# TEMA 1. ESTADÍSTICA DESCRIPTIVA

## ❖ 1.1. Introducción : conceptos básicos

➢ **ESTADÍSTICA:** "Estudio de los métodos de recogida y descripción de datos, así como del análisis de esta información"

## ❖ Etapas de un estudio estadístico

1 Recogida de datos
2 Ordenación, tabulación y gráficos*
3 Descripción de características*
4 Análisis formal

* Estadística descriptiva: parte de la estadística que se ocupa de las etapas 2 y 3

## ❖ Individuo, Población, Muestra

➢ **Población:** "Conjunto de elementos a los que se les estudia una característica"
➢ **Individuo:** "Cada uno de los elementos de la población"
➢ **Muestra:** "Subconjunto representativo de la población"

## ❖ Variables estadísticas. Modalidades

➢ **Variable estadística (v.e.):** ”Característica propia del individuo objeto del estudio estadístico”

Ejemplos:

- Estatura
- Peso
- Color del pelo
- Nivel de colesterol
- Nº de hijos de una familia

➢ **Modalidad:** “Cada una de las posibilidades o estados diferentes de una variable estadística”

➢ Exhaustivas e incompatibles

Ejemplo:

color del pelo:

- castaño
- rubio
- negro

## ❖ Tipos de variables estadísticas

➢ **Cualitativas**: Las características no son cuantificables

Ejemplos:
- Grupo sanguineo
- Profesión
- Color del pelo

➢ **Cuantitativas:** Características cuantificables o numéricas

✓ **Discretas:** Numéricas numerables

Ejemplos:
- Nº de hijos de una familia
- Nº de nidos de procesionarias por árbol
- Nº de virus en un cultivo

✓ **Continuas:** Numéricas no numerables

Ejemplos:
- Estatura
- Peso
- Nivel de colesterol

## ❖ 1.2. Tablas estadísticas y representaciones gráficas

### ➢ Variables discretas

✓ Frecuencias

- Absolutas, $n_i$ (nº individuos modalidad i)
- Absolutas acumuladas, $N_i = n_1 + n_2 + \ldots + n_i$
- Relativas, $f_i = n_i / n$ (proporcion indiv. modalidad i)
- Relativas acumuladas, $F_i = f_1 + f_2 + \ldots + f_i$

| $x_i$ | $n_i$ | $N_i$ | $f_i$ | $F_i$ |
|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | $n_1$ | $N_1$ | $f_1$ | $F_1$ |
| … | … | … | … | … |
| $x_i$ | $n_i$ | $N_i$ | $f_i$ | $F_i$ |
| … | … | … | … | … |
| $x_k$ | $n_k$ | $N_k$ | $f_k$ | $F_k$ |
| | $n$ | | $1$ | |

**Absolutas, $n_i$**

**Absolutas acumuladas, $N_i$**

**Relativas**
**$f_i = n_i / n$**

**Relativas acumuladas**
**$F_i = N_i / n$**

## ➢ Variables continuas: Intervalos

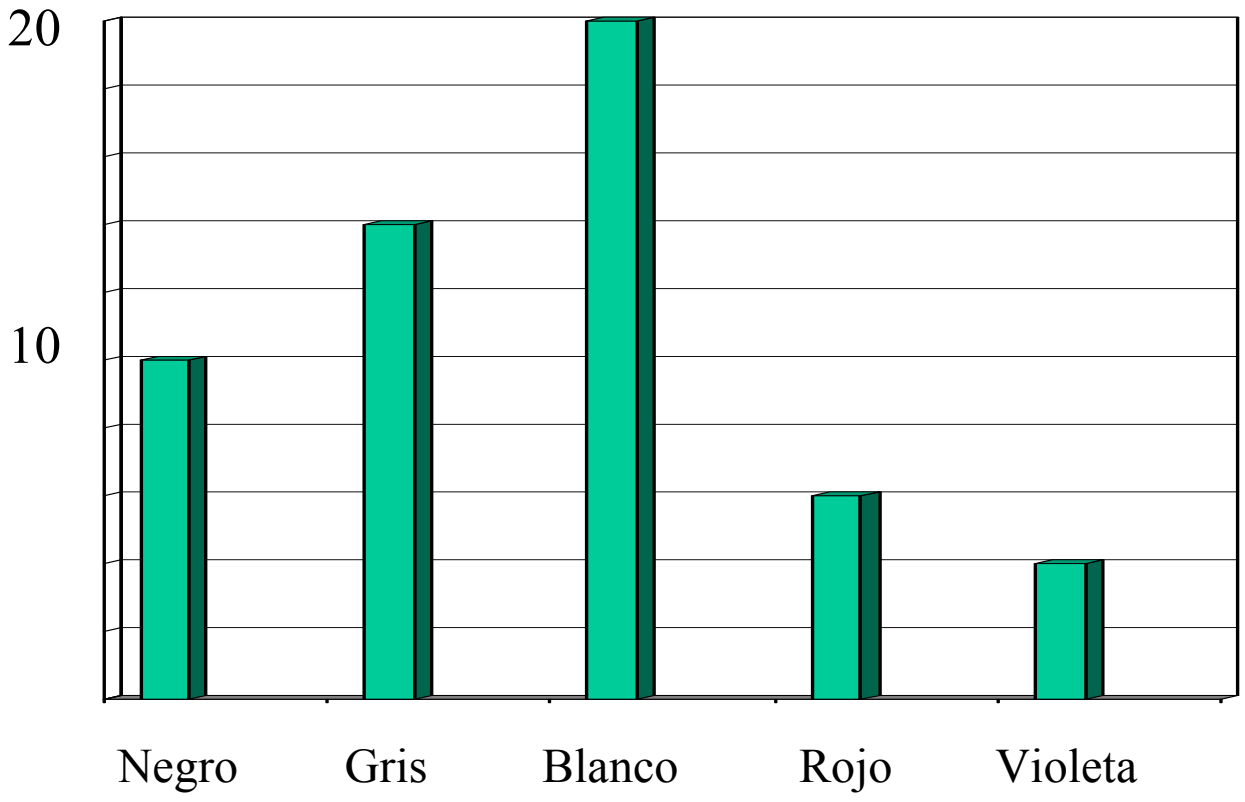
| $Intervalo\ I_i$ | $x_i$ | $n_i$ | $N_i$ | $f_i$ | $F_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $e_0 - e_1$ | $x_1$ | $n_1$ | $N_1$ | $f_1$ | $F_1$ |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| $e_{i-1} - e_i$ | $x_i$ | $n_i$ | $N_i$ | $f_i$ | $F_i$ |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| $e_{k-1} - e_k$ | $x_k$ | $n_k$ | $N_k$ | $f_k$ | $F_k$ |
| | | $n$ | | $1$ | |

- Marca de clase $x_i$ (punto medio de cada intervalo)
- Amplitud $a_i$ (distancia entre los extremos)
- Intervalos cerrados por un extremo y abiertos por otro

