)\,dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{x_1} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,dx$$



Área a la izquierda del punto x_1

◈ 5.1.3 Distribución Normal tipificada

➢ Una variable aleatoria continua, X, sigue una distribución normal de parámetros $\mu = 0$ y $\sigma = 1$

$$\boxed{X \rightarrow N(0;1)}$$

si su función de densidad es:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

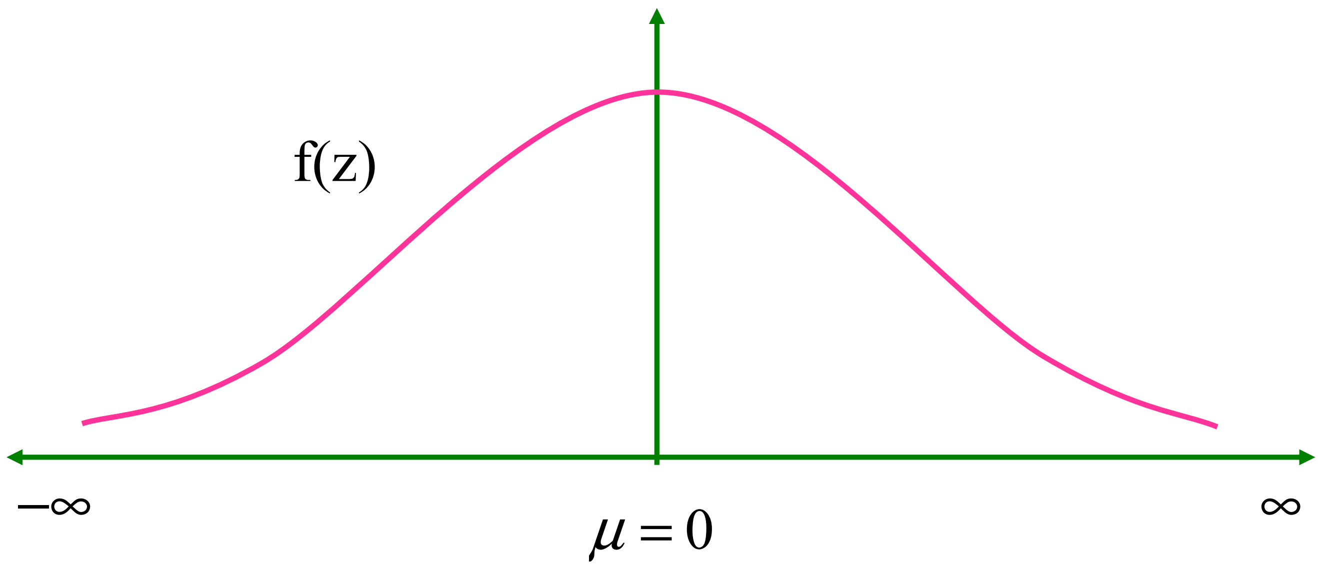
$$\boxed{E[X] = \mu = 0}$$

$$\boxed{D.T.[X] = \sigma = 1} \qquad \boxed{Var[X] = \sigma^2 = 1}$$

Si $X \rightarrow N(\mu\,;\sigma)$, entonces la variable aleatoria

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \rightarrow N(0;1)$$

❖ Representación gráfica de la función de densidad de la distribución Normal tipificada



