A GRADED CRITERION IN THE CLASSIFICATION OF COFINITE HOMOGENEOUS IDEALS

ÓSCAR CORTADELLAS, PASCUAL JARA, AND F. J. LOBILLO

Abstract. A study of finiteness in a kind of finitely presented quotient algebras is displayed in this paper. The relations generating the ideals are given by monomials or binomials of same length, in order to obtain homogeneous computations. These ideals are parametrized by 3-tuples (a, b, c), being a the number of variables, b the length of monomials and c the number of relations conforming the ideal. We focus on the analysis of the $(2, 3, 4)$-family, constituted by 58905 elements, compute all the possible ideals, obtain the corresponding Gröbner-Shirshov basis (up to degree 30) of each one and give information about the number of cofinite ideals in this family and the largest reached dimension. Elements of this *maximal* sub-family will be classified up to isomorphism, for which we develop a new procedure based on projections on generating sets, which is lighter than other known routines and constitutes one of the main results of this work (Theorem 2.4). More useful information about inherent computations will be appearing during the paper, as well as some technical results over isomorphism classes of this type of graded algebras.

Introducción

En el presente trabajo vamos a abordar y resolver varias cuestiones relacionadas con la naturaleza cofinita de algunas familias de ideales homogéneos, que van desde 45 elementos hasta varios millones. Como elemento destacado desarrollaremos un *procedimiento* para deducir cuándo dos álgebras relacionadas con estos ideales son isomorfas, que mejora otros métodos vistos anteriormente.

Dado un álgebra de polinomios $k\langle X\rangle$ y un ideal $I \trianglelefteq k\langle X\rangle$, decimos que I es un ideal *cofinito* si el álgebra cociente $k\langle X\rangle/I$ tiene dimensión finita.

Los ideales que son objeto de este estudio son ideales de polinomios no conmutativos que están parametrizados por tres variables (a, b, c). La variable a representa el número de indeterminadas del conjunto X, b es la longitud de los monomios o binomios que conforman las relaciones que generan el ideal y c es el número de relaciones que componen cada ideal.

De esta manera los ideales que estamos estudiando son homogéneos. Esta restricción está tomada para poder hacer cálculos consistentes sobre el álgebra cociente, ya que en estos casos una base de Gröbner-Shirshov, aunque infinita, puede calcularse de manera exhaustiva grado a grado.

Tenemos por tanto un doble objetivo. Por un lado estudiar el número de ideales cofinitos en cada familia y por otro estudiar cuándo de dos de estos ideales se derivan álgebras cocientes isomorfas.

Todos los cálculos respectivos a reducciones, palabras normales o bases de Gröbner-Shirshov han sido realizados por el programa `Bergman` ([1]). Para poder controlar mejor los cálculos, estos se han desarrollado hasta grado 30.

1. Buscando ideales cofinitos maximales en una (a, b, c)-familia

En principio estamos interesados en el estudio de la familia $(2, 3, 4)$. Esto quiere decir que los ideales que queremos estudiar están constituidos por cuatro relaciones formadas por la diferencia de dos monomios de longitud tres en dos variables. Una cuenta sencilla nos dice que hay 58905 elementos en esta familia. La finitud o infinitud de cada una de las álgebras cocientes que se deducen a partir de cada ideal se estudiará a partir de la serie de Hilbert de cada ideal.

Para este fin hemos construido una rutina en C++ que usa como motor de cálculo el sistema `Bergman` y que nos proporciona esta información. Además nos clasifica cada uno de los ideales de acuerdo a la dimensión del álgebra cociente asociada.

Básicamente lo que hace el programa es construir todos los ideales que conforman esa familia y calcular la serie de Hilbert asociada a cada álgebra cociente, vía el cálculo de su base de Gröbner-Shirshov. Luego revisa los coeficientes de la serie para comprobar si tiene una base finita y, si la tiene, suma el número de elementos de la base para calcular la dimensión. Finalmente agrupa toda la información en un archivo y nos lo devuelve.

En particular en esta familia tenemos 10142 ideales cofinitos, que se reparten de la siguiente manera

288 ideales que generan álgebras de dimensión 11
2446 ideales que generan álgebras de dimensión 12,
3578 ideales que generan álgebras de dimensión 13,
1246 ideales que generan álgebras de dimensión 14,
2146 ideales que generan álgebras de dimensión 15,
92 ideales que generan álgebras de dimensión 16,
174 ideales que generan álgebras de dimensión 17,
88 ideales que generan álgebras de dimensión 18,
8 ideales que generan álgebras de dimensión 19,
72 ideales que generan álgebras de dimensión 21 y
4 ideales que generan álgebras de dimensión 25.

