TEMA 3. VARIABLE ALEATORIA

❖ 3.1. Introducción

Necesidad de asociar a un suceso un número real

➢ **Definición.** Una variable aleatoria (v.a.) es una función que asocia a cada resultado del espacio muestral un número real

▪**Ejemplo:** *Se realiza un experimento en un laboratorio cuyo resultado puede ser positivo o negativo. Construir el espacio muestral y definir una v.a. asociada al experimento.*

$E = \{Positivo, Negativo\}$

$$\begin{cases} X(\,Positivo\,) = 1 \\ X(\,Negativo\,) = 0 \end{cases}$$

X es una variable aleatoria

➢ **Tipología**: V.a. discreta y v.a. continua

Discreta: Toma valores en un conjunto numerable

Continua: Toma valores en un conjunto infinito no numerable

◈ Sucesos y ejemplos

A un suceso experimental se le asocia un número real a través de la variable aleatoria

▪ **Ejemplo**. *Experimento en un laboratorio*

A : "El test da positivo" $\longleftrightarrow$ $\mathbf{A} = \{X = 1\}$

B : "El test da negativo" $\longleftrightarrow$ $\mathbf{B} = \{X = 0\}$

$\mathbf{A} \cup \mathbf{B}$: "dar positivo o negativo"

$\mathbf{A} \cup \mathbf{B} : \{X = 0,\ X = 1\} = \mathrm{E}$

▪ **Ejemplo**. X : *"Bacterias de tipo A en una pipeta"*

A : "Número de bacterias entre 1000 y 1500"

$$\mathbf{A} = \{1000 \leq X \leq 1500\}$$

B : "Número de bacterias menor o igual a 1200"

$$\mathbf{B} = \{X \leq 1200\}$$

◈ 3.1.1. Distribución de Probabilidad de una variable aleatoria

➢ La distribución de probabilidad de una v.a. es una función que asigna a cada valor posible de dicha v.a. una probabilidad

▪ **Ejemplo.** *Experimento en un laboratorio*

$$P\{X = 1\} = P\ \{\text{El test de positivo}\}$$

$$P\{X = 0\} = P\ \{\text{El test de negativo}\}$$

Ejemplo. X : *"Bacterias de tipo A en una pipeta"*

$$P\ \{1000 \leq X \leq 1500\} = P(\mathbf{A})$$

$$P\ \{X \leq 1200\} = P(\mathbf{B})$$

◈ 3.1.2. Función de Distribución de una variable aleatoria

➢ **Definición.** Función de Distribución de una variable aleatoria X

$$F(x) = P\{X \leq x\}; \quad \forall\, x \in R$$

♦ Es la probabilidad de que la v.a. X sea menor o igual a x

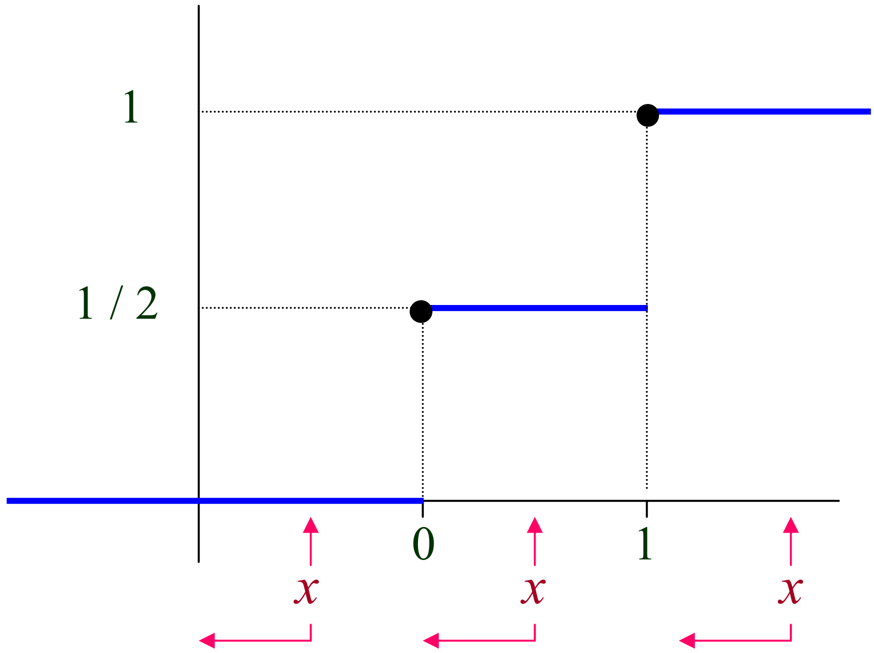
❖ Propiedades de la Función de Distribución

