GLOBALIZACIÓN DE ACCIONES PARCIALES DEFORMADAS

M. DOKUCHAEV, R. EXEL, AND J. J. SIMÓN.

Abstract. Let A be a unital ring which is a product of possibly infinitely many indecomposable rings. We establish a criteria for the existence of a globalization for a given twisted partial action of a group on A. If the globalization exists, it is unique up to a certain equivalence relation and, moreover, the crossed product corresponding to the twisted partial action is Morita equivalent to that corresponding to its globalization. For arbitrary unital rings the globalization problem is reduced to an extendibility property of the multipliers involved in the twisted partial action.

Introducción

Las acciones parciales deformadas de grupos localmente compactos en C^*-álgebras fueron introducidas en [6] como herramienta para la construcción general de los productos cruzados de C^*-álgebras. El alcance de este concepto le permite a uno probar (véase [6, Theorem 7.3]) que algunos fibrados vectoriales C^*-algebraicos (C^*-algebraic vector bundles) pueden ser obtenidos mediante esta construcción. Las acciones parciales deformadas de grupos en álgebras abstractas y sus correspondientes productos cruzados fueron introducidos en [4], donde un análogo algebraico de la estabilización que se construyó en C^*-álgebras fue obtenido. En [2, 7] pueden encontrarse aplicaciones y otros desarrollos de estos conceptos.

El estudio de la globalización de acciones parciales ha producido mucha literatura en muy diversas ramas de matemáticas (véase, por ejemplo, [1, 9, 10]). El problema de la globalización ha resultado esencial para un estudio mayor del producto cruzado general y otros temas relacionados (véase [3, 8]). Los resultados de este resumen se encuentran en el artículo de los autores, *Globalization of twisted partial actions*, Trans. Amer. Math. Soc. 362 (2010), 4137-4160.

1. Preliminares

A lo largo de todo el resumen los anillos $\mathcal{A}$ serán siempre asociativos y no necesariamente con uno. Denotaremos con $\mathcal{U}(\mathcal{A})$ el grupo de las unidades y por $1_{\mathcal{A}}$ la identidad, cuando tenga. Recordemos que el anillo de multiplicadores $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ de un anillo asociativo, no necesariamente con identidad $\mathcal{A}$ es el conjunto

$$\mathcal{M}(\mathcal{A}) = \{(R, L) \in \mathrm{End}({}_{\mathcal{A}}\mathcal{A}) \times \mathrm{End}(\mathcal{A}_{\mathcal{A}}) : (aR)b = a(Lb)\,\text{para todo}\, a, b \in \mathcal{A}\}$$

junto con la suma y multiplicación componente a componente. Aquí nosotros usamos la escritura a la derecha para los homomorfismos de $\mathcal{A}$-módulos por la izquierda, mientras que la acción a la izquierda se usa para módulos por la derecha.

Así, dado $R :_{\mathcal{A}} \mathcal{A} \to_{\mathcal{A}} \mathcal{A}$, $L : \mathcal{A}_{\mathcal{A}} \to \mathcal{A}_{\mathcal{A}}$ and $a \in \mathcal{A}$ escribimos $a \mapsto aR$ y $a \mapsto La$. Para un multiplicador $w = (R, L) \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$ y un elemento $a \in \mathcal{A}$ hacemos $aw = aR$ y $wa = La$, así que siempre tenemos $(aw)b = a(wb)$ $(a, b \in \mathcal{A})$.

Definición 1.1. Una acción parcial de un grupo G en $\mathcal{A}$ es una terna

$$\alpha = (\{\mathcal{D}_g\}_{g\in G}, \{\alpha_g\}_{g\in G}, \{w_{g,h}\}_{(g,h)\in G\times G}),$$

donde para cada $g \in G$, se tiene que $\mathcal{D}_g$ es un ideal bilátero en $\mathcal{A}$, α_g es un isomorfismo de anillos $\mathcal{D}_{g^{-1}} \to \mathcal{D}_g$, y para cada $(g,h) \in G\times G$, $w_{g,h}$ es un elemento invertible de $\mathcal{M}(\mathcal{D}_g\cdot\mathcal{D}_{gh})$. Además, se satisfacen los siguientes axiomas, para g, h y $t \in G$.