## ❖ Gráficos estadísticos

### ➢ V. E. Cualitativas: Gráfico rectangular

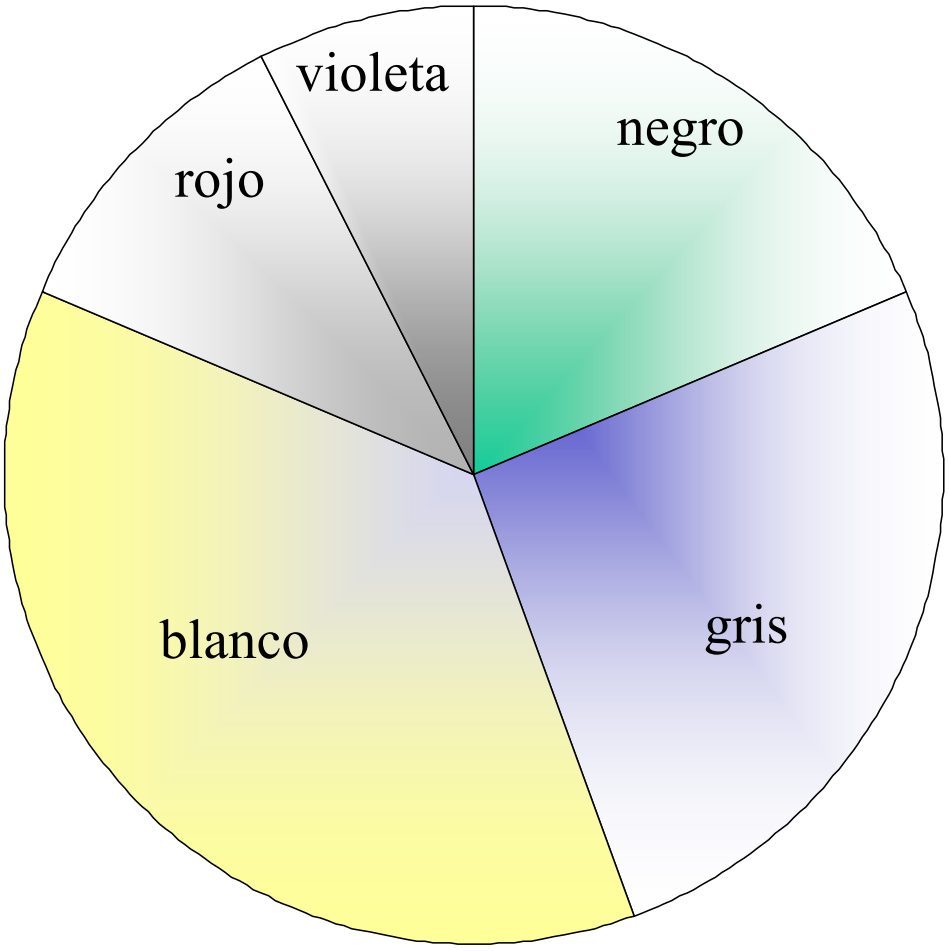
| Color Plumaje | Nº de Aves ($n_i$) |
|---|---|
| Negro | 10 |
| Gris | 14 |
| Blanco | 20 |
| Rojo | 6 |
| Violeta | 4 |
| | 54 |



## ➢ V. E. Cualitativas: Gráfico de sectores

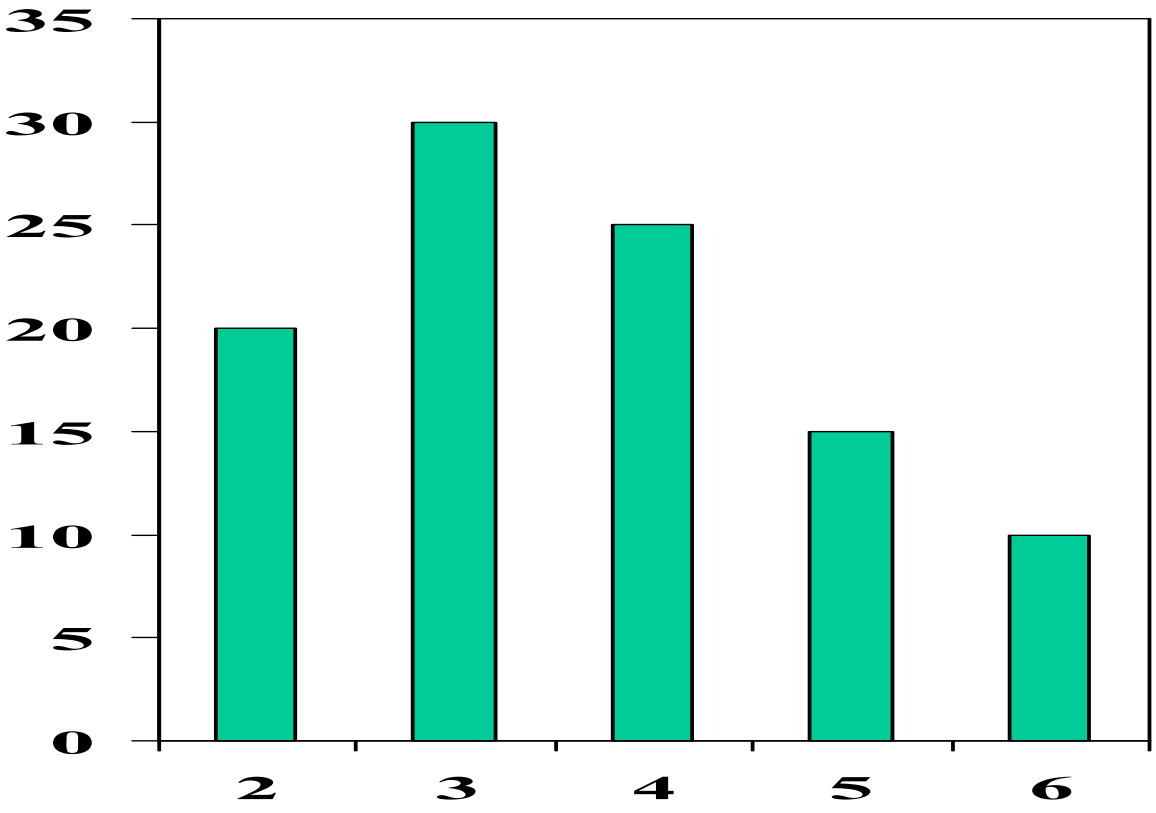
Grados de un sector = $360^0 \times f_i$

| Color Plumaje | Nº de Aves $n_i$ | $f_i$ | Grados |
|---|---|---|---|
| Negro | 10 | 0,185 | 66,6 |
| Gris | 14 | 0,259 | 93,24 |
| Blanco | 20 | 0,37 | 133,2 |
| Rojo | 6 | 0,111 | 39,96 |
| Violeta | 4 | 0,074 | 26,64 |
| | 54 | | |