- ✓ F es no decreciente
- ✓ F es continua a la derecha
- ✓ $F(-\infty) = 0 \ ; F(+\infty) = 1$

- **Ejemplo.** *Un experimento en un laboratorio*

$$P\ \{X = 0\} = P\ \{X = 1\} =$$

$$= P\ \{\text{Negativo}\} = P\ \{\text{Positivo}\} = 1/2$$



$$F(x) = \begin{cases} 0 & ; \quad x < 0 \\ 1/2 & ; \quad 0 \leq x < 1 \\ 1 & ; \quad x \geq 1 \end{cases}$$

❖ 3. 2. Variable aleatoria discreta

♦ Definición

X es una v.a. discreta si toma valores en un conjunto numerable $\{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_i, \ldots\}$

◈ 3.2.1. Función masa de probabilidad de una variable aleatoria discreta

✓ Sea X una v.a. discreta que toma los valores

$$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_i, \ldots$$

La función masa de probabilidad se define como

$$\left.\begin{array}{l} P\{X = x_i\} = p_i \geq 0 \quad ; \quad i = 1, 2, \ldots \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1 \end{array}\right\}$$

x_i	$P[X = x_i] = p_i$
x_1	p_1
x_2	p_2
x_3	p_3
$\vdots$	$\vdots$

◈ 3.2.2. Función de distribución de una variable aleatoria discreta

✓ Sea X una v.a. discreta que toma los valores

$$X = x_1, x_2, x_3, \ldots, x_i, \ldots$$

❑ La función de distribución, $F(x)$, es la probabilidad de que la v.a. X tome valores menores o iguales a x

$$F(x) = P\{X \leq x\} = \sum_{x_i \leq x} P\{X = x_i\} = \sum_{x_i \leq x} p_i$$

x_i	$P[X = x_i] = p_i$	$F(x_i) = F_i$
x_1	p_1	$F_1 = p_1$
x_2	p_2	$F_2 = p_1 + p_2$
x_3	p_3	$F_3 = p_1 + p_2 + p_3$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

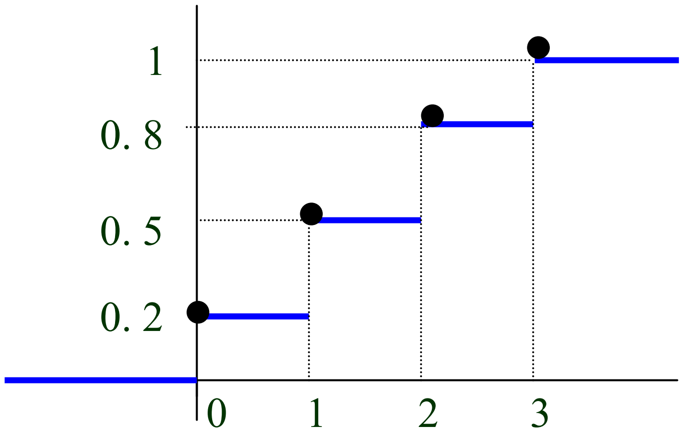
- **Ejemplo.** Se desea realizar un estudio sobre el número de crías en una camada. Sea la v.a. X :*"Número de crías en una camada"*