(i) $\mathcal{D}_g^2 = \mathcal{D}_g,\ \mathcal{D}_g \cdot \mathcal{D}_h = \mathcal{D}_h \cdot \mathcal{D}_g$.
(ii) $\mathcal{D}_1 = \mathcal{A}$ y α_1 es la identidad en $\mathcal{A}$.
(iii) $\alpha_g(\mathcal{D}_{g^{-1}} \cdot \mathcal{D}_h) = \mathcal{D}_g \cdot \mathcal{D}_{gh}$.
(iv) $\alpha_g \circ \alpha_h(a) = w_{g,h}\alpha_{gh}(a)w_{g,h}^{-1},\ \forall a \in \mathcal{D}_{h^{-1}} \cdot \mathcal{D}_{h^{-1}g^{-1}}$.
(v) $w_{1,g} = w_{g,1} = 1$.
(vi) $\alpha_g(aw_{h,t})w_{g,ht} = \alpha_g(a)w_{g,h}w_{gh,t},\ \forall a \in \mathcal{D}_{g^{-1}} \cdot \mathcal{D}_h \cdot \mathcal{D}_{ht}$.

Denotaremos también a los $w_{g,h}$ como $w[g,h]$. Como se ha visto en [4], de (i) se sigue que un producto finito de ideales idempotentes $\mathcal{D}_g \cdots \mathcal{D}_h$ es idempotente y

$$\alpha_g(\mathcal{D}_{g^{-1}} \cdot \mathcal{D}_h \cdot \mathcal{D}_f) = \mathcal{D}_g \cdot \mathcal{D}_{gh} \cdot \mathcal{D}_{gf}$$

para todo $g, h, f \in G$, por (iii). Así, tiene sentido aplicar todos los multiplicadores de (vi).

Decimos que α es *global* si $\mathcal{D}_g = \mathcal{A}$ $(g \in G)$. Nótese que en una acción global deformada

$$\beta = (\mathcal{B}, \{\beta_g\}_{g\in G}\{u_{g,h}\}_{(g,h)\in G\times G}) \tag{1}$$

de un grupo G sobre un anillo $\mathcal{B}$, no necesariamente unitario, uno puede restringir β a un ideal bilátero $\mathcal{A}$ de $\mathcal{B}$, de tal manera que $\mathcal{A}$, tenga $1_{\mathcal{A}}$, como sigue. Hacemos $\mathcal{D}_g = \mathcal{A} \cap \beta_g(\mathcal{A}) = \mathcal{A} \cdot \beta_g(\mathcal{A})$ vemos que cada $\mathcal{D}_g$ tiene 1; a saber, $1_{\mathcal{A}}\beta_g(1_{\mathcal{A}})$. Entonces haciendo $\alpha_g = \beta_g\mid_{\mathcal{D}_{g^{-1}}}$, los axiomas (i), (ii) y (iii) de la definición anterior se satisfacen. Aún más, si definimos $w_{g,h} = u_{g,h}1_{\mathcal{A}}\beta_g(1_{\mathcal{A}})\beta_{gh}(1_{\mathcal{A}})$ podemos comprobar que el resto de los axiomas se satisface; así que, de hecho, hemos obtenido una acción parcial deformada en $\mathcal{A}$.