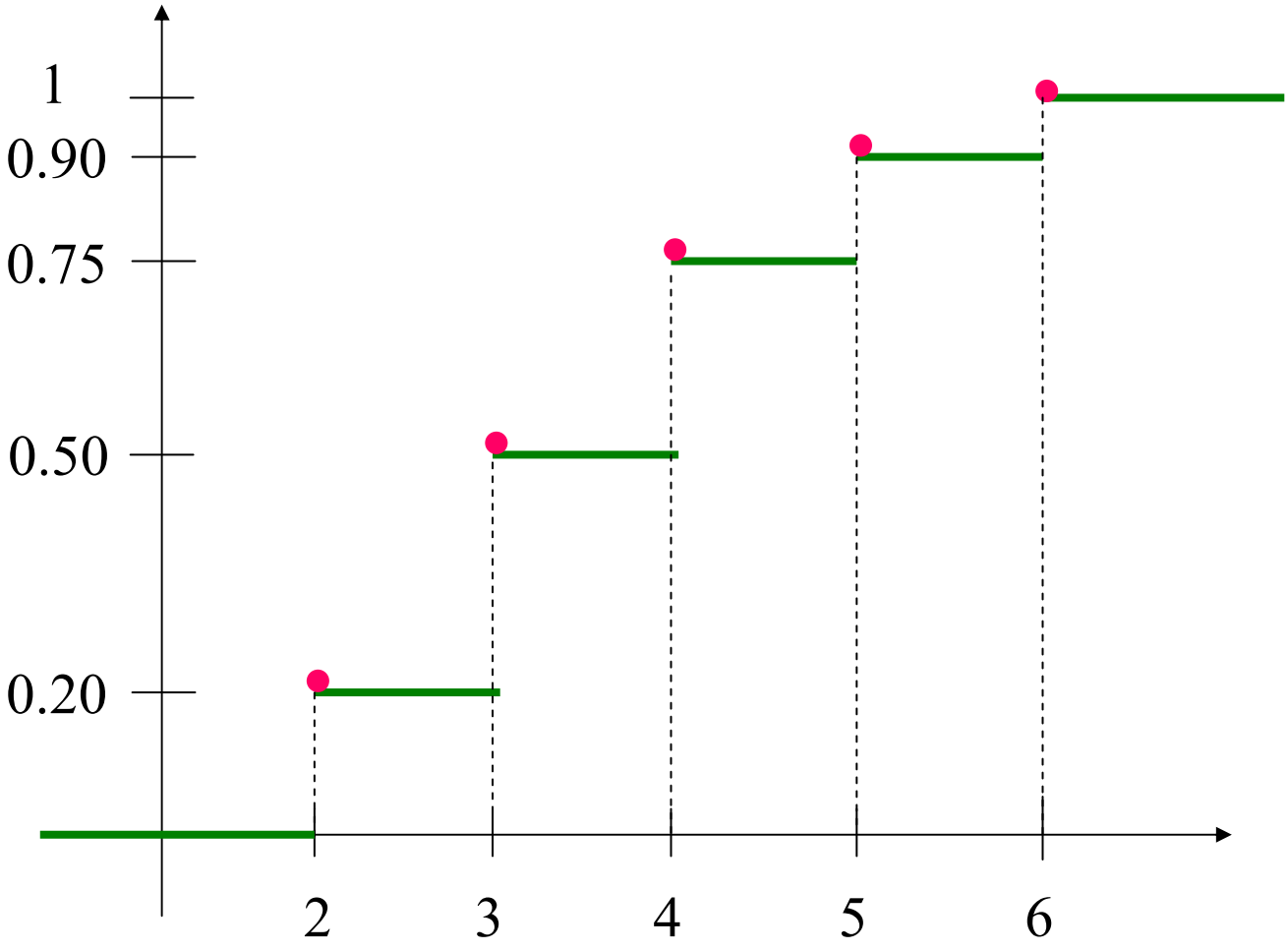
## ➢ V. E. Discretas: Gráfico de barras

| Nº de crías | Nº animales: $n_i$ | $f_i$ | $F_i$ |
|---|---|---|---|
| 2 | 20 | 0.20 | 0.20 |
| 3 | 30 | 0.30 | 0.50 |
| 4 | 25 | 0.25 | 0.75 |
| 5 | 15 | 0.15 | 0.90 |
| 6 | 10 | 0.10 | 1 |
| | $n = 100$ | | |



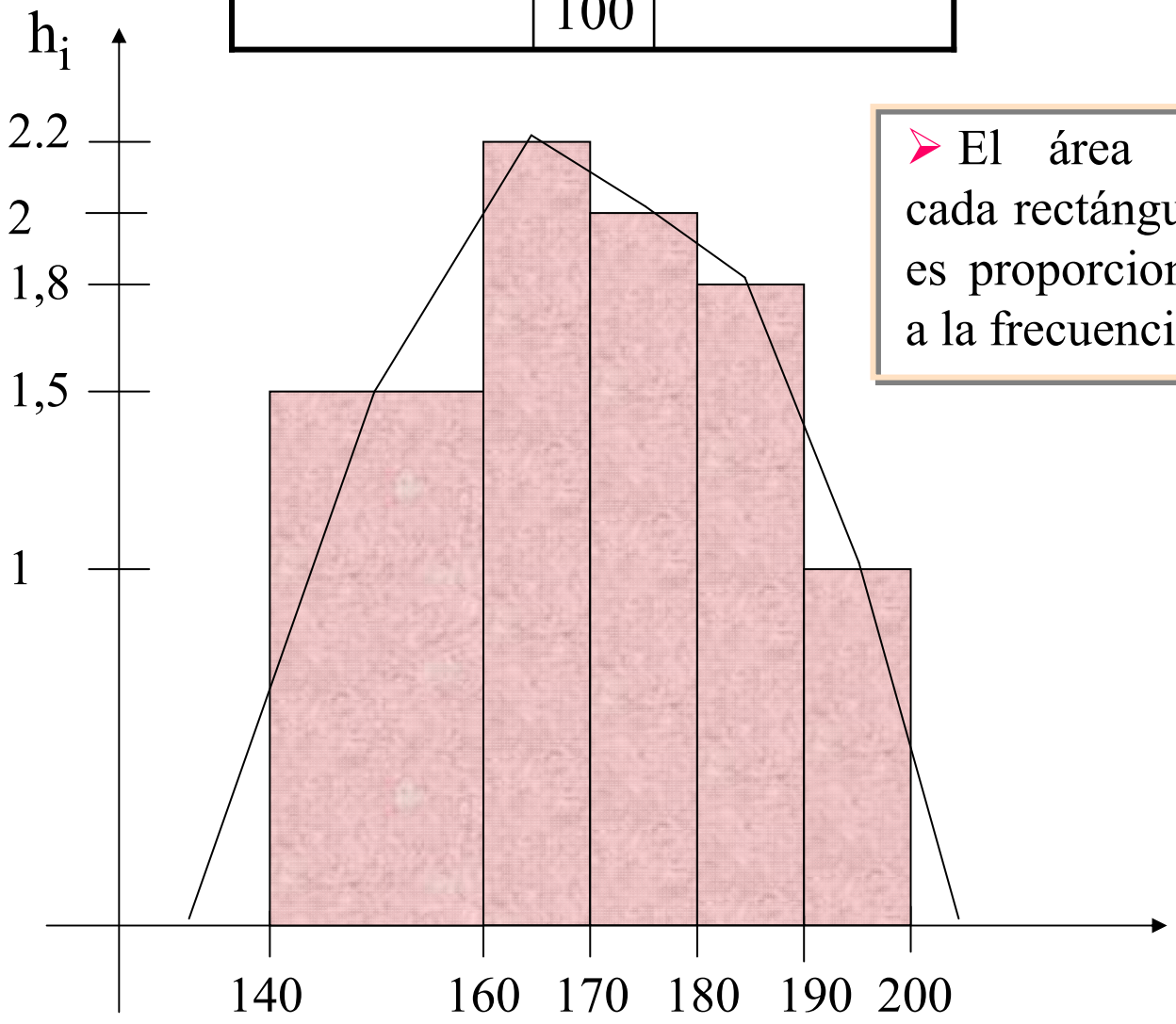
## ➢ V. E. Discretas: Curva acumulativa de distribución

| Nº de crías | Nº animales: $n_i$ | $f_i$ | $F_i$ |
|---|---|---|---|
| 2 | 20 | 0.20 | 0.20 |
| 3 | 30 | 0.30 | 0.50 |
| 4 | 25 | 0.25 | 0.75 |
| 5 | 15 | 0.15 | 0.90 |
| 6 | 10 | 0.10 | 1 |
| | $n = 100$ | | |