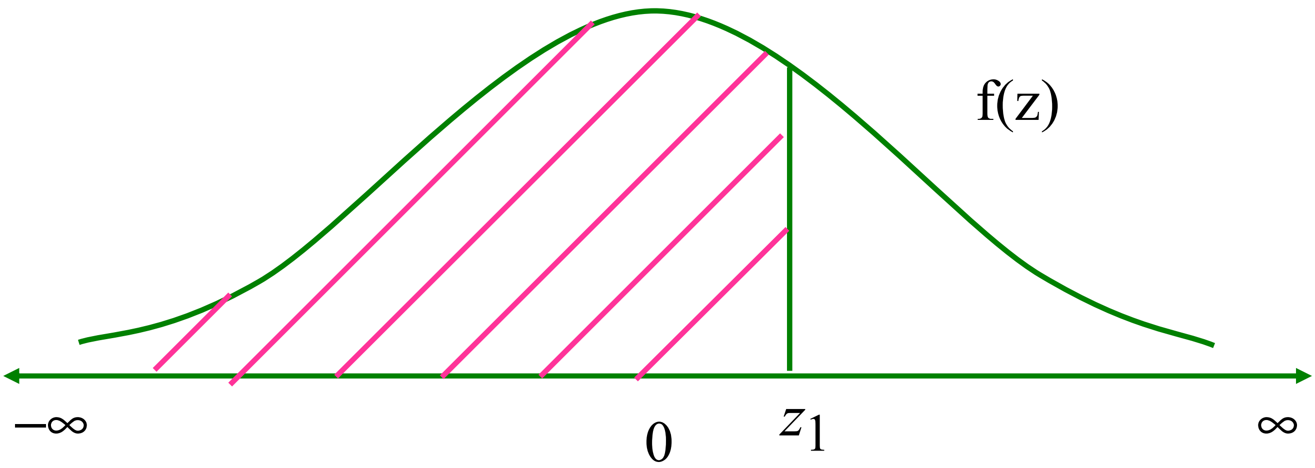
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(z)\,dz = 1$$

- **Se verifica:**
  - **La curva es simétrica respecto a 0**
  - **La media, la moda y la mediana coinciden**

❖ Función de distribución de la distribución Normal tipificada

$$F(z_1) = P(Z \leq z_1) = \int_{-\infty}^{z_1} f(z)\, dz =$$

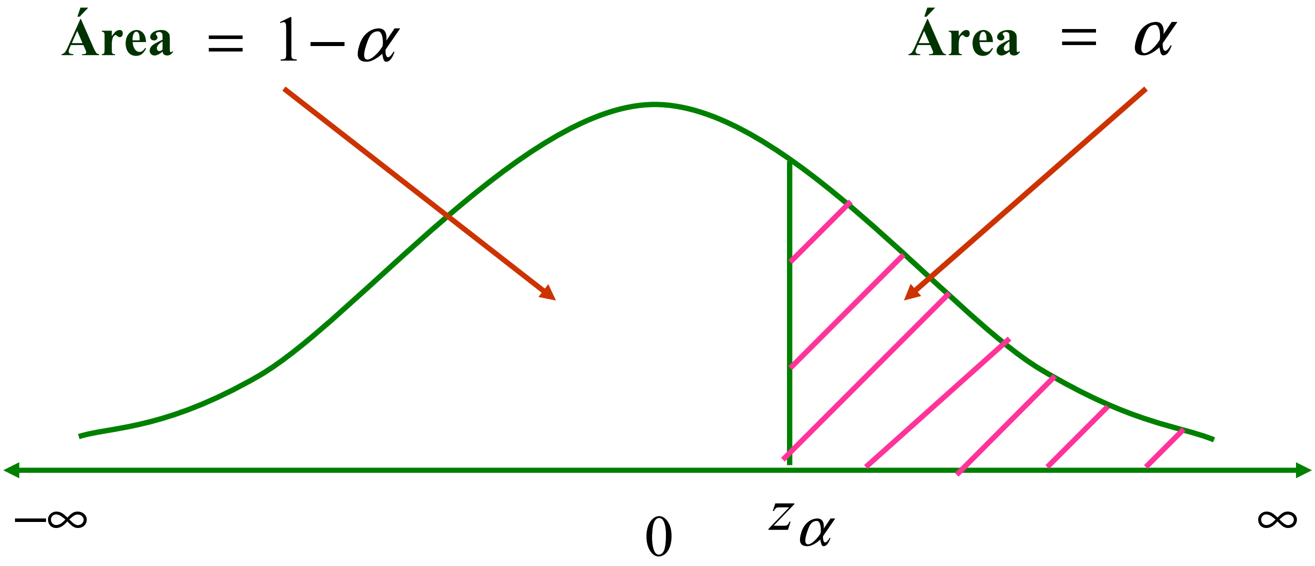
$$= \int_{-\infty}^{z_1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}\, dz$$



Área a la izquierda del punto z_1

◈ 5.1.4 Uso de tablas

$$\alpha = P(Z > z_\alpha) = \int_{z_\alpha}^{\infty} f(z)dz$$



Área a la derecha del punto z_α

♦ Ejemplo

❑ Se sabe que la longitud de las alas extendidas de un tipo de ave rapaz es una variable aleatoria que sigue una distribución Normal, de media 120 cm. y desviación típica 8 cm.

