TEMA 4. MODELOS DE PROBABILIDAD DISCRETOS

❖ 4.1 Distribución binomial

◈ 4.1.1 Definición. Ejemplos

➢ Sea un experimento aleatorio en el que sólo puedan darse dos posibilidades: que ocurra un determinado suceso A, que llamaremos éxito, o que no ocurra dicho suceso, o sea que ocurra su complementario, que llamaremos fracaso, $\overline{A}$.

➢ Se conoce la probabilidad de ocurrencia del suceso A, y por lo tanto la de su complementario:

$$P(A)=p\,; \quad P\left(\overline{A}\right)=1-p=q$$

➢ Se repite el experimento n veces en las mismas condiciones (independencia). Se define la variable aleatoria Binomial :

➢ X: "nº de veces que ocurre el suceso A (nº éxitos) en n realizaciones independientes del experimento"

✓ Por lo tanto, X: 0, 1, 2 , 3, ……n

$$\boxed{X \rightarrow B(n; p)}$$

❖ Función de probabilidad

$$P(X=r)=\binom{n}{r}p^r q^{n-r}$$

$$=\frac{n!}{r!(n-r)!}p^r q^{n-r}$$

$$r: 0,1,2,\ldots,n$$

- Puede comprobarse que se verifica:

$$\sum_{r=0}^{n} P(X=r)=\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}p^r q^{n-r}=1$$

♦ Ejemplos

- Nº de caras al lanzar 20 veces una moneda
- Nº de aprobados si se presentan 80 alumnos a un examen
- Nº de familias con un solo hijo en una población de 120 familias
- Nº de reacciones negativas ante un fármaco administrado a 40 pacientes
- Nº de accidentes de tráfico si han circulado 1200 automóviles
- Nº de semillas que germinan de las 20 semillas que se han plantado en suelos de idéntica composición

◈ 7.1.2 La media y la varianza

❖ Media

$$\mu = E[X] = \sum_{r=0}^{n} rP(X = r) = np$$

❖ Varianza

$$Var[X] = \sigma^2 = \sum_{r=0}^{n} (r - \mu)^2 P(X = r) = npq$$

♦ Ejemplo

Diez individuos, cada uno de ellos propenso a la tuberculosis, entran en contacto con un portador de la enfermedad. La probabilidad de que la enfermedad se contagie del portador a un sujeto cualquiera es de 0.1. ¿Cuántos se espera que contraigan la enfermedad?

Solución:

$$X \rightarrow B\,(10; 0.1) \;\Rightarrow\; E(X) = 10 \times 0.1 = 1$$

◈ 4.1.3 Uso de tablas

♦ Ejemplo

La probabilidad de que cierto antibiótico presente una reacción negativa al administrarse a un ave rapaz en recuperación es de 0.15. Si se les ha administrado dicho antibiótico a 10 aves, calcúlense las probabilidades de que haya reacción negativa:

a. En dos aves
b. En ningún ave
c. En menos de 4 aves
d. En más de 3 aves
e. Entre 2 y 5 aves

Solución:

$\textit{Suceso } A: \text{ "}\textit{A un ave se le presenta reacción negativa}\text{"}$

$X: \text{"}\textit{nº de aves a las que se les presenta tal reacción}\text{"}$

$$P(A) = 0.15\ ;\quad n = 10\ ;\quad X \rightarrow B(10\ ;\ 0.15)$$

$a.\quad P(X = 2) = 0.2759$

$b.\quad P(X = 0) = 0.1969$

$$c.\quad P(X<4)=P(X\le 3)=P(X=0)+P(X=1)+$$
$$+P(X=2)+P(X=3)=0.1969+0.3474+$$
$$+0.2759+0.1298=0.95$$

$$d.\quad P(X>3)=1-P(X\le 3)=1-\big(P(X=0)+P(X=1)+$$
$$+P(X=2)+P(X=3)\big)=1-\big(0.1969+0.3474+0.2759+$$
$$+0.1298\big)=0.05$$

$$e.\quad P(2\le X\le 5)=P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)+$$
$$+P(X=5)=0.2759+0.1298+0.0401+0.0085=$$
$$=0.4543$$

✧ Un hombre y una mujer, cada uno con un gen recesivo (Azul) y uno dominante (Marrón) para el color de los ojos, son padres de tres hijos. ¿Cuál es la distribución de probabilidades para X, número de hijos con ojos azules?