Luego tenemos que la dimensión finita máxima de las álgebras cocientes es 25 y se alcanza en 4 casos. Podemos *prácticamente* asegurar que si un álgebra en esta familia tiene dimensión superior a 25 va a ser no finita. Pero, ¿realmente hay cuatro casos diferentes o hay menos?

2. Clases de isomorfía. El criterio graduado

Tras las molestias tomadas en la sección anterior para la búsqueda de ideales cofinitos, nos enfrentamos ahora al problema de clasificar las álgebras finitas encontradas, salvo isomorfismos.

Hay varias formas de abordar este tipo de problemas: a través de su serie de Hilbert, estudiando sus grafos de Ufnarovskii ([2]), usando los estudios de combinatoria de Kostrikin y Shafarevich ([3]) y otras muchas formas. En particular nos encontramos con el algoritmo diseñado por Shirayanagi ([4]), donde el problema se reduce a demostrar si un elemento determinado pertenece a una base de Gröbner (conmutativa).

Vamos a estudiar si las dos álgebras cocientes asociadas a los ideales

$$\begin{aligned} I_1 &= \langle xxx, xyx, xxx - xyx, xyy - yyy \rangle \\ I_2 &= \langle yxy, yyy, xxx - yxx, yxy - yyy \rangle \end{aligned}$$

son isomorfas. Estos dos ideales pertenecen a la familia maximal que hemos calculado en el apartado anterior. Como primer paso podemos observar que tienen la misma serie de Hilbert

$$H_{\mathcal{A}_j} = 1 + 2x + 4x^2 + 5x^3 + 5x^4 + 4x^5 + 3x^6 + x^7, \quad j = 1, 2$$

y que por lo tanto las álgebras asociadas tienen dimensión 25.

Para poder aplicar el criterio de Shirayanagi, ahora tenemos que comprobar si un elemento (en este caso de grado 90) pertenece a la base de Gröbner de un ideal (conmutativo) generado por cientos de elementos sobre 51 variables. Aunque técnicamente es posible, computacionalmente es inviable. De hecho la respuesta es que son isomorfas.

Vamos a sentar las bases para aplicar nuestro criterio graduado. Sean $A = k\langle X\rangle/I_A$ y $B = k\langle X\rangle/I_B$ dos álgebras finitamente presentadas, I_A and I_B dos ideales homogéneos y H_A y H_B las correspondientes series de Hilbert. Supongamos que $H_A = H_B$ (es un invariante para álgebras graduadas), por lo que $A = \bigoplus_{i=0}^{m} A_i$, $B = \bigoplus_{i=0}^{m} B_i$, y que $\dim(A_j) = \dim(B_j)$, $\forall j$. Además, $A_0 = B_0 = k$ y A, B están generadas como k-álgebras por los subespacios correspondientes de dimensión uno.

Lema 2.1. *Usando la notación anterior, si $\varphi : A \to B$ es un isomorfismo, $\varphi(A_1) \cap B_1 \neq \emptyset$,*

de lo cual podemos deducir el siguiente

Corolario 2.2. *Si $\varphi : A \to B$ es un isomorfismo, entonces*

$$\varphi(A_i) \subseteq B_i \oplus B_{i+1} \oplus \cdots \oplus B_m \text{ con } \varphi(A_i) \cap B_i = B_i$$

Esto nos viene a decir que la imagen de un elemento de grado i siempre tiene una sección de grado i y, eventualmente, otra sección de grado mayor estricto que i.

La parte de grado i de la imagen de un elemento de grado i se llamará *cabeza* y a la parte de grado superior la llamaremos *cola*.

Corolario 2.3. *La matriz asociada a φ es triangular por bloques, donde cada bloque tiene dimensión dim(A_i) =dim(B_i).*

Sea $\varphi : A \to B$ un isomorfismo que verifica las condiciones anteriores. Definamos un homomorfismo como

$$\begin{array}{rcl} \tilde{\varphi} : A_1 & \to & B_1 \\ f & \mapsto & \pi_1 \circ \varphi(f) \end{array}$$

donde π_1 es la proyección sobre la componente B_1. Como A_1 genera A, podemos extender $\tilde{\varphi}$ a un homomorfismo de álgebras $\tilde{\varphi}^{\text{ex}} : A \to B$.