## ➢ V. E. Continuas: Histograma

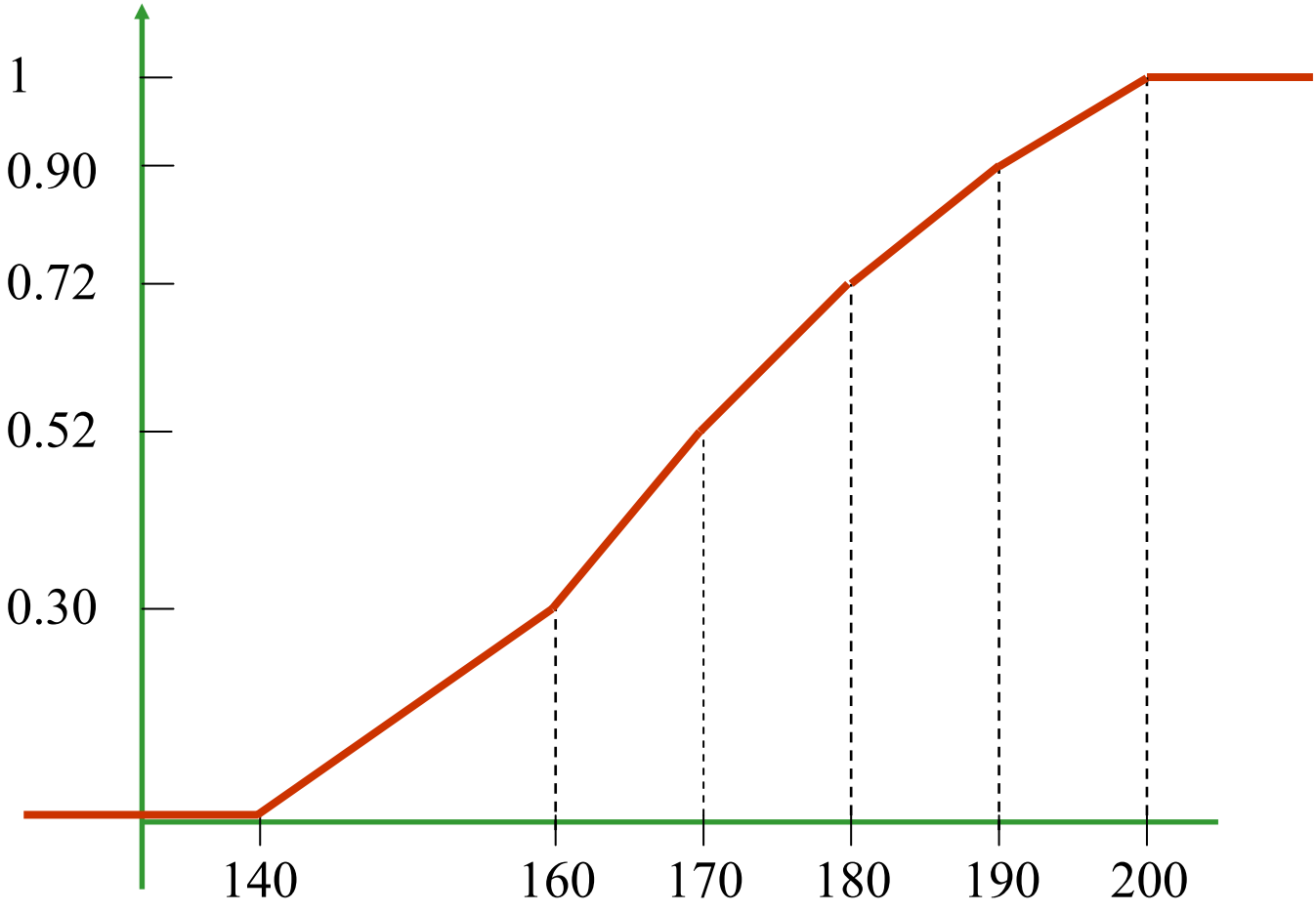
| Estatura | $n_i$ | $h_i = n_i / a_i$ |
|---|---|---|
| 140−160 | 30 | 1.5 |
| 160−170 | 22 | 2.2 |
| 170−180 | 20 | 2 |
| 180−190 | 18 | 1.8 |
| 190−200 | 10 | 1 |
| | 100 | |




➢ El área de cada rectángulo es proporcional a la frecuencia"

## ➢ V. E. Continuas: Curva acumulativa de distribución

| Estatura | $n_i$ | $f_i$ | $F_i$ |
|---|---|---|---|
| 140 – 160 | 30 | 0.30 | 0.30 |
| 160 – 170 | 22 | 0.22 | 0.52 |
| 170 – 180 | 20 | 0.20 | 0.72 |
| 180 – 190 | 18 | 0.18 | 0.90 |
| 190 – 200 | 10 | 0.10 | 1 |
| | 100 | | |



## ❖ 1.3. Características de variables estadísticas unidimensionales

### ◈ 1.3.1 Características de Posición

#### ❖ Media aritmética

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{k} f_i x_i = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i x_i}{n}$$

| Estatura | Nº Personas $n_i$ | M. Clase $x_i$ | $n_i x_i$ |
|---|---|---|---|
| 140–150 | 20 | 145 | 2900 |
| 150–160 | 100 | 155 | 15500 |
| 160–180 | 80 | 170 | 13600 |
| 180–200 | 10 | 190 | 1900 |
| | $n = 210$ | | 33900 |

$$Media: \quad \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i x_i}{n} = \frac{33900}{210} = 161.42$$

## ❖ Moda

❑ Valor de la variable más frecuente

✓ Puede haber más de una moda → Plurimodal

### ➢ Variables discretas

- Datos en serie

  2, 2, 3, 3, 3, 3, 5, 6, 7 $\quad Mo = 3$

- Datos en tabla

♦ **Ejemplo**

| $x_i$ | $n_i$ |
|---|---|
| 1 | 34 |
| 2 | 36 |
| 3 | 45 |
| 4 | 22 |
| 5 | 17 |

→ $Mo = 3$

## ➢ Variables continuas

$$Mo = e_{i-1} + \frac{h_i - h_{i-1}}{\left(h_i - h_{i-1}\right) + \left(h_i - h_{i+1}\right)} a_i$$

♦ **Ejemplo**

| $x_i$ | $n_i$ | $h_i = n_i / a_i$ |
|---|---|---|
| 140 – 160 | 30 | 1.5 |
| 160 – 170 | 22 | 2,2 |
| 170 – 180 | 20 | 2 |
| 180 – 190 | 18 | 1,8 |
| 190 – 200 | 10 | 1 |
| | 100 | |

$$Mo = 160 + \frac{(2.2 - 1.5)}{(2.2 - 1.5) + (2.2 - 2)} \times 10 = 167.777$$

➢ Observaciones:

1. Puede utilizarse la frecuencia relativa
2. Si las amplitudes son iguales, la moda se puede obtener directamente con las frecuencias

## ❖ Mediana

❑ Valor de la variable que ocupa el lugar central en una serie de datos ordenados.

▪ El 50% de los elementos de la población tienen un valor de la variable menor o igual que la mediana. El 50% de los elementos de la población tienen un valor de la variable mayor o igual que la mediana.

