

## XIII JORNADAS EN ÁLGEBRA NO CONMUTATIVA

### PROGRAMA

#### ***Jueves 9 de Junio***

*[9:20-9:30] Presentación de las Jornadas.*

1. [9:30-10:05] Juan Ramón García Rozas. Universidad de Almería.  
*On Gorenstein global dimension relative to a weakly Wakamatsu tilting module.*

2. [10:10-10:45] Laura Martín Valverde. Universidad de Almería.  
*Nuevos ejemplos de álgebras de Hopf con integral.*

3. [10:50-11:25] Juan Cuadra Díaz. Universidad de Almería.  
*Órdenes débiles y la sexta conjetura de Kaplansky.*

*[11:25-11:55] Café.*

4. [12:00-12:40] María José Souto Salorio. Universidad de A Coruña.  
*Morfismos irreducibles entre complejos de ancho fijo.*

5. [12:45-13:20] Ramón González Rodríguez. Universidad de Vigo.  
*Equivalencias de productos cruzados débiles.*

6. [13:25-14:00] Alejandra Sarina Córdova Martínez. Universidad de Zaragoza.  
*Graduaciones en el producto tensorial de álgebras de composición.*

#### **[14:00-16:00] COMIDA**

7. [16:00-16:35] Miguel Ángel Gómez Lozano. Universidad de Málaga.  
*Álgebras de Jordan asociadas a elementos nilpotentes de un álgebra asociativa semiprima con o sin involución.*

8. [16:40-17:15] Esther García González. Universidad Rey Juan Carlos.  
*Elementos adnilpotentes en anillos semiprimos.*

[17:15-17:40] *Café*

9. [17:45-18:20] José Ramón Brox López. Universidad de Málaga.  
*Elementos adnilpotentes antisimétricos de un anillo semiprimo con involución.*

10. [18:25-19:00] María de los Ángeles Moreno Frías. Universidad de Cádiz.  
*Distancias mínimas y submonoides cerrados por división.*

### ***Viernes 10 de Junio***

11. [9:30-10:05] Luis M. Merino González. Universidad de Granada.  
*Submódulos distributivos.*

12. [10:10-10:45] Pascual Jara Martínez. Universidad de Granada.  
*Submódulos distributivos sobre anillos conmutativos.*

13. [10:50-11:25] Gabriel Navarro. Universidad de Granada.  
*Constructing and decoding a class of convolutional codes.*

[10:25-11:55] *Café.*

14. [12:00-12:35] Antonio Jesús Calderón Martín. Universidad de Cádiz.  
*Módulos sobre espacios vectoriales que admiten bases multiplicativas.*

15. [12:40-13:15] José María Sánchez Delgado. Centro de Matemática da Universidade de Coimbra.  
*An introduction on quasicrossed products.*

16. [13:20-13:55] Bartolomé López Jiménez. Universidad de Cádiz.  
*Desarrollos de Fourier para formas modulares de Drinfeld.*

[13:55-14:00] *Cierre de las Jornadas.*

## 1. Elementos adnilpotentes antisimétricos de un anillo semiprimo con involución

Jose Ramón Brox López. Universidad de Málaga.

**Abstract:** Continuamos con la descripción, iniciada en la charla anterior (*Elementos adnilpotentes en anillos semiprimos*), de los elementos adnilpotentes en función de elementos nilpotentes y elementos del centroide extendido. En esta charla nos centraremos en el anillo Lie  $K$  de los elementos antisimétricos de un anillo semiprimo  $R$  con involución, generalizando el trabajo [1] de Martindale y Miers. Mientras que en  $R$  todos los elementos adnilpotentes tienen índice de adnilpotencia impar, en  $K$  los adnilpotentes se distinguen por el residuo de su índice módulo 4, pudiendo ser adnilpotentes de todo  $R$  (con  $n \equiv 1, 3 \pmod{4}$ ) o elementos nilpotentes de índice de nilpotencia par que generan una GPI (con  $n \equiv 0, 3 \pmod{4}$ ), siendo  $n \equiv 2 \pmod{4}$  el residuo prohibido en este contexto. Analizaremos las propiedades de cada tipo de adnilpotente, mostraremos qué relaciones existen entre ellos y construiremos ejemplos matriciales.