X toma los valores $x = 0, 1, 2, 3$, con probabilidades

$P\{X=0\} = 0.2;\ P\{X=1\} = P\{X=2\} = 0.3;\ P\{X=3\} = 0.2$

$F(2.5) = P\{X \leq 2.5\} = P\{X = 0\} + P\{X = 1\}$

$+ P\{X = 2\} = 0.8$



$$F(x) = \begin{cases} 0 & ; \quad x < 0 \\ 0.2 & ; \quad 0 \leq x < 1 \\ 0.5 & ; \quad 1 \leq x < 2 \\ 0.8 & ; \quad 2 \leq x < 3 \\ 1 & ; \quad x \geq 3 \end{cases}$$

¿Cuál es la probabilidad de que una camada tenga 2 crías?

$$P\{X=2\} = P\{X \leq 2\} - P\{X \leq 1\} = F(2) - F(1) = 0.3$$

¿Cuál es la probabilidad de que el número de crías en una camada sea mayor o igual a 2.2?

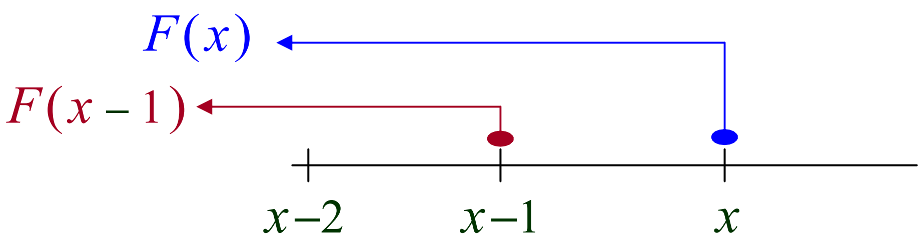
$$P\{X \geq 2.2\} = 1 - P\{X < 2.2\} = 1 - P\{X \leq 2\} = 1 - F(2)$$
$$= 0.2$$

¿Cuál es el número de crías que divide a las camadas en dos partes iguales?

$$F(x) = 0.5 \quad \Rightarrow \quad x = 1$$

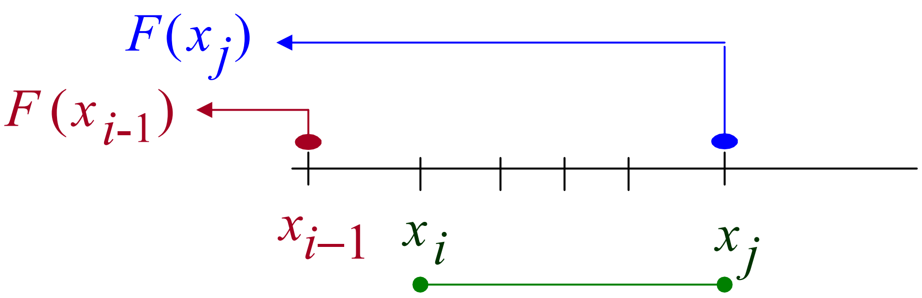
❖ **Nota:** *Relación de la f.m.p. y la F. distribución cuando la v.a. toma valores enteros*

$$P[X = x] = P[X \le x] - P[X \le x-1] = F(x) - F(x-1)$$



$$P[x_i \le X \le x_j] = P[X \le x_j] - P[X < x_i] =$$

$$= P[X \le x_j] - P[X \le x_{i-1}] = F(x_j) - F(x_{i-1})$$



▪ **Ejemplos.**

$$P[2 \le X \le 8] = F(8) - F(1)$$

$$P[2 \le X < 8] = P[2 \le X \le 7] = F(7) - F(1)$$

$$P[2 < X \le 8] = P[3 \le X \le 8] = F(8) - F(2)$$

❖ 3.3. Variable Aleatoria Continua

♦ Definición

X es una v.a. continua si toma valores en un conjunto no numerable

3.3.1. Función de densidad de una variable aleatoria continua

✓ X es una v.a. continua si existe una función f, llamada **función de densidad** tal que

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)\,dx \quad ; \quad a, b \in \Re$$