### ➢ Variables discretas

#### ▪ Datos en serie

- Nº impar de observaciones:

  2, 2, 2, 3, 5, 6, 7, 7, 8 → Me = 5

- Nº par de observaciones: 3, 4, 6, 6, 6, | 7, 8, 8, 9, 9

  → Me = 6 – 7  Indeterminada entre 6 y 7

| $x_i$ | $n_i$ | $N_i$ | $f_i$ | $F_i$ |
|---|---|---|---|---|
| 2 | 3 | 3 | 0,333 | 0,333 |
| 3 | 1 | 4 | 0,111 | 0,444 |
| 5 | 1 | 5 | 0,111 | 0,555 |
| 6 | 1 | 6 | 0,111 | 0,666 |
| 7 | 2 | 8 | 0,222 | 0,888 |
| 8 | 1 | 9 | 0,111 | 0,999 |
| | 9 | | 1 | |

| $x_i$ | $n_i$ | $N_i$ | $f_i$ | $F_i$ |
|---|---|---|---|---|
| 3 | 1 | 1 | 0,1 | 0,1 |
| 4 | 1 | 2 | 0,1 | 0,2 |
| 6 | 3 | 5 | 0,3 | 0,5 |
| 7 | 1 | 6 | 0,1 | 0,6 |
| 8 | 2 | 8 | 0,2 | 0,8 |
| 9 | 2 | 10 | 0,2 | 1 |
| | 10 | | 1 | |

## ➢ Variables discretas

▪ Datos en tabla

♦ **Ejemplo**

| $x_i$ | $n_i$ | $N_i$ | $f_i$ | $F_i$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 4 | 4 | 0.142 | 0.142 |
| 1 | 6 | 10 | 0.214 | 0.357 |
| 2 | 10 | 20 | 0.357 | 0.714 |
| 3 | 5 | 25 | 0.178 | 0.892 |
| 4 | 3 | 28 | 0.107 | 1 |
| | 28 | | 1 | |

$n/2 = 14$
$F_i = 0{,}5$

$Me = 2$

➢ **Observación**: Si $n/2$ coincide con un $N_i$

la mediana está indeterminada entre $x_i$ y $x_{i+1}$

## ➢ Variables continuas

$$Me = e_{i-1} + \frac{0,5 - F_{i-1}}{f_i} a_i = e_{i-1} + \frac{\frac{50}{100} n - N_{i-1}}{n_i} a_i$$

### ♦ Ejemplo

| Estatura | $n_i$ | $N_i$ | $f_i$ | $F_i$ |
|---|---|---|---|---|
| 140–150 | 15 | 15 | 0.15 | 0.15 |
| 150–160 | 30 | 45 | 0.30 | 0.45 |
| 160–170 | 25 | 70 | 0.25 | 0.70 |
| 170–180 | 20 | 90 | 0.20 | 0.90 |
| 180–200 | 10 | 100 | 0.10 | 1 |
| | 100 | | | |

$n/2 = 50$
$F_i = 0,5$

$$Me = 160 + \frac{0.5 - 0.45}{0.25} \times 10 = 160 + 2 = 162$$

➢ **Observación**: Si n/2 coincide con un $N_i$

la mediana es el extremo superior del intervalo que le corresponde

## ❖ Percentiles

❑ Definición: $P_k$, k: 1,2,...,99, "percentil k", valor de la variable que deja por debajo, el k% de los valores de la variable

$Q_1 = P_{25} \rightarrow$ Cuartil 1º
$Q_2 = P_{50} \rightarrow$ Cuartil 2º = $Me$
$Q_3 = P_{75} \rightarrow$ Cuartil 3º

$D_1 = P_{10} \rightarrow$ Decil 1º
$D_2 = P_{20} \rightarrow$ Decil 2º
....
$D_9 = P_{90} \rightarrow$ Decil 9º

■ Cálculo para v.e. discretas:

Igual que la mediana, cambiando:

$$\frac{50}{100}n \quad por \quad \frac{k}{100}n$$

■ Cálculo para v.e. continuas:

$$P_k = e_{i-1} + \frac{\frac{k}{100} - F_{i-1}}{f_i} a_i = e_{i-1} + \frac{\frac{k}{100}n - N_{i-1}}{n_i} a_i$$

## ♦ Ejemplos percentiles v.e. discreta

| $x_i$ | $n_i$ | $N_i$ |
|---|---|---|
| 2 | 20 | 20 |
| 3 | 30 | 50 |
| 4 | 44 | 94 |
| 5 | 20 | 114 |
| 6 | 10 | 124 |
| | 124 | |

$$\frac{k}{100}n = \frac{40}{100}124 = 49{,}6$$

$$\frac{k}{100}n = \frac{95}{100}124 = 117{,}8$$

Percentil 40, $P_{40} = 3$

Percentil 95, $P_{95} = 6$

$nk\ /100 = 124\text{x}25/100 = 31$ ⇒ Percentil 25, $P_{25} = 3 = Q_1$

$nk\ /100 = 124\text{x}50/100 = 62$ ⇒ Percentil 50, $P_{50} = 4 = Me = Q_2$

$nk\ /100 = 124\text{x}75/100 = 93$ ⇒ Percentil 75, $P_{75} = 4 = Q_3$

## ♦ Ejemplos percentiles v.e. continua

| Tallas | $n_i$ | $N_i$ | $f_i$ | $F_i$ |
|---|---|---|---|---|
| 140-150 | 15 | 15 | 0.15 | 0.15 |
| 150-160 | 30 | 45 | 0.30 | 0.45 |
| 160-170 | 25 | 70 | 0.25 | 0.70 |
| 170-180 | 20 | 90 | 0.20 | 0.90 |
| 180-200 | 10 | 100 | 0.10 | 1 |
| | 100 | | | |

$P_{40}$

$P_{75}$

$$P_k = e_{i-1} + \frac{\frac{k}{100} - F_{i-1}}{f_i} a_i = e_{i-1} + \frac{\frac{nk}{100} - N_{i-1}}{n_i} a_i$$

$$P_{40} = 150 + \frac{0.4 - 0.15}{0.30} \times 10 = 150 + \frac{40 - 15}{30} \times 10 = 158.33$$

$$P_{75} = 170 + \frac{0.75 - 0.70}{0.20} \times 10 = 170 + \frac{75 - 70}{20} \times 10 = 172.5 = Q_3$$

## ◈ 1.3.2. Características de Dispersión

✓ "Miden la Homogeneidad de las observaciones"

❖ Rango o recorrido

➢ Valor máximo menos valor mínimo de la variable

❖ Recorrido intercuartílico

➢ $Q_3 - Q_1$

❖ Varianza

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i \left(x_i - \bar{x}\right)^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i x_i^{\,2}}{n} - \bar{x}^2$$

❖ Desviación típica

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$$

❖ Coeficiente de variación

$$C.V. = \frac{\sigma}{\bar{x}}$$

♦ **Ejemplo**

| $x_i$ | $n_i$ | $n_i x_i$ | $n_i x_i^2$ |
|---|---|---|---|
| 4 | 20 | 80 | 320 |
| 6 | 40 | 240 | 1440 |
| 8 | 44 | 352 | 2816 |
| 10 | 36 | 360 | 3600 |
| 12 | 22 | 264 | 3168 |
| | 162 | 1296 | 11344 |

$$\sigma^2 = Var[X] = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i x_i^2}{n} - \bar{x}^2 = \frac{11344}{162} - \left(\frac{1296}{162}\right)^2 = 6.02$$

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{6.02} = 2.4535$$

## ❖ Momentos no centrales (Respecto al origen)

$$m_r = \sum_{i=1}^{k} f_i x_i^{\,r} = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i x_i^{\,r}}{n}$$

$$r = 1 \quad \rightarrow \quad m_1 = \sum_{i=1}^{k} f_i x_i = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i x_i}{n} = \bar{x}$$

$$r = 2 \quad \rightarrow \quad m_2 = \sum_{i=1}^{k} f_i x_i^{\,2} = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i x_i^{\,2}}{n}$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i x_i^{\,2}}{n} - \bar{x}^{\,2} = m_2 - \left(m_1\right)^2$$