Definición 1.2. Una acción parcial deformada β, como en (1), de un grupo G sobre un anillo (posiblemente sin 1) $\mathcal{B}$, decimos que es una globalización (o una acción envolvente) para la acción parcial α de G en $\mathcal{A}$ si existe un monomorfismo $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ tal que:

(i) $\varphi(\mathcal{A})$ es un ideal de $\mathcal{B}$.
(ii) $\mathcal{B} = \sum_{g\in G} \beta_g(\varphi(\mathcal{A}))$.
(iii) $\varphi(\mathcal{D}_g) = \varphi(\mathcal{A}) \cap \beta_g(\varphi(\mathcal{A}))$ para todo $g \in G$.
(iv) $\varphi \circ \alpha_g = \beta_g \circ \varphi$ sobre $\mathcal{D}_{g^{-1}}$ para todo $g \in G$.
(v) $\varphi(aw_{g,h}) = \varphi(a)u_{g,h}$, $\varphi(w_{g,h}a) = u_{g,h}\varphi(a)$ para cualesquier $g, h \in G$ y $a \in \mathcal{D}_g\mathcal{D}_{gh}$.

En este caso, decimos que α es globalizable.

En caso de que $\mathcal{A}$ sea anillo con uno, si $\mathcal{B}$ también tiene identidad decimos que β es una globalización unitaria y que α es unitariamente globalizable.

2. Resultados

2.1. **Equivalencia de Morita de productos cruzados.** Dada una acción parcial α de G sobre $\mathcal{A}$, el producto cruzado $\mathcal{A}*_\alpha G$ es la suma directa $\oplus_{g\in G}\mathcal{D}_g\delta_g$, donde los δ_g son símbolos con la regla de multiplicar

$$(a_g\delta_g) \cdot (b_h\delta_h) = \alpha_g(\alpha_g^{-1}(a_g)b_h)w_{g,h}\delta_{gh},$$

donde $w_{g,h}$ actúa como multiplicador por la derecha de $\alpha_g(\alpha_g^{-1}(a_g)b_h) \in \alpha_g(\mathcal{D}_{g^{-1}} \cdot \mathcal{D}_h) = \mathcal{D}_g \cdot \mathcal{D}_{gh}$. La asociatividad del producto se probó en [4]. Cuando α es globalizable, los productos cruzados parcial y global son equivalentes de Morita.

Teorema 2.1. *Sea α una acción parcial deformada globalizable de G sobre un anillo s-unitario por la izquierda $\mathcal{A}$ y β la globalización sobre $\mathcal{B}$. Entonces los productos cruzados $\mathcal{A} *_\alpha G$ and $\mathcal{B} *_\beta G$ son equivalentes de Morita.*

2.2. **Reducción del problema a la extensión de los multiplicadores.** Con la notación de la Definición 1.1. Si α es una acción parcial deformada de G sobre $\mathcal{A}$, de tal manera que tanto $\mathcal{A}$, como los ideales $\mathcal{D}_g$ tienen identidad (que denotamos $1_g = 1_{\mathcal{D}_g}$) entonces se verifican las siguientes propiedades.

(1) $\mathcal{D}_g\mathcal{D}_h$ es unitario con identidad $1_g 1_h$. Como consecuencia,
(2) $\mathcal{M}(\mathcal{D}_g\mathcal{D}_{gh}) \cong \mathcal{D}_g\mathcal{D}_{gh}$, así que $w_{g,h}$ es invertible.
(3) Finalmente, $\alpha_g(1_{g^{-1}}1_h) = 1_g 1_{gh}$. Recuérdese que $\alpha_g(\mathcal{D}_{g^{-1}} \cdot \mathcal{D}_h) = \mathcal{D}_g \cdot \mathcal{D}_{gh}$.

Esto nos permite probar el siguiente teorema, que nos muestra que la globalización depende exclusivamente de que podamos extender las unidades de los multiplicadores.