✦ La función de densidad verifica

$$\left.\begin{array}{l} f(x) \geq 0 \quad ; \quad \forall x \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1 \end{array}\right\}$$

- **Ejemplo**: Se desea estudiar el nivel de colesterol en cierto tipo de pollos. La función de densidad de la v.a. asociada es

$$f(x) = \begin{cases} kx & 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & x < 0 \,,\quad x > 2 \end{cases}$$

Calcular el valor de k

Solución.-

Para que f sea una función de densidad se debe verificar que:

$$\left.\begin{array}{l} f(x) \geq 0 \quad ; \quad \forall x \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1 \end{array}\right\}$$

Como $f(x) \geq 0 \;\Rightarrow k \geq 0$

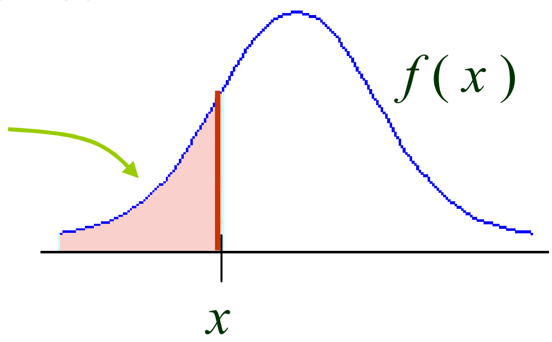
$$1 = \int_0^2 k\,x\,dx = k\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2 = k\frac{4}{2} = 2k = 1$$

$$\Rightarrow \quad k = 1/2$$

◈ 3.3.2. Función de distribución de una variable aleatoria continua

➤ Sea X una v.a. continua con función de densidad $f(x)$, entonces su función de distribución es

$$F(x) = P\left(X \le x\right) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx$$



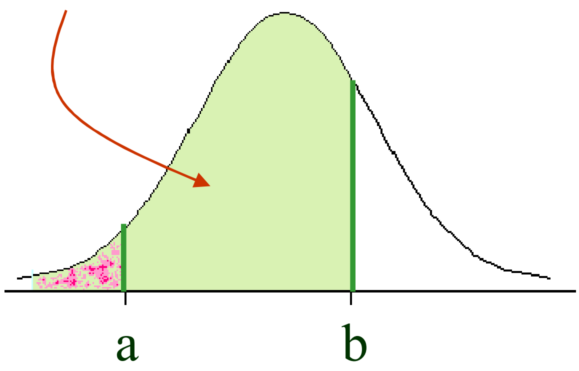
❖ **NOTA**

Si X es una v.a. continua

- $P(X = a) = 0$; para cualquier número real a
- $P(a \le X \le b) = P(a < X \le b) = P(a \le X < b) =$

$= P(a < X < b) =$

$$= \int_{a}^{b} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx - \int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx = F\left(b\right) - F\left(a\right)$$



- **Ejemplo.** Se desea estudiar el nivel de colesterol en cierto tipo de pollos. La función de densidad de la v.a. asociada es

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x & 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & x < 0\,, \quad x > 2 \end{cases}$$

1. Obtener la Función de Distribución, $F(x)$
2. Obtener: $P(X \leq 1.2)$; $P(X \geq 0.8)$; $P(1 < X < 1.5)$

Solución

1.

$x < 0$: $\quad F(x) = 0$

$0 \leq x \leq 2$: $F(x) = P\,[X \leq x] =$

$$= \int_0^x \frac{1}{2}x\,dx = \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^x = \frac{1}{2} \times \frac{x^2}{2} = \frac{x^2}{4}$$

$x > 2$: $\quad F(x) = \int_0^2 \frac{1}{2}x\,dx = \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2 = \frac{1}{2} \times \frac{2^2}{2} = \frac{2^2}{4} = 1$

