THE CUNTZ SEMIGROUP OF CONTINUOUS FIELDS

RAMON ANTOINE, JOAN BOSA, AND FRANCESC PERERA

ABSTRACT. In this talk we show that, for some continuous fields A with no K_1-obstructions, the Cuntz semigroup of A can be recovered as the sheaf of continuous sections on a topological space. As a consequence, these continuous fields can be classified by their Cuntz Semigroup.

The first result is analogous to a result proved by M. Dadarlat and G. Elliott [2], which describes the sheaf given by K_0 in terms of the continuous sections, and the second one rephrases the classification obtained in [3].

INTRODUCCIÓN

Al final de la década de los 80, G.A. Elliott conjeturó que las C*-álgebras simples, separables y nucleares se podrían clasificar mediante un invariante basado en la Teoría K. Dicho invariante se ha llamado, a posteriori, Ell(_). A pesar de los buenos resultados obtenidos por dicho programa, en la última década han aparecido ejemplos descritos por M. Rørdam y A. Toms que han hecho reescribir la conjetura de Elliott([4] y [5]). En concreto, A. Toms mostró dos C*-àlgebras que tienen el mismo invariante Ell(_), pero que pueden ser diferenciadas por el invariante conocido como semigrupo de Cuntz.

El anterior hecho ha propiciado, en los últimos años, un estudio profundo de dicho semigrupo. Uno de los mayores logros en esta línea de investigación fue la solución del problema de continuiad del semigrupo de Cuntz hallada por Coward-Elliott-Ivanescu en 2008 ([1]). Dicho problema fue "solucionado" considerando el semigrupo de Cuntz del álgebra estabilizada y definiendo la categoria Cu, donde dicho semigrupo pertenece. Gracias a esta definición, construyeron un functor covariante de la categoria de C*-álgebras a la categoría Cu.

Utilizando esta propiedad de continuidad, el resultado que voy a mostrar explica que dado un haz continuo en la categoría Cu

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{S}(\_): & \mathcal{V}_X & \to & \mathrm{Cu} \\ & U & \mapsto & \mathcal{S}(U)\,, \end{array}$$

donde X es un espacio compacto Hausdorff, se satisface que el conjunto de secciones continuas de X a $F_S := \sqcup_{x\in X}\mathcal{S}_x$, denotado por $\Gamma(X, F_S)$, es un semigrupo en la categoría Cu. Con este resultado podemos calcular el semigrupo de Cuntz de los "Continuous Fields" sin obstrucciones en K_1 y con X un espacio compacto Haudorff de dimensión menor o igual que 1. Así, si B es un Continuous Field compliendo las anteriores hipótesis, obtenemos que

$$\mathrm{Cu}(B) \cong \Gamma(X, F_{\mathrm{Cu}(B)})\ .$$

Gracias a la equivalencia anterior, bajo las mismas hipótesis, tenemos que los haces

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{S}(\_): & \mathcal{V}_X & \to & \mathrm{Cu} \\ & U & \mapsto & \mathcal{S}(A(U)) \end{array} \quad \text{and} \quad \begin{array}{rccc} \mathrm{Cu}_A(\_): & \mathcal{V}_X & \to & \mathrm{Cu} \\ & U & \mapsto & \mathrm{Cu}(A(U)). \end{array}$$

son isomorfos. Este hecho es una versión continua del resultado que establece el isomorfismo entre cualquier haz continuo y su correspondiente haz de secciones contínuas cuando el límite directo de la categoria es el límite algebraico ([6]).

Para terminar, combinando los anteriores resultados con el hecho que $\mathrm{Cu}(B)$ tiene una acción inducida por la acción de $C(X)$ en B, explicaré el siguiente Teorema.

Teorema 0.1. *Sean A y B dos continuous fields en X tales que no tienen obstrucciones de K_1, todas sus fibras tienen rango real zero y X es un espacio compacto Hausdorff de dimensión menor o igual que 1. Entonces las siguientes propiedades son equivalentes:*

(1) $\mathrm{Cu}(A) \cong \mathrm{Cu}(B)$ *preservando la acción de* $\mathrm{Cu}(\mathrm{C}(X))$,
(2) $\mathrm{Cu}_A(\_) \cong \mathrm{Cu}_B(\_)$,
(3) $\mathbb{V}_A(\_) \cong \mathbb{V}_B(\_)$.

El anterior Teorema muestra que, bajo nuestras hipotesis, el semigrupo de Cuntz contiene la misma información que los haces construidos mediante dicho semigrupo o el semigrupo de Murray-von Neumann. Como corolario del anterior Teorema, somos capaces de reescribir la clasificación de ciertos Continuous Fields obtenida por Dadarlat-Elliott-Niu en términos del semigrupo de Cuntz ([3]).

Corolario 0.2. *Sean A, B dos Continuous Fields separables y unitales en $[0,1]$ tales que sus fibras son AF-álgebras. Entonces cualquier isomorfismo $\tilde{\phi} : \mathrm{Cu}(A) \to \mathrm{Cu}(B)$ que preserve la acción de $\mathrm{Cu}(\mathrm{C}(X))$ y que cumpla $\tilde{\phi}([1_A]) = [1_B]$ se eleva a un isomorfismo $A \cong B$ entre los Continuous Fields.*

References

[1] K.T. Coward, G.A. Elliott and C. Ivanescu, *The Cuntz Semigroup as an invariant for C^*-algebras*, J. Reine Angew. Math., **623**, 161–193, 2008.
[2] M. Dadarlat, G. A. Elliott,*One-Parameter Continuous Fields of Kirchberg Algebras*, Commun. Maht. Phys., **274**, 795-819, 2007.
[3] M. Dadarlat, G.A. Elliott, Z. Niu, *One-Parameter Continuous Fields of Kirchberg Algebras II*, Canad. J. Math. **63** (3), 500–532, 2011.
[4] M.Rørdam, *A simple C*-algebra with a finite and an infinite projection*, Acta Math., **191** (1), 109–142, 2003.
[5] A.S. Toms, *On the classification problem for nuclear C^*-algebras*, Ann. of Math. (2), **167** (3), 1029–1044, 2008.
[6] R. O. Jr. Wells,*Differential analisys on complex manifolds* volume 65 of graduate texts in Mathematics. Second Edition. New-York: Springer-Verlag 1989.

Universitat Autònoma de Barcelona
E-mail address: ramon@mat.uab.cat, jbosa@mat.uab.cat, perera@mat.uab.cat