E = {(AA), (AM), (MA), (MM)}

A = "Ojos Azules"; P (A) = p =1/4; n = 3

X = {Nº de hijos con ojos azules de 3 hijos}

$$X \rightarrow B(n;p) = B(3;\,0.25)$$

$$P(X=r) = \binom{n}{r} p^r q^{n-r} = \binom{3}{r}\left(\frac{1}{4}\right)^r \left(\frac{3}{4}\right)^{3-r} \;;\; r = 0,1,2,3$$

$$P(X=0) = \binom{3}{0}\left(\frac{1}{4}\right)^0 \left(\frac{3}{4}\right)^3 = 0.4219$$

$$P(X=1) = \binom{3}{1}\left(\frac{1}{4}\right)^1 \left(\frac{3}{4}\right)^2 = 0.4219$$

$$P(X=2) = \binom{3}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^2 \left(\frac{3}{4}\right)^1 = 0.1406$$

$$P(X=3) = \binom{3}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^3 \left(\frac{3}{4}\right)^0 = 0.0156$$

◈ 4.1.4 Aditividad

- Sean k variables aleatorias, $X_1, X_2,\ldots,X_K$, que verifican:
  - Independientes entre sí
  - $X_i \longrightarrow B(n_i ; p),\ i = 1, 2,\ldots k$
- Definimos la variable aleatoria X como:

$$X = X_1 + X_2 + \ldots + X_k$$

$$\Updownarrow$$

✓ En estas condiciones se verifica que la variable aleatoria X sigue una distribución Binomial:

$$\boxed{X \rightarrow B(n_1 + \ldots + n_k ;\ p)}$$

❖ 6.2. Distribución de Poisson

◈ 6.2.1 Definición. Ejemplos

➢ Se define la variable aleatoria X como el numero de sucesos que ocurren en un intervalo continuo de tiempo, longitud o espacio, de un tamaño determinado.

➢ Sea λ el numero medio de sucesos que ocurren en estos intervalos.

➢ La variable aleatoria así definida sigue una Distribución de Poisson de parámetro λ

$$X \to P(\lambda)$$

♦ Ejemplo

Nº de veces que una planta de energía nuclear emite gases radiactivos en un periodo de tres meses

❖ Función de probabilidad

$$P(X = r) = \frac{\lambda^r}{r!} e^{-\lambda} \quad ; \quad r = 0,1,2,3,\ldots; \quad \lambda > 0$$

- Puede comprobarse que se verifica:

$$\sum_{r=o}^{\infty} P(X = r) = \sum_{r=o}^{\infty} \frac{\lambda^r}{r!} e^{-\lambda} = 1$$

◈ 6.2.2 La media y la varianza

❖ Media

$$\mu = E[X] = \lambda$$

❖ Varianza

$$Var[X] = \sigma^2 = \lambda$$

♦ Ejemplos

- Numero de bacterias nocivas por cada cm^3 de agua.
- Numero de partículas radiactivas emitidas cada hora por una cierta sustancia.
- Número de vehículos que llegan a una gasolinera en una hora.
- Número de virus que contiene un mm^3 de cierta solución.
- Nº de leucocitos en una gota de sangre

◈ 4.2.3 Uso de tablas

✧ **En una gasolinera la llegada de vehículos cada media hora sigue la distribución de Poisson de media 1.6. Calcúlese la probabilidad de que:**

a. **El nº de vehículos que lleguen sea superior a tres**
b. **Esté comprendido entre dos y cinco**
c. **Llegue algún vehículo**

X = "Nº de vehículos que llegan cada media hora"

$$X \rightarrow P(\lambda = 1.6)$$

$$a.\ P(X>3) = 1 - P(X \leq 3) =$$
$$= 1 - P(X=0) - P(X=1) - P(X=2) - P(X=3) =$$
$$= 1 - 0.2019 - 0.3230 - 0.2584 - 0.1378 = 0.0789$$

$$b.\ P(2 \leq X \leq 5) = P(X=2) + P(X=3) + P(X=4) + P(X=5) =$$
$$= 0.2584 + 0.1378 + 0.0551 + 0.0176 = 0.4689$$

$$c.\ P(X \geq 1) = 1 - P(X<1) = 1 - P(X=0) = 1 - 0.2019 = 0.7981$$

◈ 4.2.4 Aditividad

- Sean k variables aleatorias, $X_1, X_2, \ldots, X_k$, que verifican:
    - Independientes entre sí
    - $X_i \longrightarrow P(\lambda_i)$, i = 1, 2,…k