2. Obtener : $P(X \leq 1.2)$; $P (X \geq 0.8)$; $P (1 < X < 1.5)$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x^2 / 4 & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ 1 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

$$P(X \leq 1.2) = F (1.2) = 1.2^2 / 4 = 0.36$$

$$P(X \geq 0.8) = 1 - P (X < 0.8) = 1 - F (0.8) =$$

$$= 1 - 0.8^2 / 4 = 0.84$$

$$P (1 < X < 1.5) = F (1.5) - F (1) =$$

$$= 1.5^2 / 4 - 1^2 / 4 = 0.3125$$

3.4. Características de una variable aleatoria. Esperanza y Varianza

- Necesidad de definir medidas que sinteticen el comportamiento de la variable aleatoria
- Consideraremos como medida de posición la Esperanza y de dispersión la Varianza

3.4.1. Esperanza Matemática de una variable aleatoria discreta

Sea X una variable aleatoria discreta que toma los valores $x_1, x_2, \ldots$ con f.m.p.

$$P(X = x_i) \text{ para } i = 1, 2, \ldots$$

$$E[X] = \sum_i x_i P[X = x_i]$$

Ejemplo. X : *"Número de crías en una camada"*

X toma los valores $x = 0, 1, 2, 3,$ con probabilidades

$P(X = 0) = 0.2$; $P(X = 1) = 0.3$;

$P(X = 2) = 0.3$; $P(X = 3) = 0.2$

$$E[X] = 0 \times 0.2 + 1 \times 0.3 + 2 \times 0.3 + 3 \times 0.2 = 1.5$$

◈ 3.4.2. Esperanza Matemática de una variable aleatoria continua

Sea X una variable aleatoria continua con función de densidad $f(\,x\,)$

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, dx$$

◈ 3.4.3. Propiedades de la Esperanza

- $E\,[aX\,] = a\,E\,[\,X\,]\,,\quad a \in R$
- $E\,[\,X + Y\,] = E\,[\,X\,] + E\,[\,Y\,]$
- $E\,[\,a\,X + b\,Y\,] = a\,E\,[\,X\,] + b\,E\,[\,Y\,]\,;\quad a,\,b \in R$

- **Ejemplo.**

La altura de un cierto árbol sigue una v.a. con función de densidad,

$$f(x) = x / 12, \quad \text{con } 1 < x < 5.$$

Calcular la Esperanza de X

Solución.

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, dx = \int_{1}^{5} \frac{x^2}{12}\, dx = \frac{1}{36}\left[x^3\right]_1^5 = \frac{31}{9}$$

◈ 3.4.4. Esperanza Matemática de una función de variable aleatoria

- Sea X una variable aleatoria discreta que toma los valores $x = x_1, x_2, \ldots$
- Sea $Y = h(X)$ una variable aleatoria discreta. Entonces

$$E[Y] = E[h(X)] = \sum_{i=1}^{\infty} h(x_i) P[X = x_i]$$

- **Ejemplo.**

Se ha realizado un test a una serie de ratones, pudiendo resultar éste negativo, nulo o positivo. La v.a. discreta asociada tiene la siguiente f.m.p.

$$P[X = -1] = P[X = 0] = P[X = 1] = 1/3,$$

asociando el valor -1 si el test da negativo, 0 si es nulo ó 1 si es positivo.

Calcular la esperanza de $Y = X^2$.

Solución.

$$E[Y] = \sum_i h(x_i) P[X = x_i] = \sum_i x_i^2 P[X = x_i] =$$

$$= (-1)^2 \times \frac{1}{3} + 0^2 \times \frac{1}{3} + 1^2 \times \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

- Sea X una v.a. continua con función de densidad $f(x)$
  Sea $Y = h(X)$ una v.a. continua. Entonces

$$E[Y] = E[h(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} h(x) f(x) dx$$

- **Ejemplo.** La longitud de las alas de un cierto tipo de ave sigue una v.a. con función de densidad,

$$f(x) = 2x ; \quad 0 < x < 1$$

Calcular la esperanza de $Y = \sqrt{X}$

Solución.

