MÓDULOS YETTER-DRINFELD SOBRE ÁLGEBRAS DE HOPF TRENZADAS DÉBILES

C. SONEIRA CALVO

Abstract. In this talk we introduce the notion of weak operator and the theory of Yetter-Drinfeld modules over a weak braided Hopf algebra with invertible antipode in a strict monoidal category. We prove that the class of such objects constitute a non strict monoidal category and provide a generic example of Yetter-Drinfeld module in this context via the adjoint action (coaction) associated to the weak braided Hopf algebra.

Introducción

Los módulos de Yetter-Drinfeld sobre un álgebra de Hopf fueron considerados por primera vez por Radford en [7] para estudiar las proyecciones de álgebras de Hopf, si bien su definición formal la establece, aunque con el nombre de módulo cruzado, Yetter en [10].

En los años noventa, para estudiar problemas relacionados con la teoría cuántica de campos en dimensión baja, Bohm, Nill y Schalanyi [5] introducen las álgebras de Hopf débiles como una generalización de las álgebras de Hopf. Recientemente, para probar el teorema de de Radford para proyecciones de álgebras de Hopf débiles, Alonso, Fernández y González introducen las álgebras trenzadas débiles [1], concepto que engloba como casos particulares a las álgebras de Hopf débiles y las álgebras de Hopf trenzadas de Takeuchi [9].

En [3] los autores prueban que muchas propiedades relevantes sobre proyecciones asociadas a álgebras de Hopf trenzadas débiles pueden obtenerse sin recurrir a una trenza global en la categoría de partida. Este hecho plantea la cuestión del posible desarrollo de una teoría general de módulos Yetter-Drinfeld sobre un álgebra de Hopf trenzada débil en una categoría monoidal estricta.

En esta charla mostraremos que que es posible dar una respuesta afirmativa y además recuperar la teoría clásica desarrollada en [8]. Se dan también dos colecciones de ejemplos en este contexto general basadas en el uso de la (co)acción (co)adjunta.

1. Operadores débiles

En esta charla, salvo indicación expresa de lo contrario, denotamos por $\mathcal{C}$ una categoría monoidal estricta con idempotentes escindidos.

Definición 1.1. Sea D una biálgebra trenzada débil en $\mathcal{C}$ (Ver [4]) y M un objeto en $\mathcal{C}$. Un operador débil entre M y D, denotado por (M, D)-OD, se define como una cuádrupla (r_M, r'_M, s_M, s'_M) formada por cuatro morfismos en $\mathcal{C}$:

$r_M : M\otimes D \to D\otimes M, r'_M : D\otimes M \to M\otimes D, s_M : D\otimes M \to M\otimes D, s'_M : M\otimes D \to D\otimes M,$

tales que

(e1) Se cumple:
(e1-1) $(D\otimes r_M)\circ(r_M\otimes D)\circ(M\otimes t_{D,D})=(t_{D,D}\otimes M)\circ(D\otimes r_M)\circ(r_M\otimes D)$
(e1-2) $(r'_M\otimes D)\circ(D\otimes r'_M)\circ(t_{D,D}\otimes M)=(M\otimes t_{D,D})\circ(r'_M\otimes D)\circ(D\otimes r'_M)$
(e1-3) $(s_M\otimes D)\circ(D\otimes s_M)\circ(t_{D,D}\otimes M)=(M\otimes t_{D,D})\circ(s_M\otimes D)\circ(D\otimes s_M)$
(e1-4) $(D\otimes s'_M)\circ(s'_M\otimes D)\circ(M\otimes t_{D,D})=(t_{D,D}\otimes M)\circ(D\otimes s'_M)\circ(s'_M\otimes D)$
y las igualdades análogas sustituyendo $t_{D,D}$ por $t'_{D,D}$.