## ❖ Momentos centrales (Respecto a la media)

$$\mu_r = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i \left( x_i - \bar{x} \right)^r}{n}$$

$$r = 1 \quad \rightarrow \quad \mu_1 = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i \left( x_i - \bar{x} \right)}{n} = 0$$

$$r = 2 \quad \rightarrow \quad \mu_2 = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i \left( x_i - \bar{x} \right)^2}{n} = \sigma^2$$

## ◈ 1.3.3 Características de forma

### ❖ Coeficiente de Sesgo (Asimetría)

$$\gamma_1 = \frac{\mu_3}{\sigma^3}$$

- $Si \quad \gamma_1 = 0 \quad \Rightarrow$ Distribución simétrica
- $Si \quad \gamma_1 > 0 \quad \Rightarrow$ Distribución sesgada a la derecha
- $Si \quad \gamma_1 < 0 \quad \Rightarrow$ Distribución sesgada a la izquierda

## ❖ Coeficiente de Curtosis (Aplastamiento)

$$\gamma_2 = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3$$

- $Si \quad \gamma_2 = 0 \quad \Rightarrow$ Distribución igual de aplastada que la distribución Normal

- $Si \quad \gamma_2 > 0 \quad \Rightarrow$ Distribución menos aplastada que la distribución Normal

- $Si \quad \gamma_2 < 0 \quad \Rightarrow$ Distribución más aplastada que la distribución Normal

## ❖ 1.4 Concepto de variable estadística bidimensional

♦ **Ejemplo. *X*: "Peso", *Y*: "Estatura"**

| *X**Y* | 140-160 | 160-180 | 180-200 | >200 | Marginal *X* |
|---|---|---|---|---|---|
| 40-60 | 10 | 6 | 2 | 0 | 18 |
| 60-80 | 8 | 12 | 6 | 2 | 28 |
| 80-100 | 1 | 8 | 10 | 6 | 25 |
| Marginal *Y* | 19 | 26 | 18 | 8 | 71 |

✓ Frecuencias Marginales
Frecuencias Marginales de *X*
Frecuencias Marginales de *Y*

✓ Frecuencias Condicionadas
Frecuencias Condicionadas de *X*
Frecuencias Condicionadas de *Y*

## ❖ 1.5 Distribuciones marginales y condicionadas

### ➢ Distribución marginal de *X*

♦ **Distribución de la variable *X*: "Peso"**

| *X* \ *Y* | 140-160 | 160-180 | 180-200 | >200 | Marginal *X* |
|---|---|---|---|---|---|
| 40-60 | 10 | 6 | 2 | 0 | 18 |
| 60-80 | 8 | 12 | 6 | 2 | 28 |
| 80-100 | 1 | 8 | 10 | 6 | 25 |
| Marginal *Y* | 19 | 26 | 18 | 8 | 71 |

## ➢ Distribución marginal de *X*

♦ **Distribución de la variable *X*: "Peso"**

| *X* | Frecuencias Marginales |
|---|---|
| 40 - 60 | 18 |
| 60 - 80 | 28 |
| 80 - 100 | 25 |
| | 71 |

✓ Media Marginal de *X*

✓ Mediana Marginal de *X*

✓ Moda Marginal de *X*

✓ Varianza Marginal de *X*

## ➢ Distribución marginal de *Y*

### ♦ Distribución de la variable *Y*: "Estatura"

| *X* \ *Y* | 140-160 | 160-180 | 180-200 | >200 | Marginal *X* |
|---|---|---|---|---|---|
| 40-60 | 10 | 6 | 2 | 0 | 18 |
| 60-80 | 8 | 12 | 6 | 2 | 28 |
| 80-100 | 1 | 8 | 10 | 6 | 25 |
| Marginal *Y* | 19 | 26 | 18 | 8 | 71 |

## ➢ Distribución marginal de *Y*

♦ **Distribución de la variable *Y*: "Estatura"**

| *Y* | Frecuencias Marginales |
|---|---|
| 140 - 160 | 19 |
| 160 - 180 | 26 |
| 180 - 200 | 18 |
| > 200 | 8 |
| | 71 |

✓ Media Marginal de *Y*

✓ Mediana Marginal de *Y*

✓ Moda Marginal de *Y*

✓ Varianza Marginal de *Y*

➢ **Distribuciones de *X* condicionadas a valores de *Y***

♦ **Ejemplo . Distribución de *X* condicionada a 160 < *Y* < 180**

| X\Y | 140-160 | 160-180 | 180-200 | >200 | Marginal X |
|---|---|---|---|---|---|
| 40-60 | 10 | 6 | 2 | 0 | 18 |
| 60-80 | 8 | 12 | 6 | 2 | 28 |
| 80-100 | 1 | 8 | 10 | 6 | 25 |
| Marginal Y | 19 | 26 | 18 | 8 | 71 |

♦ **Ejemplo . Distribución de *X* condicionada a 160 < *Y* < 180**

| *X* | Frecuencias condicionadas |
|---|---|
| 40-60 | 6 |
| 60-80 | 12 |
| 80-100 | 8 |
| | 26 |

✓ Medias condicionadas de X

✓ Varianzas condicionadas de X

## ➢ Distribuciones de *Y* condicionadas a valores de *X*

### ♦ Ejemplo . Distribución de *Y* condicionada a 60 < *X* < 80

| X\Y | 140-160 | 160-180 | 180-200 | >200 | Marginal X |
|---|---|---|---|---|---|
| 40-60 | 10 | 6 | 2 | 0 | 18 |
| 60-80 | 8 | 12 | 6 | 2 | 28 |
| 80-100 | 1 | 8 | 10 | 6 | 25 |
| Marginal Y | 19 | 26 | 18 | 8 | 71 |

♦ **Ejemplo . Distribución de $Y$ condicionada a $60 < X < 80$**

| $Y$ | Frecuencias condicionadas |
|---|---|
| 140-160 | 8 |
| 160-180 | 12 |
| 180-200 | 6 |
| > 200 | 2 |
| | 28 |

✓ Medias condicionadas de $Y$

✓ Varianzas condicionadas de $Y$

## ❖ 1.6 Covarianza

$$Cov[X,Y] = \sigma_{xy} = \frac{\sum_i \sum_j n_{ij}\left(x_i - \bar{x}\right)\left(y_j - \bar{y}\right)}{n} =$$

$$= \frac{\sum_i \sum_j n_{ij} x_i y_j}{n} - \bar{x}\,\bar{y}$$

## ❖ 1.7 Dependencia e independencia estadística

### ➢ Independencia estadística

- No hay relación entre las variables

$$\textbf{Si} \quad n_{ij} = \frac{n_{i.} n_{.j}}{n} \qquad \forall\ i, j$$

### ➢ Dependencia estadística

- Hay relación entre las variables

El grado de relación se mide mediante un coeficiente de asociación

♦ **Ejemplo. Variables $X$ e $Y$ independientes**

| $X \backslash Y$ | $Y_1$ | $Y_2$ | $Y_3$ | $Y_4$ | $n_{i\cdot}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $X_1$ | $n_{11} = 2$ | $n_{12} = 6$ | $n_{13} = 4$ | $n_{14} = 8$ | $n_{1\cdot} = 20$ |
| $X_2$ | $n_{21} = 3$ | $n_{22} = 9$ | $n_{23} = 6$ | $n_{24} = 12$ | $n_{2\cdot} = 30$ |
| $X_3$ | $n_{31} = 1$ | $n_{32} = 3$ | $n_{33} = 2$ | $n_{34} = 4$ | $n_{3\cdot} = 10$ |
| $n_{\cdot j}$ | $n_{\cdot 1} = 6$ | $n_{\cdot 2} = 18$ | $n_{\cdot 3} = 12$ | $n_{\cdot 4} = 24$ | $n = 60$ |