$$E[Y] = \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{x} f(x) dx = \int_0^1 \sqrt{x}\, 2x\, dx = 2\int_0^1 x^{1/2}\, x\, dx =$$

$$= 2\int_0^1 x^{3/2} dx = 2\frac{2}{5}\left[x^{5/2}\right]_0^1 = \frac{4}{5}\left[x^{5/2}\right]_0^1 = \frac{4}{5}$$

◈ 3.4.5. Varianza de una variable aleatoria. Propiedades y Ejemplos

□ Se define la varianza de una v.a. como

$$Var[X] = E\left[\left(X - E[X]\right)^2\right] = E\left[X^2\right] - E[X]^2 \geq 0$$

❖ Propiedades de la varianza

✧ $Var[X] = 0 \iff X$ es constante

✧ a constante $\Rightarrow Var[aX] = a^2\, Var[X]$

✧ a, b constantes $\Rightarrow Var[aX + b] = a^2\, Var[X]$

- **Ejemplo.** Se desea realizar un estudio sobre el número de crías en una camada.

X: *"Número de crías en una camada"*

X toma los valores $x = 0, 1, 2, 3$ con probabilidades

$$P\{X=0\} = 0.2\ ; \quad P\{X=1\} = 0.3\ ;$$
$$P\{X=2\} = 0.3\ ; P\{X=3\} = 0.2$$

Calcular la varianza de dicha variable aleatoria.

Solución

$$E\left[X^2\right] = 0^2 \times 0.2 + 1^2 \times 0.3 + 2^2 \times 0.3 + 3^2 \times 0.2 = 3.3$$

La esperanza de X ya fue calculada : $E[X] = 1.5$

Por lo tanto:

$$Var[X] = E\left[X^2\right] - E[X]^2 = 3.3 - 1.5^2 = 1.05$$

- **Ejemplo.**

La altura de un cierto árbol sigue una v.a. con función de densidad,

$$f(x) = x/12, \quad \text{con} \quad 1 < x < 5$$

Calcular la Varianza de X

Solución.

$$E\left[X^2\right] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,dx = \frac{1}{12}\int_1^5 x^3 dx = \frac{1}{48}\left[x^4\right]_1^5 = 13$$

La esperanza de X ya fue calculada y es: $E[X] = 31/9$.

Por lo tanto:

$$Var[X] = E\left[X^2\right] - E[X]^2 = 13 - \left(\frac{31}{9}\right)^2 = 1.1358$$

❖ 3.5. Independencia

Dos variables aleatorias X, Y son independientes $\Leftrightarrow$

◈ Caso discreto:

$$P[X = x,\ Y = y] = P[X = x] \bullet P[Y = y],\ \text{para todo } x, y$$

◈ Caso continuo:

$$f(x, y) = f_X(x) \bullet f_Y(y),\quad \text{para todo } x, y$$

Siendo f_X y f_Y las funciones de densidad de X e Y

Intuitivamente X e Y son independientes cuando el comportamiento de la primera no influye en el de la segunda y recíprocamente

- **Ejemplo.**

Sea X el número de machos por camada de una determinada especie e Y el número de hembras. Se han observado 399 camadas y el número de hembras y machos viene reflejado en la tabla adjunta

$X \backslash Y$	1	2	3	4	5	Marginal X
1	2	10	6	8	16	42
2	1	5	3	4	8	21
3	6	30	18	24	48	126
4	10	50	30	40	80	210
Marginal Y	19	95	57	76	152	399

Estudiar si X e Y son independientes

X e Y son independientes si se verifica que:

$$P[X=x,\ Y=y] = P[X=x]\, P[Y=y]$$

$$P[X=1,\ Y=1] = 2/399 \qquad \left.\begin{array}{l} P[X=1] = \dfrac{42}{399} \\[2ex] P[Y=1] = \dfrac{19}{399} \end{array}\right\}$$

$$P[X=1] \times P[Y=1] = \frac{42}{399} \times \frac{19}{399} = \frac{2}{399} = P[X=1,\ Y=1]$$

Análogamente se estudia para el resto de los valores.

Se prueba que X e Y son independientes