Teorema 2.4. *Sea $\varphi : A \to B$ un isomorfismo entre A and B. Entonces $\tilde{\varphi}^{ex}$ define un isomorfismo graduado entre A to B.*

Demostración. Vamos a probar que $\tilde{\varphi}(A_1) \cong B_1$. Si esto fuera cierto, entonces $\tilde{\varphi}^{\text{ex}}(A_i) = \tilde{\varphi}^{\text{ex}}(A_1^i) = \tilde{\varphi}(A_1)^i \cong B_1^i = B_i$.

Empecemos probando que la Im$\tilde{\varphi} = \{\pi_1 \circ \varphi(f) \backslash f \in A_1\} = B_1$. Supongamos que es falso, luego existe un elemento $g \in B_1$ tal que $g \notin$ Im$\tilde{\varphi}$. Entonces no existe un $h \in A_1$ tal que $\pi_1 \circ \varphi(h) = g$. Pero los elementos de grado 1 de B solo pueden ser obtenidos como imagen de elementos de grado 1 en A, por el colorario (2.2). Entonces, si tal g existe, $\varphi(A_1) \cap B_1 \neq B_1$ y φ no podrá ser un isomorfismo.

Por el otro lado, sea $\tilde{M}$ la matriz asociada a $\tilde{\varphi}$ ($\tilde{M}$ será una matriz cuadrada de dimensión $\dim(A_1)$). Si $\det(\tilde{M}) = 0$, entonces el determinante del menor correspondiente a los elementos de grado uno en la matriz M asociada a φ también será cero. Por el colorario (2.3) la matriz es triangular por bloques, luego $\det(M) = 0$ y φ no puede ser un isomorfismo. $\square$

A partir de este resultado podemos deducir una relación directa entre el conjunto de isomorfismos entre A y B y el conjunto de isomorfismos graduados entre A y B. Consecuentemente, de cada isomorfismo $\varphi : A \to B$ podemos obtener un isomorfismo graduado *eliminando* la cola de dimiensión mayor que uno de la imagen de los generadores. Y por otro lado, cada isomorfismo graduado $\tilde{\varphi} : A \to B$ puede *extenderse* a un isomorfismo general encontrando unos coeficientes adecuados que respeten los elementos del bloque de dimensión uno.

Acabamos de demostrar que todo isomorfismo da lugar a un isomorfismo graduado, luego para comprobar si dos álgebras son isomorfas nos basta con buscar este isomorfismo graduado, que además podemos ir construyendo grado a grado. En cada nuevo paso añadimos, si existieran, nuevas restricciones sobre nuestros parámetros. Si estas restricciones resultan no compatibles, entonces no puede existir el isomorfismo graduado y no serán isomorfas. Como el álgebra que estamos estudiando es finita, este algoritmo termina irremediablemente dando condiciones para que podamos definir el isomorfismo o con la certeza que ambas álgebras no son isomorfas.

Incluso podemos realizar algunos ajustes más para acelerar este proceso y evitar algunos cálculos redundantes. Estas *mejoras* se basan sobre todo en la estructura graduada del problema.

References

[1] Jörgen Backelin et al, Bergman, http://servus.math.su.se/bergman/
[2] Vicktor Ufnarovskii, 1982. A growth criterion for graphs and algebras defined by words, Matematicheskie Zametki 31, no. 3, 465–472
[3] Kostrikin A. I. and Shafarevich I. R (eds.), 1995. Algebra VI, Encyclopaedia of Mathematical Sciences, vol. 5, Springer
[4] Shirayanagi, k, 1993. Decision of algebra isomorphisms using Gröbner Bases, Computational algebraic geometry, Birkhauser, 253–265

Departmento de Álgebra, Facultad de Ciencias, Universidad de Granada, Avda. Fuentenueva s/n, E-18071, Granada, España
E-mail address: `ocortad@ugr.es, pjara@ugr.es`

Departmento de Álgebra, Escuela Técnica Superior de Ingenierías Informática y de Telecomunicación, Universidad de Granada, C/ Periodista Daniel Saucedo Aranda s/n, E-18071, Granada, España
E-mail address: `jlobillo@ugr.es`