- Definimos la variable aleatoria X como:

$$X = X_1 + X_2 + \ldots + X_k$$

$$\Updownarrow$$

✓ En estas condiciones se verifica que la variable aleatoria X sigue una distribución de Poisson:

$$\boxed{X \rightarrow P(\lambda = \lambda_1 + \ldots + \lambda_k)}$$

♦ Ejemplo

✧ Una solución contiene 3 tipos de virus A, B y C. En un mm^3 de solución hay una media de 2 virus de tipo A, 4 virus de tipo B y 3 virus de tipo C. Obtener las siguientes probabilidades:

a.- En 3 mm^3 de solución haya mas de 1 virus de tipo A

b.- En 4 mm^3 de solución haya 5 virus de tipo B

c.- En 2 mm^3 de solución haya 7 virus de tipo A o C

d.- En 1 mm^3 de solución haya 8 virus de tipo A, B o C.

a. X **: "Nº de virus A en una solución de 3 mm^3 "**

$$X \rightarrow P(\lambda = 3x2) = P(\lambda = 6)$$

$$P(X > 1) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - \left(P(X = 0) + P(X = 1) \right) =$$

$$= 1 - \left(0.0025 + 0.0149 \right) = 0.9826$$

b. Y **: "Nº de virus B en una solución de 4 mm^3 "**

$$Y \rightarrow P(\lambda = 4x4) = P(\lambda = 16)$$

$$P(Y = 5) = \frac{16^5}{5!} e^{-16} = 0.01198$$

c. Z **= "Nº de virus A o C en una solución de 2 mm^3 "**

$$Z \rightarrow P(\lambda = 2x2+2x3) = P(\lambda = 10)$$

$$P(Z = 7) = 0.0901$$

d. V **= "Nº de virus A, B o C en una solución de 1 mm^3 "**

$$V \rightarrow P(\lambda = 2+4+3) = P(\lambda = 9)$$

$$P(V = 8) = 0.1318$$

4.2.5 Aproximación de una Binomial a una Poisson

- Sea X una v.a. con distribución Binomial

$$\boxed{X \to B(n;p)}$$

- Si se verifica que

$$\left\{\begin{array}{l} \mathbf{n > 30 \ \ y \ \ p < 0.1} \\ \quad \text{o bien} \\ \mathbf{n\,p \le 5} \end{array}\right. \Longrightarrow$$

✓ La distribución binomial se aproxima a una distribución de Poisson de parámetro $\lambda = np$

$$\boxed{X \to P(\lambda = np)}$$

♦ Ejemplos

- Número de individuos con reacción negativa ante un fármaco, entre un grupo de 100 individuos, conocida la probabilidad de reacción negativa de un individuo.

- Número de accidentados entre 3500, conocida la probabilidad de accidente de un individuo.

- Número de loros capturados en la cuenca del Amazonas que sobreviven al cambio, entre 700, si sólo uno de cada 50 sobrevive.

♦ Ejemplo

La probabilidad de que al administrársele un antibiótico a un ave rapaz en recuperación se le presente una reacción negativa es 0.05. Si se le va a administrar el antibiótico a 80 de estas aves, calcúlese la probabilidad de que:

1. No haya reacción negativa en ningún ave
2. Al menos haya reacción negativa en dos de ellas
3. Como mucho la haya en 5

Solución:

$Suceso\ A\ :\ "A\ un\ ave\ se\ le\ presenta\ reacción\ negativa"$

$X:"n^o\ de\ aves\ a\ las\ que\ se\ les\ presenta\ tal\ reacción"$

$$P(A)=0.05;\quad n=80;\quad X\to B\,(80\ ;\ 0.05)$$

n > 30 y p < 0.1

$$\Rightarrow X \ \to\ P\,(\lambda=np)=P\,(\lambda=80\times0.05)=P\,(\lambda=4)$$

1. $P(X=0)=0.0183$

2. $P(X\geq2)=1-P(X\leq1)=1-P(X=0)-P(X=1)$
$$=1-0.0183-0.0733=0.9084$$

3. $P(X\leq5)=P(X=0)+...+P(X=5)=$
$=0.0183+0.0733+0.1465+0.1954+0.1954+0.1563=$
$=0.7851$