### REFERENCIAS

[1] W.S. Martindale 3<sup>rd</sup> and C.R. Miers. *Nilpotent inner derivations of the skew elements of prime rings with involution*. Can. J. Math. **43** (1991), 1045–1054.

[2] J. Brox, E. García and M. Gómez Lozano. *A characterization of adnilpotent elements in semiprime rings*. (Preprint)

---

## 2. Módulos sobre espacios vectoriales que admiten bases multiplicativas

Antonio Jesús Calderón Martín. Universidad de Cádiz.

**Abstract:** Sean  $V$  y  $W$  dos espacios vectoriales sobre un mismo cuerpo base  $\mathbb{F}$ . Se dice que  $V$  es un módulo sobre  $W$  si está dotado con una aplicación bilineal  $V \times W \rightarrow V$ ,  $(v, w) \mapsto vw$ . Una base  $\mathcal{B} = \{v_i\}_{i \in I}$  de  $V$  se dice multiplicativa respecto de una base  $\mathcal{B}' = \{w_j\}_{j \in J}$  de  $W$  si para cada  $i \in$

$I, j \in J$  tenemos que o bien  $v_i w_j = 0$  ó  $0 \neq v_i w_j \in \mathbb{F}v_k$  para algún  $k \in I$ . En la presente charla probaremos que si  $V$  admite una base multiplicativa en el sentido anterior, entonces descompone como la suma directa  $V = \bigoplus_{\alpha} V_{\alpha}$  de submódulos bien determinados, admitiendo cada uno de ellos una base multiplicativa. También, bajo una cierta condición, la minimalidad de  $V$  se caracterizará en términos de la base multiplicativa. Algunas aplicaciones a la teoría de estructura de álgebras, pares algebraicos y módulos sobre álgebras, con bases multiplicativas serán también mostradas.

---

### 3. Graduaciones en el producto tensorial de álgebras de composición

**Alejandra Sarina Córdova Martínez. Universidad de Zaragoza.**

**Abstract:** Daremos una introducción a las graduaciones, así como a las álgebras de composición. Después nos centraremos en un tipo particular de álgebras simples formado por el producto tensorial de álgebras de composición y veremos las posibles graduaciones en ellas.

---

### 4. Órdenes débiles y la sexta conjetura de Kaplansky

**Juan Cuadra Díaz. Universidad de Almería.**

**Abstract:** Un conocido resultado de Frobenius afirma que la dimensión de toda representación compleja e irreducible de un grupo finito  $G$  divide al orden de  $G$ . Todas sus demostraciones se basan en que el álgebra de grupo  $\mathbb{C}G$  está definida sobre  $\mathbb{Z}$  como álgebra de Hopf; en otros términos, en que  $\mathbb{Z}G$  es un orden de Hopf de  $\mathbb{C}G$ .

La sexta conjetura de Kaplansky predice que este resultado es válido para álgebras de Hopf complejas y semisimples. Como en el caso de grupos, Larson probó en [2] que la conjetura es cierta si toda álgebra de Hopf compleja y semisimple admite un orden de Hopf sobre un anillo de números. Sin embargo, la situación resulta ser diferente para álgebras de Hopf: en [1] damos ejemplos

que cumplen la conjetura pero que no admiten órdenes de Hopf sobre ningún anillo de números.