(e2) Se cumple:
(e2-1) $(r'_M\otimes D)\circ(D\otimes s_M)\circ(t_{D,D}\otimes M)=(M\otimes t_{D,D})\circ(s_M\otimes D)\circ(D\otimes r'_M)$
(e2-2) $(s_M\otimes D)\circ(D\otimes r'_M)\circ(t'_{D,D}\otimes M)=(M\otimes t'_{D,D})\circ(r'_M\otimes D)\circ(D\otimes s_M)$
(e2-3) $(D\otimes s'_M)\circ(r_M\otimes D)\circ(M\otimes t_{D,D})=(t_{D,D}\otimes M)\circ(D\otimes r_M)\circ(s'_M\otimes D)$
(e2-4) $(D\otimes r_M)\circ(s'_M\otimes D)\circ(M\otimes t'_{D,D})=(t'_{D,D}\otimes M)\circ(D\otimes s'_M)\circ(r_M\otimes D)$.

(e3) Si

$$\nabla_{r_M}:=r'_M\circ r_M:M\otimes D\to M\otimes D,\quad \nabla_{r'_M}:=r_M\circ r'_M:D\otimes M\to D\otimes M,$$

$$\nabla_{s_M}:=s'_M\circ s_M:D\otimes M\to D\otimes M,\quad \nabla_{s'_M}:=s_M\circ s'_M:M\otimes D\to M\otimes D,$$

se tiene que:
(e3-1) $\nabla_{r_M}=(((\varepsilon_D\otimes M)\circ r_M)\otimes D)\circ(M\otimes\delta_D)=(M\otimes\mu_D)\circ(((r'_M\circ(\eta_D\otimes M))\otimes D)$
(e3-2) $\nabla_{r'_M}=(D\otimes((M\otimes\varepsilon_D)\circ r'_M))\circ(\delta_D\otimes M)=(\mu_D\otimes M)\circ(D\otimes(r_M\circ(M\otimes\eta_D)))$
(e3-3) $\nabla_{s_M}=(D\otimes((M\otimes\varepsilon_D)\circ s_M))\circ(\delta_D\otimes M)=(\mu_D\otimes M)\circ(D\otimes(s'_M\circ(M\otimes\eta_D)))$
(e3-4) $\nabla_{s'_M}=(((\varepsilon_D\otimes M)\circ s'_M)\otimes D)\circ(M\otimes\delta_D)=(M\otimes\mu_D)\circ(((s_M\circ(\eta_D\otimes M))\otimes D)$.

(e4) Se cumple:
(e4-1) $r_M\circ(M\otimes\mu_D)=(\mu_D\otimes M)\circ(D\otimes r_M)\circ(r_M\otimes D)$
(e4-2) $r'_M\circ(\mu_D\otimes M)=(M\otimes\mu_D)\circ(r'_M\otimes D)\circ(D\otimes r'_M)$
(e4-3) $(D\otimes r_M)\circ(r_M\otimes D)\circ(M\otimes\delta_D)=(\delta_D\otimes M)\circ r_M$
(e4-4) $(r'_M\otimes D)\circ(D\otimes r'_M)\circ(\delta_D\otimes M)=(M\otimes\delta_D)\circ r'_M$
(e4-5) $s_M\circ(\mu_D\otimes M)=(M\otimes\mu_D)\circ(s_M\otimes D)\circ(D\otimes s_M)$
(e4-6) $s'_M\circ(M\otimes\mu_D)=(\mu_D\otimes M)\circ(D\otimes s'_M)\circ(s'_M\otimes D)$
(e4-7) $(s_M\otimes D)\circ(D\otimes s_M)\circ(\delta_D\otimes M)=(M\otimes\delta_D)\circ s_M$
(e4-8) $(D\otimes s'_M)\circ(s'_M\otimes D)\circ(M\otimes\delta_D)=(\delta_D\otimes M)\circ s'_M$.

Definición 1.2. Sea D un álgebra de Hopf trenzada débil en $\mathcal{C}$ (Ver [1]) y M un objeto en $\mathcal{C}$. Un operador débil entre M y D se define como una cuádrupla ordenada (r_M,r'_M,s_M,s'_M) satisfaciendo las condiciones (e1), (e2), (e3), (e4) de la Definición 1.1 y además:

(e5) Se cumple:
(e5-1) $(M\otimes\lambda_D)\circ\nabla_{r_M}=\nabla_{r_M}\circ(M\otimes\lambda_D)$
(e5-2) $(\lambda_D\otimes M)\circ\nabla_{r'_M}=\nabla_{r'_M}\circ(\lambda_D\otimes M)$
(e5-3) $(\lambda_D\otimes M)\circ\nabla_{s_M}=\nabla_{s_M}\circ(\lambda_D\otimes M)$
(e5-4) $(M\otimes\lambda_D)\circ\nabla_{s'_M}=\nabla_{s'_M}\circ(M\otimes\lambda_D)$.