Teorema 2.2. *Con la notación de la Definición 1.1. Sea α una acción parcial deformada de G sobre $\mathcal{A}$, donde los $\mathcal{D}_g$ tienen identidad. Entonces, α admite globalización si y sólo si para todo $(g, h) \in G \times G$ existe $\widetilde{w}_{g,h} \in \mathcal{U}(\mathcal{A})$, tal que $\widetilde{w}_{g,h} 1_g 1_{gh} = w_{g,h}$ y además*

$$\alpha_g(\widetilde{w}_{h,t}\, 1_{g^{-1}})\, \widetilde{w}_{g,ht} = 1_g\, \widetilde{w}_{g,h}\, \widetilde{w}_{gh,t}, \quad (g, h, t \in G)$$

2.3. **Acciones sobre anillos que son producto arbitrario de indescomponibles.** De ahora en adelante, supondremos que nuestro anillo se descompone como $\mathcal{A} = \prod_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{R}_\lambda$, con $\mathcal{R}_\lambda$ anillo con uno, indescomponible. En este caso, es fácil ver que si α es una acción parcial deformada de G sobre $\mathcal{A}$, los ideales $\mathcal{D}_g$ son producto de algunos de los $\mathcal{R}_\lambda$. De hecho, α permuta la descomposición en bloques. De aquí surge la idea de las acciones transitivas.

Definición 2.3. Sea $\mathcal{A} = \prod_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{R}_\lambda$, producto de indescomponibles y α una acción parcial de G sobre $\mathcal{A}$. Decimos que α es transitiva si para cualesquiera $\lambda,\ \lambda' \in \Lambda$ existe $g \in G$ de tal manera que $\mathcal{R}_\lambda \subseteq \mathcal{D}_{g^{-1}}$ y $\alpha_g(\mathcal{R}_\lambda) = \mathcal{R}_{\lambda'}$.

2.4. **Existencia de la globalización.** Sea $\mathcal{A}$ un anillo de la forma $\mathcal{A} = \prod_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{R}_\lambda$, con $\mathcal{R}_\lambda$ anillo con uno, indescomponible. Utilizando una adaptación al caso no conmutativo y parcial de la idea de la correstricción en el álgebra homológica podemos, partiendo de cualquier acción parcial deformada, crear "acciones tipo" que son equivalentes a las originales (en el sentido que veremos más adelante, en el Párrafo 2.5, por cuestiones de espacio) pero más manejables. De hecho, se puede partir de una acción parcial deformada no transitiva y obtener una equivalente que sea transitiva. A partir de éstas nuevas acciones parciales deformadas transitivas más simples obtenemos nuestro resultado principal sobre la globalización.

Teorema 2.4. *Sea $\mathcal{A}$ un anillo de la forma $\mathcal{A} = \prod_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{R}_\lambda$, con $\mathcal{R}_\lambda$ anillo con uno, indescomponible. Una acción parcial deformada*

$$\alpha = (\{\mathcal{D}_x\}_{x\in G}, \{\alpha_x\}_{x\in G}, \{w[x, y]\}_{(x,y)\in G\times G}),$$

de un grupo G sobre $\mathcal{A}$ es globalizable si y sólo si cada $\mathcal{D}_g$ $(g \in G)$ es anillo con uno.

2.5. **Unicidad.** Como hemos comentado, al hacer la globalización, la acción envolvente no contiene a la original sino a una equivalente, luego es normal que la globalización se obtenga salvo equivalencia. Vamos a ver esos conceptos. Sean $\mathcal{A}_1$ y $\mathcal{A}_2$ anillos y

$$\alpha_i = (\{\mathcal{D}^i_g\}_{g\in G}, \{\alpha_{i,g}\}_{g\in G}, \{w_i[g,h]\}_{(g,h)\in G\times G}), \quad (i = 1, 2)$$