**Independencia estadística**

**Si** $n_{ij} = \dfrac{n_{i\cdot} n_{\cdot j}}{n} \quad \forall\, i, j$

$$n_{23} = \frac{n_{2\cdot} n_{\cdot 3}}{n} = \frac{30 \times 12}{60} = 6$$

$$n_{31} = \frac{n_{3\cdot} n_{\cdot 1}}{n} = \frac{10 \times 6}{60} = 1$$

♦ **Ejemplo. Variables *X* e *Y* no independientes**

| $X \backslash Y$ | $Y_1$ | $Y_2$ | $Y_3$ | $Y_4$ | $n_{i\cdot}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $X_1$ | $n_{11} = 3$ | $n_{12} = 6$ | $n_{13} = 4$ | $n_{14} = 8$ | $n_{1\cdot} = 21$ |
| $X_2$ | $n_{21} = 3$ | $n_{22} = 10$ | $n_{23} = 6$ | $n_{24} = 12$ | $n_{2\cdot} = 31$ |
| $X_3$ | $n_{31} = 1$ | $n_{32} = 3$ | $n_{33} = 2$ | $n_{34} = 4$ | $n_{3\cdot} = 10$ |
| $n_{\cdot j}$ | $n_{\cdot 1} = 7$ | $n_{\cdot 2} = 19$ | $n_{\cdot 3} = 12$ | $n_{\cdot 4} = 24$ | $n = 62$ |

**Independencia estadística**

**Si** $n_{ij} = \dfrac{n_{i\cdot} n_{\cdot j}}{n} \quad \forall\, i, j$

$$n_{23} = \frac{n_{2\cdot} n_{\cdot 3}}{n} = \frac{31 \times 12}{62} = 6$$

$$n_{31} \neq \frac{n_{3\cdot} n_{\cdot 1}}{n} = \frac{10 \times 7}{62} = 1.129 \neq 1$$

## ♦ Ejemplo. Dependencia Funcional

❖ .- Dadas las siguientes distribuciones bidimensionales:

1. ¿Son independientes las variables $X$ e $Y$?
2. ¿Dependen funcionalmente las variables $X$ e $Y$?

a.

| $X \setminus Y$ | 10 | 15 | 20 |
|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 3 | 0 |
| 2 | 1 | 0 | 0 |
| 3 | 0 | 0 | 5 |
| 4 | 0 | 1 | 0 |

b.

| $X \setminus Y$ | 10 | 15 | 20 | 25 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 3 | 0 | 4 |
| 2 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 3 | 2 | 0 | 0 | 0 |

c.

| $X \setminus Y$ | 10 | 15 | 20 |
|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 5 | 0 |
| 2 | 3 | 0 | 0 |
| 3 | 0 | 0 | 2 |

d.

| $X \setminus Y$ | 10 | 15 | 20 |
|---|---|---|---|
| 1 | 3 | 2 | 0 |
| 2 | 1 | 0 | 2 |
| 3 | 0 | 1 | 1 |

1. ¿Son independientes las variables $X$ e $Y$?

a.

| $X \setminus Y$ | 10 | 15 | 20 | Marginal $X$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 3 | 0 | 3 |
| 2 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 3 | 0 | 0 | 5 | 5 |
| 4 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| Marginal $Y$ | 1 | 4 | 5 | 10 |

$$n_{12} \neq \frac{n_{1.} n_{.2}}{n} = \frac{3 \times 4}{10} = 1.2 \neq 3$$ ⇨

Las variables $X$ e $Y$ no son independientes

b.

| $X \setminus Y$ | 10 | 15 | 20 | 25 | Marginal $X$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 3 | 0 | 4 | 7 |
| 2 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 3 | 2 | 0 | 0 | 0 | 2 |
| Marginal $Y$ | 2 | 3 | 1 | 4 | 10 |

$$n_{23} \neq \frac{n_{2.} n_{.3}}{n} = \frac{1 \times 1}{10} = 0.1 \neq 1$$ ⇨

Las variables X e Y no son independientes

1. ¿Son independientes las variables $X$ e $Y$?

c.

| $X \setminus Y$ | 10 | 15 | 20 | Marginal $X$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 5 | 0 | 5 |
| 2 | 3 | 0 | 0 | 3 |
| 3 | 0 | 0 | 2 | 2 |
| Marginal $Y$ | 3 | 5 | 2 | 10 |

$$n_{11} \neq \frac{n_{1.} n_{.1}}{n} = \frac{5 \times 3}{10} = 1.5 \neq 0 \Rightarrow$$

Las variables $X$ e $Y$ no son independientes

d.

| $X \setminus Y$ | 10 | 15 | 20 | Marginal $X$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 3 | 2 | 0 | 5 |
| 2 | 1 | 0 | 2 | 3 |
| 3 | 0 | 1 | 1 | 2 |
| Marginal $Y$ | 4 | 3 | 3 | 10 |

$$n_{21} \neq \frac{n_{2.} n_{.1}}{n} = \frac{3 \times 4}{10} = 1.2 \neq 1 \Rightarrow$$

Las variables $X$ e $Y$ no son independientes

2. ¿Dependen funcionalmente las variables *X* e *Y*?

a.

| *X* \ *Y* | 10 | 15 | 20 |
|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 3 | 0 |
| 2 | 1 | 0 | 0 |
| 3 | 0 | 0 | 5 |
| 4 | 0 | 1 | 0 |

*Y* Depende funcionalmente de *X*

*X* No Depende funcionalmente de *Y*

b.

| X \ Y | 10 | 15 | 20 | 25 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 3 | 0 | 4 |
| 2 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 3 | 2 | 0 | 0 | 0 |

*Y* No Depende funcionalmente de *X*

*X* Depende funcionalmente de *Y*

2. ¿Dependen funcionalmente las variables $X$ *e* $Y$?

c.

| $X \setminus Y$ | 10 | 15 | 20 |
|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 5 | 0 |
| 2 | 3 | 0 | 0 |
| 3 | 0 | 0 | 2 |

$X$ Depende funcionalmente de $Y$

$Y$ Depende funcionalmente de $X$

d.

| $X \setminus Y$ | 10 | 15 | 20 |
|---|---|---|---|
| 1 | 3 | 2 | 0 |
| 2 | 1 | 0 | 2 |
| 3 | 0 | 1 | 1 |