Definición 1.3. Sea D una biálgebra trenzada débil, M un objeto en $\mathcal{C}$, (r_M,r'_M,s_M,s'_M) un (M,D)-OD y (M,φ_M) un D-módulo por la izquierda. Se dirá que el (M,D)-OD es compatible con la estructura de D-módulo si se cumplen las siguientes condiciones:

(i) $r_M\circ(\varphi_M\otimes D)=(D\otimes\varphi_M)\circ(t_{D,D}\otimes M)\circ(D\otimes r_M)$,
(ii) $r'_M\circ(D\otimes\varphi_M)=(\varphi_M\otimes D)\circ(D\otimes r'_M)\circ(t'_{D,D}\otimes M)$,
(iii) $s_M\circ(D\otimes\varphi_M)=(\varphi_M\otimes D)\circ(D\otimes s_M)\circ(t_{D,D}\otimes M)$,

(iv) $s'_M \circ (\varphi_M \otimes D) = (D \otimes \varphi_M) \circ (t'_{D,D} \otimes M) \circ (D \otimes s'_M)$.

Si (M, ϱ_M) es un D-comódulo por la izquierda, se dirá que el (M, D)-OD es compatible con la estructura de D-comódulo si se cumplen las condiciones análogas correspondientes.

Del mismo modo se define la noción de compatibilidad con (co)estructuras de (co)módulo por la derecha.

2. La categoría de módulos Yetter-Drinfeld y su estructura monoidal

Definición 2.1. Sea D un álgebra de Hopf trenzada débil en $\mathcal{C}$. Se dice que $(M, \varphi_M, \varrho_M)$ es un módulo Yetter-Drinfeld izquierda-izquierda sobre D si (M, φ_M) es un D-módulo por la izquierda, (M, ϱ_M) es un D-comódulo por la izquierda y se cumplen las siguientes condiciones:

(yd1-ii) $\varrho_M = (\mu_D \otimes \varphi_M) \circ (D \otimes t_{D,D} \otimes M) \circ (\delta_D \otimes \varrho_M) \circ (\eta_D \otimes M)$

(yd2-ii) Existe un (M, D)-OD (r_M, r'_M, s_M, s'_M) compatible con las estructuras de (co)módulo de M tal que:

$$(\mu_D \otimes \varphi_M) \circ (D \otimes t_{D,D} \otimes M) \circ (\delta_D \otimes \varrho_M)$$
$$= (\mu_D \otimes M) \circ (D \otimes r_M) \circ ((\varrho_M \circ \varphi_M) \otimes D) \circ (D \otimes s_M) \circ (\delta_D \otimes M)$$

Si $(M, \varphi_M, \varrho_M)$ y $(N, \varphi_N, \varrho_N)$ dos módulos Yetter-Drinfeld izquierda-izquierda sobre D con operadores débiles asociados (r_M, r'_M, s_M, s'_M) y (r_N, r'_N, s_N, s'_N) respectivamente, el morfismo $f : M \to N$ se dice de módulos Yetter-Drinfeld si:

(i) f es un morfismo de (co)módulos por la izquierda.

(ii) $r_N \circ (f \otimes D) = (D \otimes f) \circ r_M, \qquad s_N \circ (D \otimes f) = (f \otimes D) \circ s_M$

La clase de todos los módulos Yetter-Drinfeld izquierda-izquierda sobre D junto con los morfismos de módulos Yetter-Drinfeld forman una categoría que denotaremos por ${}^D_D\mathcal{YD}$.

Nota 2.2. Cuando la categoría $\mathcal{C}$ es simétrica y se definen tanto el operador Yang-Baxter débil como el operador débil a partir de la trenza de la categoría, se recuperan las condiciones introducidas en [7].