1. Calcúlese la probabilidad de que la longitud de las alas de un ave elegida al azar sea:
   - a.- Mayor de 130 cm
   - b.- Menor de 100 cm
   - c.- Esté comprendido entre 110 y 130 cm

2. Obtener la longitud tal que solo el 10 % de las aves tienen una longitud superior.

Solución:

$$X \rightarrow N(120;\ 8)$$

1.

$$a.\quad P(X > 130) = P\left(\frac{X-120}{8} > \frac{130-120}{8}\right) =$$

$$= P(Z > 1.25) = 0.1056$$

$$b.\quad P(X<100)=P\left(Z<\frac{100-120}{8}\right)=P(Z<-2.5)$$

$$=P(Z>2.5)=0.00621$$

$$c.\quad P(110<X<130)=P\left(\frac{110-120}{8}<Z<\frac{130-120}{8}\right)=$$

$$=P(-1.25<Z<1.25)=1-2P(Z>1.25)=$$

$$=1-2\times 0.1056=0.7888$$

$$2.\quad P(X>a)=0.1$$

$$P\left(\frac{X-120}{8}>\frac{a-120}{8}\right)=P\left(Z>z_1\right)=0.1 \quad \Rightarrow$$

$$z_1=1.28 \;\Rightarrow\; \frac{a-120}{8}=1.28 \;\Rightarrow$$

$$a=1.28\times 8+120=130.24$$

♦ Ejemplos

- Una de las mayores contribuciones a la contaminación atmosférica es la provocada por los hidrocarburos procedentes de los tubos de escape de los automóviles. Sea X: "gramos de hidrocarburos emitidos por un automóvil por cada milla recorrida".

- El plomo, como muchos otros elementos, está presente en el medio natural. La revolución industrial y la llegada del automóvil han incrementado la cantidad de plomo en el medio hasta el punto de que su concentración puede alcanzar niveles peligrosos. Sea X : "concentración de plomo en partes por millón en la corriente sanguínea de un individuo".

◈ 5.1.5 Aditividad

- Sean k variables aleatorias, $X_1, X_2, \ldots, X_K$, que verifican:

    - Independientes entre sí
    - $X_i \rightarrow N\left(\mu_i ; \sigma_i\right)$, i = 1, 2,...,k

- Sean k números reales, $a_1, a_2, \ldots, a_k$

- Definimos la variable aleatoria X como:

$$X = a_1 X_1 + a_2 X_2 + \ldots. + a_k X_k$$

$$\Updownarrow$$

✓ En estas condiciones se verifica que la variable aleatoria X sigue una distribución Normal:

$$\boxed{N\left(a_1\mu_1 + a_2\mu_2 + .. + a_k\mu_k ; \sqrt{a_1\sigma_1^2 + a_2\sigma_2^2 + .. + a_k\sigma_k^2}\right)}$$

5.1.6 Aproximación de una binomial a una Normal

- Sea X una v.a. con distribución Binomial

$$X \rightarrow B(n; p)$$

- Si se verifica que n es grande y p ni muy grande ni muy pequeño :

n > 30 y 0.1 < p < 0.9 ⟹

✓ La Distribución Binomial se aproxima a una distribución Normal de media np y varianza npq

$$X \rightarrow N\left(np; \sqrt{npq}\right)$$

⇓

$$Z = \frac{X - np}{\sqrt{npq}} \rightarrow N(0; 1)$$

◈ 5.1.7 Aproximación de una Poisson a una Normal

- Sea X una v.a. con distribución de Poisson

$$\boxed{X \rightarrow P(\lambda)}$$

- Si se verifica que λ es grande :