Por otro lado, Lorenz [3] y Rumynin [4] notaron que la hipótesis del resultado de Larson puede debilitarse. Sea  $H$  un álgebra de Hopf compleja y semisimple. Sea  $\Lambda \in H$  una integral tal que  $\varepsilon(\Lambda) = \dim H$ . Supongamos que  $H$  admite un orden de Hopf  $X$  sobre un anillo de números  $R$ . La clave de la demostración radica en el elemento Casimir  $C := \Lambda_{(1)} \otimes S(\Lambda_{(2)}) \in H \otimes_{\mathbb{C}} H$ . Las propiedades de  $X$  aseguran que  $C \in X \otimes_R X$ . Ellos observan que basta exigir que  $X$  sea un orden de  $H$ , sólo como álgebra, y que  $C \in X \otimes_R X$ . A esto lo llaman orden débil sobre  $R$ .

En esta charla mostraremos que la admisión de un orden débil sobre un anillo de números es equivalente a la sexta conjetura de Kaplansky. Este resultado es parte del trabajo [1], realizado en colaboración con Ehud Meir (Universidad de Hamburgo).

### Bibliografía

- [1] J. Cuadra y E. Meir, *On the existence of orders in semisimple Hopf algebras*. Trans. Amer. Math. Soc. 368 (2016), 2547-2562.
- [2] R. G. Larson, *Orders in Hopf algebras*. J. Algebra 22 (1972), 201-210.
- [3] M. Lorenz, *Some applications of Frobenius algebras to Hopf algebras*. Groups, algebras and applications, 269-289. Contemp. Math. 537. Amer. Math. Soc., 2011.
- [4] D. Rumynin, *Weak integral forms and the sixth Kaplansky conjecture*. Notas no publicadas, 1998.

---

## 5. Elementos adnilpotentes en anillos semiprimos.

**Esther García González. Universidad Rey Juan Carlos.**

**Abstract:** Continuando los trabajos de Herstein para el caso simple [1], y Martindale y Miers para el caso primo [2], en este trabajo describimos los

elementos de un anillo semiprimo centralmente cerrado que dan lugar lugar a derivaciones nilpotentes. En concreto, bajo las hipótesis de torsión adecuadas, demostramos que si  $a$  es un elemento de un anillo semiprimo centralmente cerrado  $R$  con  $\text{ad}_a^n = 0$ , entonces  $n$  es impar y existe un elemento  $\lambda$  en el centroide extendido de  $R$  tal que  $a - \lambda$  es nilpotente de índice  $\frac{n+1}{2}$ .

REFERENCIAS:

- [1] I.N. Herstein. "Sui commutatori degli anelli semplici", *Rendiconti del Seminario Matematico e Fisico di Milano* (**33**) (1963), 80–86.  
 [2] W.S. Martindale, C.R. Miers "On the iterates of derivations of prime rings", *Pacific Journal of Mathematics* (**104**) (1983), 179–190.
- 

## 6. On Gorenstein global dimension relative to a weakly Wakamatsu tilting module.

**Juan Ramón García Rozas. Universidad de Almería.**

**Abstract:** (This work has been made jointly with Driss Bennis and Luis Oyonarte)

The study of  $G_C$ -projective,  $G_C$ -injective and their homological dimensions is an stimulating branch of the relative homological algebra that authors as D. White, P., Z. Huang, P. Jørgensen, N. Ding, H. Holm and others paid considerable attention. The theory has been developed mainly for commutative rings  $R$  with a semidualizing module  $C$ , but recently some progress has been made in this area by the authors of the current paper when the ring  $R$  is possibly noncommutative and  $C$  is a weakly Wakamatsu tilting module (see [1], [2]), and this allows the extension of the theory to a wider variety of situations. In this paper we focus on the relative Gorenstein global dimension, an aspect treated before by Emmanouil in [4, Section 4] for general Gorenstein projective and injective modules and also by G. Zhao and J. Sun [6], who studied Gorenstein global injective and projective dimensions relative to a semidualizing module for commutative rings. As in our preceding papers, we will consider  $R$  an arbitrary ring and define its  $G_C$ -projective global dimension ( $G_U$ -injective global dimension) when  ${}_R C$  is a weakly Wakamatsu tilting module or ( $U$  a weakly cotilting module). Our objective will be to prove that the finiteness of the  $G_C$ -projective ( $G_U$ -injective) global dimension of the