acciones parciales deformadas. Decimos que α_1 y α_2 son **equivalentes** si $\mathcal{D}^1_g = \mathcal{D}^2_g$ $(g \in G)$ y existe un conjunto de unidades $\{\varepsilon_g\}_{g\in G} \subseteq \mathcal{U}(\mathcal{D}_g)$ tal que $\alpha'_g(a) = \varepsilon_g \alpha_g(a)\varepsilon_x^{-1}$ y tal que $w'_{g,h} = \varepsilon_g\, \alpha_g(\varepsilon_h 1_{g^{-1}})\, w_{g,h}\, \varepsilon_{gh}^{-1}$. Diremos que α_1 y α_2 son **isomorfas** si existe un isomorfismo de anillos $\phi : \mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}_2$ tal que $\phi(\mathcal{D}^1_g) = \mathcal{D}^2_g$ $(g \in G)$; $\phi \circ \alpha_{1,g} \circ \phi^{-1}(a) = \alpha_{2,g}(a)$ $(g \in G$ y $a \in \mathcal{D}^2_{g^{-1}})$ y $\phi_{g,h}\, w_1[g,h]\, \phi^{-1}_{g,h} = w_2[g,h]$, como multiplicadores de $\mathcal{D}^2_g\mathcal{D}^2_{gh}$, donde $\phi_{g,h} = \phi_{|D^1_g\mathcal{D}^1_{gh}}$. Diremos que α_1 y α_2 son **isomorfo-equivalentes** si α_1 es isomorfa a una acción equivalente a α_2. Si β_1 y β_2 son globalizaciones de α_1 y α_2, respectivamente, con inclusiones $\varphi_1 : \mathcal{A} \to \mathcal{B}_1$ y $\varphi_2 : \mathcal{A} \to \mathcal{B}_2$, diremos que son **globalizaciones equivalentes** si α_1 y α_2 son isomorfo-equivalentes y existe un isomorfismo de anillos $\phi : \mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2$ tal que $\phi \circ \varphi_1 = \varphi_2$.

Teorema 2.5. *Sea $\mathcal{A}$ un anillo de la forma $\mathcal{A} = \prod_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{R}_\lambda$, con $\mathcal{R}_\lambda$ anillo con uno, indescomponible y sea α una acción parcial deformada globalizablemente unitaria, de G sobre $\mathcal{A}$. Entonces cualesquiera dos globalizaciones son equivalentes.*

References

[1] F. Abadie, Enveloping Actions and Takai Duality for Partial Actions, *J. Funct. Analysis* **197** (2003), no. 1, 14–67.

[2] D. Bagio, W. Cortes, M. Ferrero, A. Paques, Actions of inverse semigroups on algebras, *Commun. Algebra* **35** (2007), no. 12, 3865–3874.

[3] D. Bagio, J. Lazzarin, A. Paques, Crossed products by twisted partial actions: separability, semisimplicity and Frobenius properties, *Commun. Algebra*, **38**(2), 2010

[4] M. Dokuchaev, R. Exel, J. J. Simón, Crossed products by twisted partial actions and graded algebras, *J. Algebra,* **320**, (2008), no. 8, 3278–3310.

[5] M. Dokuchaev, M. Ferrero, A. Paques, Partial Actions and Galois Theory, *J. Pure Appl. Algebra* **208** (2007), no. 1, 77–87.

[6] R. Exel, Twisted partial actions: a classification of regular C^*-algebraic bundles, *Proc. London Math. Soc.* **74** (1997), no. 3, 417–443.

[7] R. Exel, M. Laca, J. Quigg, Partial dynamical systems and C^*-algebras generated by partial isometries, *J. Operator Theory* **47** (2002), no. 1, 169–186.

[8] M. Ferrero, Partial actions of groups on semiprime rings, *Groups, rings and group rings, Lect. Notes Pure Appl. Math.* **248**, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, (2006), 155–162.

[9] J. Kellendonk, M. V. Lawson, Partial actions of groups, *Internat. J. Algebra Comput.* **14** (2004), no. 1, 87 – 114.

[10] M. V. Lawson, *Inverse semigroups. The theory of partial symmetries*, World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge, NJ, 1998.

Universidad de São Paulo, Brasil
E-mail address: dokucha@ime.usp.br

Universidade Federal de Santa Catarina
E-mail address: exel@mtm.ufsc.br

Universidad de Murcia
E-mail address: jsimon@um.es