$X$ No Depende funcionalmente de $Y$

$Y$ No Depende funcionalmente de $X$

## ❖ 1.8 Regresión y correlación
## Introducción

### ❖ Regresión

➢ Búsqueda de una función que relacione ambas variables y sirva para predecir una variable a partir de la otra

$$y = f(x)$$

### ❖ Correlación

➢ Estudio del nivel de relación entre las variables

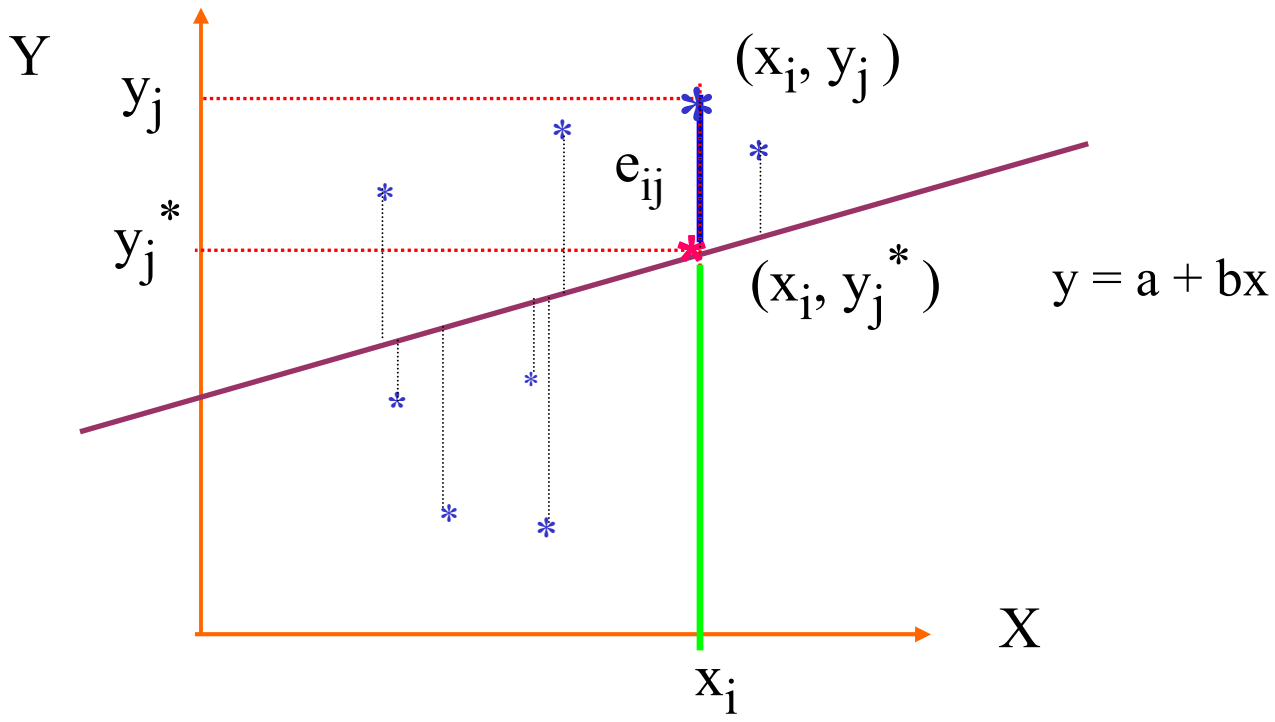
✓ Nube de puntos (diagrama de dispersión): gráfico de las observaciones (datos bidimensionales)

✓ Línea o función de regresión: tipo de función que mejor se ajuste a la nube de puntos:

◈ Lineal ; Cuadrática; Exponencial…

## ❖ 1.9 Rectas de regresión

### ❖ Recta de mínimos cuadrados de Y / X




**Residuos** $= e_{ij} = y_j - y_j^* = y_j - (a + bx_i)$

$$\min \sum_i \sum_j e_{ij}^2 = \min \sum_i \sum_j \left(y_j - y_j^*\right)^2 =$$

$$= \min \sum_i \sum_j \left(y_j - (a + bx_i)\right)^2 \Rightarrow$$

Ecuaciones normales

## ❖ Recta de mínimos cuadrados de $Y/X$

$$y = f(x) = a + b\,x$$

$$b = \frac{Cov[X,Y]}{Var[X]} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x{}^2} = \frac{\dfrac{\sum n_i x_i y_i}{n} - \overline{x}\,\overline{y}}{\dfrac{\sum n_i x_i{}^2}{n} - \overline{x}^2}$$

$$a = \overline{y} - b\overline{x}$$

$$y - \overline{y} = b\left(x - \overline{x}\right)$$

b = coeficiente de regresión de $Y/X$

"Variación de $Y$ si $X$ aumenta en una unidad"

## ❖ Recta de mínimos cuadrados de $X / Y$

$$x = f(y) = c + dy$$

$$d = \frac{Cov[X,Y]}{Var[Y]} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_y{}^2} = \frac{\dfrac{\sum n_i x_i y_i}{n} - \overline{xy}}{\dfrac{\sum n_i y_i{}^2}{n} - \overline{y}^2}$$

$$c = \overline{x} - d\,\overline{y}$$

$$x - \overline{x} = d\left(y - \overline{y}\right)$$

d = coeficiente de regresión de $X / Y$

"Variación de $X$ si $Y$ aumenta en una unidad"

## ❖ 1.10 Coeficiente de determinación y coeficiente de correlación lineal

### ❖ Coeficiente de determinación lineal

➢ "Proporción de la varianza explicada por la regresión"

$$r^2 = \frac{\sigma_{xy}^2}{\sigma_x^2 \sigma_y^2} \; ; \quad 0 \le r^2 \le 1$$

### ❖ Coeficiente de correlación lineal de Pearson

$$r = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} \; ; \quad -1 \le r \le 1$$

$r = 0 \Leftrightarrow$ *Independencia*

$r > 0 \Leftrightarrow$ *Dependencia directa*

$r < 0 \Leftrightarrow$ *Dependencia inversa*

$r = \pm 1 \Leftrightarrow$ *Dependencia funcional lineal*

♦ **Ejemplo.** ***X*= "Estatura", *Y*= "Peso"**

| $x_i$ | $y_i$ | $x_i y_i$ | $x_i^2$ | $y_i^2$ |
|---|---|---|---|---|
| 160 | 52 | 8320 | 25600 | 2704 |
| 172 | 64 | 11008 | 29584 | 4096 |
| 174 | 65 | 11310 | 30276 | 4225 |
| 176 | 72 | 12672 | 30976 | 5184 |
| 180 | 78 | 14040 | 32400 | 6084 |
| $\Sigma$=862 | $\Sigma$= 331 | $\Sigma$ = 57350 | $\Sigma$ = 148836 | $\Sigma$= 22293 |

$$\bar{x} = \frac{862}{5} = 172.4 \; ; \quad \bar{y} = \frac{331}{5} = 66.2$$

$$\sigma_{xy} = \frac{\sum n_i x_i y_i}{n} - \bar{x}\bar{y} = \frac{57350}{5} - 172.4 \times 66.2 = 57.12$$

$$\sigma_x^2 = \frac{\sum n_i x_i^2}{n} - \bar{x}^2 = \frac{148836}{5} - 172.4^2 = 45.44$$

$$\sigma_y^2 = \frac{\sum n_i y_i^2}{n} - \bar{y}^2 = \frac{22293}{5} - 66.2^2 = 76.16$$

$$y = a + bx$$

$$b = \frac{Cov[X,Y]}{Var[X]} = \frac{\sigma_{xy}}{{\sigma_x}^2} = \frac{57.12}{45.44} = 1.257$$

$$a = \bar{y} - b\bar{x} = 66.2 - 1.257 \times 172.4 = -150.5068$$

$$y = a + b\,x = -150.5068 + 1.257\,x$$

$$Para \;\; x = 170 \;\; \Rightarrow$$

$$y = a + bx = -150.5068 + 1.257 \times 170 = 63.1832$$

$$r = \frac{\sigma_{x\,y}}{\sigma_x\,\sigma_y} = \frac{57.12}{\sqrt{45.44}\;\;\sqrt{76.16}} = 0.9710$$

## ❖ 1.11 Otros tipos de ajuste

- **Parabólico** $y = ax^2 + bx + c$
- **Exponencial** $y = a\,b^x$
- **Potencial** $y = a\,x^b$
- **Hiperbólico** $y = \frac{a}{x}$