ring depends only on the finiteness of the injective (projective) dimension of the modules in  $Add(C)$  ( $Prod(U)$ ) and the  $\mathbb{P}_C$ -projective ( $\mathbb{I}_U$ -injective) dimension of the injective (projective) modules. As an application, letting  $C^\vee = \text{Hom}_R(C, E)$  ( $E$  is an injective cogenerator in  $R\text{-Mod}$ ), we relate the injective dimension of an  $R$ -module  $M$  with the  $\mathbb{I}_{C^\vee}$ -injective dimension of the  $S$ -module  $\text{Hom}_R(C, M)$  ( $S = \text{End}_R(C)$ ), and the  $\mathbb{I}_{C^\vee}$ -injective dimension of an  $S$ -module  $N$  with the injective dimension of the  $R$ -module  $C \otimes_S N$ . This leads us to prove that, under certain circumstances, the  $G_C$ -projective global dimension of  $R$  coincides with the  $G_{C^\vee}$ -injective global dimension of  $\text{End}_R(C)$ .

A natural question arises in this situation: what is the connection between the  $G_C$ -projective global dimension of a ring  $R$  and the left Gorenstein global dimension of the endomorphisms ring  $\text{End}_R(C)$ ? We prove that, under certain conditions on  $C$ , if the class of all  $C$ -Gorenstein projective modules is contained in the Bass class associated to  $C$ , then these two dimensions coincide. And a similar result can be proved with the corresponding injective dimensions.

Another consequence is that when under certain restrictions on  $C$ , the  $G_C$ -projective global dimension of  ${}_R R$  is finite if and only if the  $G_{\text{Hom}(C, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})}$ -injective global dimension of  $R_R$  is finite.

## Referencias

- [1] D. Bennis, J.R. García Rozas and L. Oyonarte, Relative Gorenstein dimensions, *Mediterr. J. Math.* DOI 10.1007/s00009-014-0489-8. (2014).
- [2] D. Bennis, J.R. García Rozas and L. Oyonarte, Relative projective and injective dimensions, *to appear in Comm. in Algebra.*
- [3] D. Bennis, J.R. García Rozas and L. Oyonarte, When do Foxby classes coincide with modules of finite Gorenstein dimension?. *to appear in Kyoto J. Math*
- [4] I. Emmanouil, On the finiteness of Gorenstein homological dimensions, *J. Algebra* **372** (2012) 376–396.
- [5] H. Holm and P. Jørgensen, Semi-dualizing modules and related Gorenstein homological dimensions, *J. Pure Appl. Algebra* **205** (2006) 423–445.
- [6] G. Zhao and J. Sun, Global dimensions of rings with respect to a semi-dualizing module. *Preprint* arXiv:1307.0628.

---

## 7. Álgebras de Jordan asociadas a elementos nilpotentes de un álgebra asociativa semiprima con o sin involución.

Miguel Ángel Gómez Lozano. Universidad de Málaga.

**Abstract:** En [1] los autores asocian a cada elemento  $x$ , ad-nilpotente de índice 3 de un álgebra de Lie  $L$ , un álgebra de Jordan denotada por  $L_x$ . En [2] y [3] se caracterizan los elementos ad-nilpotentes de índice 3 para las álgebras de Lie  $R^-$  (resp.  $\text{Skew}(R, *)$ ) para  $R$  un anillo asociativo semiprimo (resp. un anillo asociativo semiprimo con involución  $*$ ). Esto nos permite determinar cómo son las álgebras de Jordan asociadas a elementos ad-nilpotentes de índice 3 en estas dos álgebras de Lie, demostrando que, o son los elementos simétricos de cierta álgebra asociativa con involución, o que cierta extensión suya es un álgebra de Clifford.