$$\lambda \geq 10 \quad \Rightarrow$$

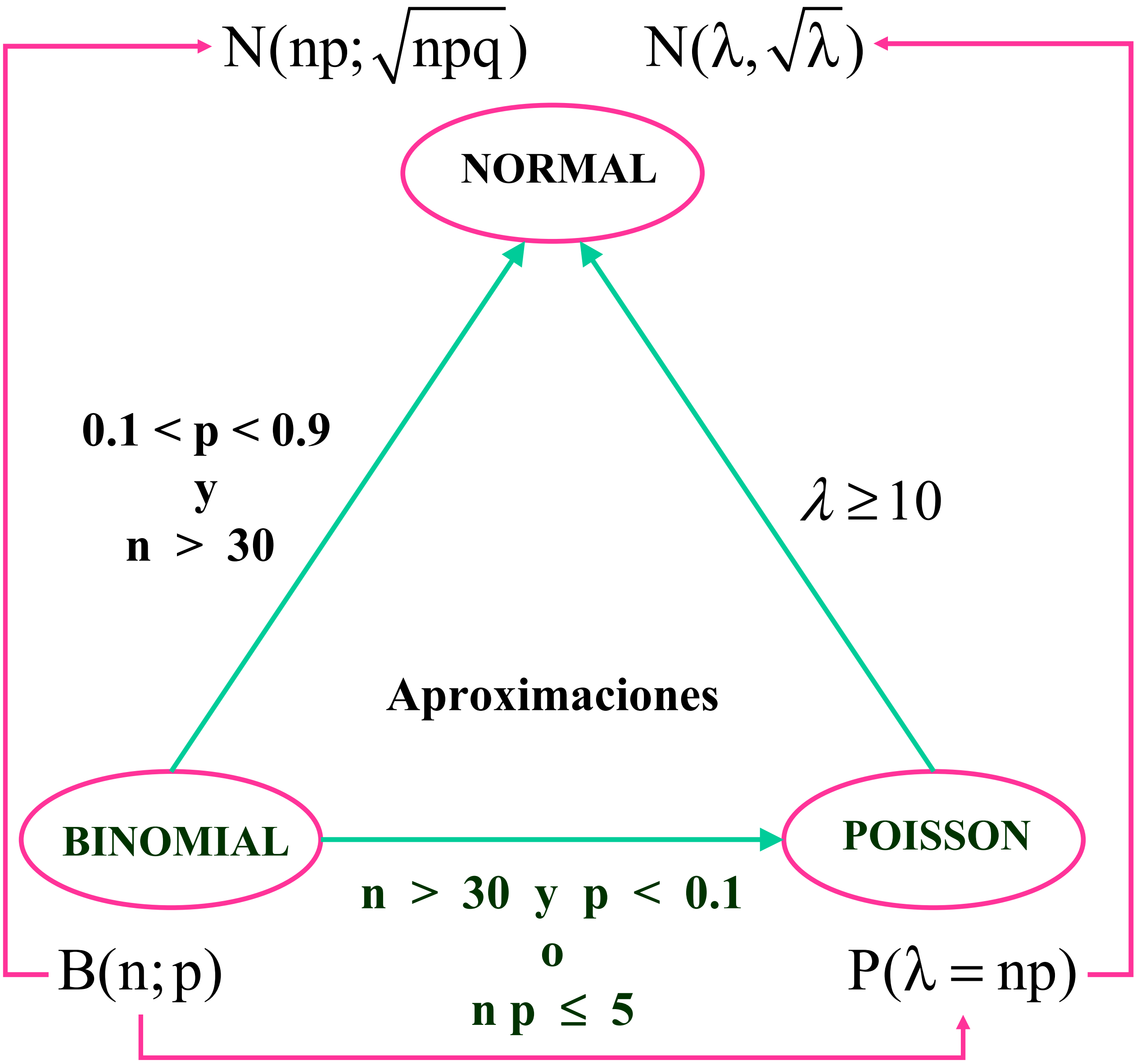
✓ La Distribución de Poisson se aproxima a una distribución Normal de media y varianza λ

$$\boxed{X \rightarrow N\left(\lambda; \sqrt{\lambda}\right)}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{Z = \frac{X - \lambda}{\sqrt{\lambda}} \rightarrow N(0; 1)}$$

◈ Aproximaciones



❖ 5.2 Otras distribuciones continuas

- Distribución Chi-Cuadrado
- Distribución t de Student
- Distribución F de Snedecor

➢ Distribuciones asociadas al muestreo