Teorema 2.3. *Sea D un AHTD en $\mathcal{C}$ con antípodo inversible. Entonces ${}^D_D\mathcal{YD}$ es una categoría monoidal no estricta.*

3. Ejemplos

Sea D un AHTD en $\mathcal{C}$. La acción $\varphi_D : D \otimes D \to D$ y la coacción $\varrho_D : D \to D \otimes D$ adjuntas se definen como

$$\varphi_D = \mu_D \circ (\mu_D \otimes \lambda_D) \circ (D \otimes t_{D,D}) \circ (\delta_D \otimes D),$$
$$\varrho_D = (\mu_D \otimes D) \circ (D \otimes t_{D,D}) \circ (\delta_D \otimes \lambda_D) \circ \delta_D.$$

Entonces los morfismos $\omega_D^a = \varphi_D \circ (\eta_D \otimes D) : D \to D$ y $\omega_D^c = (\varepsilon_D \otimes D) \circ \varrho_D : D \to D$ son idempotentes en $\mathcal{C}$.

Si para $x \in \{a, c\}$, se designan por $\Omega^x(D)$, $p_D^x : D \to \Omega^x(D)$ y $i_D^x : \Omega^x(D) \to D$ el objeto imagen de ω_D^x y los morfimos tales que $i_D^x \circ p_D^x = \omega_D^x$ y $p_D^x \circ i_D^x = id_{\Omega^x(D)}$, entonces se cumple que:

(i) El triple $(\Omega^a(D), \varphi_{\Omega^a(D)}, \rho_{\Omega^a(D)})$ es un objeto en ${}^D_D\mathcal{YD}$ con $\varphi_{\Omega^a(D)} = p_D^a \circ \varphi_D \circ (D \otimes i_D^a)$ y $\varrho_{\Omega^a(D)} = (D \otimes p_D^a) \circ \delta_D \circ i_D^a : \Omega^a(D) \to D \otimes \Omega^a(D)$.

(ii) El triple $(\Omega^c(D), \psi_{\Omega^c(D)}, \varrho_{\Omega^c(D)})$ es un objeto en ${}^D_D\mathcal{YD}$ con $\psi_{\Omega^c(D)} = p_D^c \circ \mu_D \circ (D \otimes i_D^c) : D \otimes \Omega^c(D) \to \Omega^c(D)$ y $\varrho_{\Omega^c(D)} = (D \otimes p_D^c) \circ \varrho_D \circ i_D^c : \Omega^c(D) \to D \otimes \Omega^c(D)$.

References

[1] J. N. Alonso Álvarez, J.M. Fernández Vilaboa, R. González Rodríguez, Weak Hopf algebras and weak Yang-Baxter operators, J. of Algebra 320 (2008), 2101-2143.

[2] J. N. Alonso Álvarez, J.M. Fernández Vilaboa, R. González Rodríguez, Weak Braided Hopf Algebras, Indiana University Mathematics Journal 57 No. 5 (2008), .

[3] J. N. Alonso Álvarez, J.M. Fernández Vilaboa, R. González Rodríguez, C. Soneira Calvo, Projections of Weak Braided HopfAlgebras, Science China Math. 54 No. 5 (2011), 877-906.

[4] J. N. Alonso Álvarez, J.M. Fernández Vilaboa, R. González Rodríguez, C. Soneira Calvo, The monoidal category of Yetter-Drinfeld modules over weak braided Hopf algebras, preprint.

[5] Böhm, G, F. Nill, K. Szlachányi, Weak Hopf algebras, I. Integral theory and C^*-structure, J. of Algebra 221 (1999), 385-438.

[6] A. Nenciu, The center construction for weak Hopf algebras, Tsukuba J. Math. 26 (2002), 189-204.

[7] D. E. Radford, The structure of Hopf algebras with projection, J. of Algebra **92** (1985), 322-347.

[8] D.E. Radford, J. Towber, Yetter-Drinfeld categories associated to an arbitrary bialgebra, J. of Pure and Applied Algebra 87 (1993), 259-279.

[9] M. Takeuchi, Survey of braided Hopf algebras, Contemp. Math. 267 (2000), 301-323.

[10] D. N. Yetter, Quantum gropus and representations of monoidal categories, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 108 (2) (1990), 261-290.

Universidade da Coruña

E-mail address: carlos.soneira@udc.es