### REFERENCIAS:

[1] A. Fernández López, E. García, M. Gómez Lozano "The Jordan algebras of a Lie algebra", *Journal of Algebra* (**308**) (2007), 164–177.

[2] J. Brox, E. García, M. Gómez Lozano "Jordan algebras at Jordan elements of semiprime rings with involution", (*submitted*).

[3] J. Brox, E. García, M. Gómez Lozano "A characterization of ad-nilpotent elements in semiprime rings", (*work in progress*).

---

## 8. Equivalencias de productos cruzados débiles.

Ramón González Rodríguez. Universidad de Vigo.

**Abstract:** Sea  $\mathcal{C}$  una categoría monoidal estricta donde todo morfismo idempotente rompe. Para un monoide  $A$  y un objeto cualquiera  $V$  de  $\mathcal{C}$ , en [2]

se dotó al objeto  $A \otimes V$  de un producto asociativo, llamado producto cruzado débil. Este producto está asociado a una cuádrupla  $(A, V, \psi_V^A, \sigma_V^A)$ , donde  $\psi_V^A : V \otimes A \rightarrow A \otimes V$  y  $\sigma_V^A : V \otimes V \rightarrow A \otimes V$  son morfismos en  $\mathcal{C}$  satisfaciendo una serie de condiciones. Por otro lado, la cuádrupla  $(A, V, \psi_V^A, \sigma_V^A)$  define un morfismo idempotente  $\nabla_{A \otimes V} : A \otimes V \rightarrow A \otimes V$  cuya imagen, denotada por  $A \times V$ , hereda el producto asociativo definido en  $A \otimes V$ . Usando la noción de preunidad, también es posible encontrar las condiciones necesarias y suficientes bajo las cuales  $A \times V$  se convierte en un monoide.

Siguiendo [3], en esta charla se introducirá un criterio simple para caracterizar la equivalencia de dos productos cruzados débiles y se probará que ciertos resultados de la literatura, como, por ejemplo, los obtenidos por Panaite en [4] para los productos cruzados introducidos por Brzeziński en [1], admiten una substancial mejora. Finalmente, veremos la interpretación del criterio mencionado anteriormente en el contexto de productos cruzados asociados a álgebras de Hopf débiles y ciertas equivalencias a las que da lugar.

## Referencias

- [1] T. Brzeziński, Crossed products by a coalgebra, *Comm. in Algebra* 25 (1997), 3551–3575.
- [2] J.M. Fernández Vilaboa, R. González Rodríguez, A.B. Rodríguez Raposo, Preunits and weak crossed products, *J. of Pure Appl. Algebra* 213 (2009) 2244–2261.
- [3] J.M. Fernández Vilaboa, R. González Rodríguez, A.B. Rodríguez Raposo, Equivalences for weak crossed products, *Comm. in Algebra* (2016) (preliminary version arXiv:1505.055329)
- [4] F. Panaite, Equivalent crossed products and cross product bialgebras, *Commun. Algebr.* 42 (2014), 1937–1952.

## 9. Submódulos distributivos sobre anillos conmutativos.

**Pascual Jara Martínez. Universidad de Granada**

**Abstract:** (Trabajo conjunto con J. M. García y E. Santos. Research partially supported by grant MTM2013-41992-P from MINECO and FEDER.)

Recientemente se ha estudiado la descomposición reticular de módulos, esto es, descomposiciones en suma directa  $M = M_1 \oplus M_2$  tales que  $\mathcal{L}(M) \cong \mathcal{L}(M_1) \times \mathcal{L}(M_2)$ . Cuando  $M$  es un módulo sobre un anillo conmutativo, cada descomposición reticular produce una partición del soporte de  $M$  en la forma  $\text{Supp}(M) = \text{Supp}(M_1) \dot{\cup} \text{Supp}(M_2)$ .

El objetivo de este trabajo es doble; por un lado estudiar cuando una partición del soporte de un módulo produce una descomposición reticular, y por otro estudiar bajo qué condiciones se preservan e inducen descomposición reticulares.

Veremos que la descomposición reticular es una propiedad local, y que su comportamiento es bueno ante determinados cambios de anillo, por ejemplo, ante homomorfismos enteros u homomorfismos planos.

---

## 10. Desarrollos de Fourier para formas modulares de Drinfeld.

**Bartolomé López Jiménez. Universidad de Cádiz**

**Abstract:** Las formas modulares de Drinfeld se construyen a partir de retículos de rango 2 en un cuerpo de característica  $p$  análogo a  $\mathbb{C}$ .

Como en el caso de las formas complejas, las de Drinfeld admiten desarrollos en serie con índices en el conjunto de los números naturales. También se definen operadores de Hecke (asociados a polinomios mónicos de  $\mathbb{F}_q[T]$ ) que actúan sobre los espacios de formas modulares de Drinfeld. La acción de los operadores permite obtener resultados sobre los coeficientes de esos desarrollos.

Algunas formas modulares de Drinfeld admiten desarrollos en serie con

índices en el conjunto de los polinomios mónicos de  $\mathbb{F}_q[T]$ . La acción de los operadores de Hecke es más fácil de describir sobre estos desarrollos que sobre los asociados al conjunto de los números naturales.

El objetivo de la charla es exponer algunos resultados sobre estos dos tipos de desarrollos.

---

## 11. Nuevos ejemplos de álgebras de Hopf con integral.

**Laura Martín Valverde. Universidad de Almería.**

**Abstract:** La noción de integral en álgebras de Hopf surge de la invarianza de la medida de Haar sobre grupos compactos. Fue definida por Sweedler en [4] y es uno de los elementos fundamentales de la teoría de álgebras de Hopf. Las álgebras de Hopf que poseen integral reciben el nombre de co-Frobenius, pues satisfacen una propiedad dual a la de las álgebras Frobenius.

En [2] se demuestra que si un álgebra de Hopf es finitamente generada sobre su zócalo, entonces es co-Frobenius y se plantea la pregunta de si el recíproco es cierto. En [1] se da una respuesta negativa. Aquí se construye una familia de contraejemplos mediante un método que consiste en dualizar y explotar ciertas álgebras de Hopf de dimensión finita llamadas levantamientos de rectas cuánticas sobre grupos abelianos [3].

En esta charla aplicaremos la idea del método anterior a levantamientos de rectas cuánticas sobre ciertos grupos no abelianos, principalmente diédricos y cuaterniónicos, y obtendremos nuevos ejemplos de álgebras de Hopf co-Frobenius que generalizan los de [1]. Los resultados que exponremos forman parte de mi tesis doctoral, que está siendo realizada bajo la supervisión de Juan Cuadra Díaz.

## Referencias

- [1] N. Andruskiewitsch, J. Cuadra y P. Etingof, *On two finiteness conditions for Hopf algebras with nonzero integral*. Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (5) **XIV** (2015), 1-40.

- [2] N. Andruskiewitsch y S. Dăscălescu, *Co-Frobenius Hopf algebras and the coradical filtration*. Math. Z. **243** (2003), 145-154.
- [3] N. Andruskiewitsch y H.-J. Schneider, *On the classification of finite-dimensional pointed Hopf algebras*. Ann. of Math. (2) **171** (2010), 375-417.
- [4] M.E. Sweedler, *Integrals for Hopf algebras*. Ann. of Math. (2) **89** (1969), 323-335.
- 

## 12. Submódulos distributivos

Luis M. Merino González. Universidad de Granada.

**Abstract:** (Trabajo conjunto con J. M. García y P. Jara. Research partially supported by grant MTM2013-41992-P from MINECO and FEDER.)

Si  $M$  es un módulo, para submódulos  $X, Y, Z \subseteq M$  se verifica  $(X \cap Y) + (X \cap Z) \subseteq X \cap (Y + Z)$ , y  $X + (Y \cap Z) \subseteq (X + Y) \cap (X + Z)$ , y en general no se tiene la igualdad. Cuando estas igualdades son ciertas, más en concreto, cuando el subretículo generado por  $X, Y$  y  $Z$  es distributivo, para cualesquiera  $Y, Z \subseteq M$ , decimos que  $X \subseteq M$  es un submódulo distributivo.

Cuando un submódulo distributivo  $M_1 \subseteq M$  tiene un complemento  $M_2$ , esto es, cuando  $M = M_1 \oplus M_2$ , para cada submódulo  $X \subseteq M$  se verifica  $X = (X \cap M_1) \oplus (X \cap M_2)$ . Es fácil ver que en este caso se tiene un isomorfismo de retículos  $\mathcal{L}(M) \cong \mathcal{L}(M_1) \times \mathcal{L}(M_2)$ , definido en la forma obvia.

El objeto de este trabajo es estudiar y caracterizar los módulos  $M$  que se pueden escribir en la forma  $M = M_1 \oplus M_2$ , siendo  $M_i \subseteq M$  un submódulo distributivo (no nulo), a los que llamaremos módulos reticularmente descomponibles.

Entre otros resultados tenemos que para un módulo  $M$  son equivalentes:

- $M$  tiene una descomposición reticular  $M = M_1 \oplus M_2$ .
- (a) Existe un endomorfismo idempotente  $e \in \text{End}_R(M)$  tal que  $e(M) = M_1$ , y  $e(X) \subseteq X$ , para todo submódulo  $X \subseteq M$ .
- (b) La categoría  $\sigma[M]$  descompone como un producto directo:  $\sigma[M] = \sigma[M_1] \times \sigma[M_2]$ .

---

**13. Distancias mínimas y submonoides cerrados por división**

**María de los Ángeles Moreno Frías. Universidad de Cádiz.**

**Abstract:** El objetivo de esta charla es mostrar un método para calcular el conjunto de las distancias mínimas de un semigrupo afín, estudiando el conjunto de los submonoides cerrados por división. Veremos que estos submonoides pueden obtenerse a través de las componentes arquimedianas del semigrupo. Mostraremos que existe un isomorfismo entre los retículos de las componentes arquimedianas, el retículo de los submonoides cerrados por división y el retículo de las caras del cono generado por el semigrupo afín.

---

**14. Constructing and decoding a class of convolutional codes.**

**Gabriel Navarro. Universidad de Granada.**

**Abstract:** Convolutional codes (CCs) have been extensively used in practical error control applications on a variety of communication channels as, for instance, for deep space communications and satellite data transmissions or 3G/4G mobile telephony communications (as part of a concatenated code). Although they are frequently exploited efficiency, the algebraic structure of CCs is worst understood than the one of block codes (BCs). Mainly, because it needs to work over a free module  $\mathbb{F}[t]^n$  of a polynomial ring  $\mathbb{F}[t]$  over a finite field  $\mathbb{F}$ , whilst a BC is simply an  $\mathbb{F}$ -vector space. This gap is even larger when it comes to the notion of cyclicity. Very little is known about cyclic structures for convolutional codes and their possible impact on applications.

In this talk we show a novel approach to cyclicity for convolutional codes by introducing the so-called skew cyclic convolutional codes (SCCCs) [2]. The “skew” part of this codes comes from the non-commutativity of the working algebra which turns out to be an Ore extension. The underlying

idea of deforming the usual product of the ring of (commutative) polynomials is due to Piret in [3], who realized that the standard notion of cyclicity (i.e. words closed under the shift operator) do not produce non-block codes. Piret's definition of cyclic convolutional codes, renamed as  $\sigma$ -cyclic convolutional codes ( $\sigma$ -CCCs) in [1], uses the isomorphism of left  $\mathbb{F}[t]$ -modules,  $\mathbb{F}[t]^n \cong \mathbb{F}[x]/\langle x^n - 1 \rangle[t; \sigma]$  in order to establish the Ore extension. However, managing  $\sigma$ -CCCs is complicated. This is so because most of the computational tools developed to handle Ore polynomials are available only when the base ring is a field (or at least a division ring). This represents an obstacle for finding effective and efficient decoding algorithms. Our new perspective considers the embedding of  $\mathbb{F}[t]$  into its field of fractions  $\mathbb{F}(t)$  so that the cyclicity is obtained from the invariance under the shift operator in  $\mathbb{F}(t)^n$ , that is, in principle, dealing with ideals of  $\mathbb{F}(t)[x]/\langle x^n - 1 \rangle$ . Again, this does not produce new codes. We thus follow Piret's philosophy of deforming the product yielding an Ore extension, so our sentence-ambient algebra turns out to be the quotient algebra  $\mathcal{R} = \mathbb{F}(t)[x; \sigma]/\langle x^n - 1 \rangle$ , where  $\sigma$  is an  $\mathbb{F}(t)$ -automorphism of  $\mathbb{F}(t)$  of order  $n$ . Now, the base ring of the Ore extension is a field so the arithmetic and manipulation of polynomials is well established. Analogously to the block case, an SCCC is then a CC whose image under the inverse of the coordinate map  $\mathbf{v} : \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{F}(t)^n$  is a left ideal of  $\mathcal{R}$ . We shall propose a systematic procedure for constructing SCCC of arbitrary dimension. In particular, we may construct some BCH-like SCCC of designed Hamming distance. For these class of SCCC we show a decoding algorithm, providing an alternative to the celebrated Viterbi algorithm.

## Referencias

- [1] H. Gluesing-Luerssen and W. Schmale, On cyclic convolutional codes, *Acta Applicandae Mathematica* 82 (2) (2004), 183–237.
- [2] J. Gómez-Torrecillas, F. J. Lobillo and G. Navarro, A new perspective of cyclicity in convolutional codes, *IEEE Transactions on Information Theory* 2016. <http://dx.doi.org/10.1109/TIT.2016.2538264>.
- [3] P. Piret, Structure and constructions of cyclic convolutional codes, *IEEE Transactions on Information Theory* 22 (2) (1976), 147–155.

**15. An introduction on quasicrossed products.**  
**José María Sánchez Delgado. Centro de Matemática da Universidade de Coimbra**

**Abstract:**  $G$ -graded quasialgebras were introduced by H. Albuquerque and S. Majid about a decade ago. This class of algebras includes several types of algebras. Indeed, the class of associative algebras fits into this concept, as well as some notable nonassociative algebras such as deformed group algebras (for example, Cayley algebras and Clifford algebras).

Inspired by the theory of graded rings and graded algebras, we show an extension of the notion of crossed product to the setting of graded quasialgebras.

By collecting basic definitions and properties related to graded quasialgebras we introduce the notion of quasicrossed product, including some examples and the relationship with quasicrossed system. We show that the quasicrossed system corresponding to the deformed group algebra obtained from the Cayley-Dickson process applied to a deformed group algebra is related to the quasicrossed system corresponding to the initial algebra. Finally we obtain results about simple quasicrossed products.

This is a joint work with Helena M. Albuquerque and Elisabete F. Barreiro.

---

**16. Morfismos irreducibles entre complejos de ancho fijo.**  
**María José Souto Salorio. Universidad de A Coruña**

**Abstract:** (Trabajo conjunto con Claudia Chaio e Isabel Pratti )

En la categoría  $\mathbf{C}_n(\text{proy } H)$  con  $H$  una  $k$ -álgebra hereditaria de dimensión finita, se caracterizan los morfismos irreducibles entre complejos indescomponibles. Como consecuencia, se obtienen propiedades relativas al carcaj de Auslander-Reiten de dicha categoría.

Estos resultados forman parte de la tesis doctoral de Isabel Pratti.

